

## 2次元保存則に対する衝撃波の生成

中 根 静 男\*

### Formation of Shocks for a Two-Dimensional Conservation Law

Shizuo Nakane

#### Abstract:

The initial value problem for an equation of scalar conservation law in two-space dimensions is considered. By the method of characteristics, the solution of this problem is concretely constructed. Especially, under some generic assumptions, formation of shocks is exactly described. It is easily seen from our results where shocks occur. In these processes, singularity theory plays an essential role.

#### § 1. 序

次のような方程式の初期値問題を考える.

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1,2} \frac{\partial f_i(u)}{\partial x_i} = 0,$$

$$(t > 0, x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2)$$

$$(2) \quad u(0, x) = \phi(x) \quad (x \in \mathbf{R}^2).$$

ここで,  $f_1, f_2 \in C^\infty(\mathbf{R})$ , 即ち,  $f_1, f_2$  は実数直線上定義された無限階微分可能な関数,  $\phi \in S(\mathbf{R}^2)$ , 即ち,  $\phi \in C^\infty(\mathbf{R}^2)$  かつ  $\phi$  は急減少 ( $x \rightarrow \infty$  のとき  $\phi \rightarrow 0$ ), しかも,  $f_1, f_2, \phi$  は実数値とする.

(1) は保存則の方程式と呼ばれているものである. 何故かという, 一般に, 流体の運動を記述するときには, 質量・運動量・エネルギーの保存則を用いるが, それを数学的に表現すると, (1) の形になるからである.

ここでは, (1), (2) の解の性質を調べる. さて, (1) は, 非線型の1階偏微分方程式であるが, それが線型の場合と本質的に異なる点は, 初

期値  $\phi$  が滑らかでも, 一般に解は有限時間後には不連続になるということである. この解の不連続点のことを衝撃波 (shock) という. この小論の主題は, shock が如何にして発生し, また, どのように伝播してゆくのかを具体的に考察することである. 単に解の存在や一意性だけを言うのであれば, (1) より一般の場合に, 既に示されている. しかし shock の伝播の様子に関しては, 空間1次元の場合を除いてはほとんど研究されていない. 2次元の場合, J. Guckenheimer [3], R. Thom [5], D. Wagner [7] があるが, 不十分である. 1次元の場合に, J. Guckenheimer [2] において完成された結果を高次元の場合に如何にして拡張するかという目標に対するひとつの端的な回答がこの小論である. [2] でもそうであったが, その際, 特異点理論 (singularity theory) は非常に有効な道具を提供してくれる. この理論のおかげで, shock が発生するメカニズムが非常によくわかるのである.

(1), (2) の応用について触れると,  $f_1, f_2$  を適当にとれば, (1) は Buckley-Leverett 方程式

\* 東京工芸大学  
昭和60年9月25日受理

と呼ばれるものになる。これは、高い孔隙率と浸透性 (porosity) を持った岩石 (貯留岩) 中の原油が水流によって移動してゆく現象を表わしている。このとき、 $u(t, x)$  は時刻  $t$ , 場所  $x$  の水の原油に対する相対濃度を表わし、 $f=(f_1, f_2)$  は流束ベクトルを表わす。すると shock, つまり  $u$  の不連続点の集合は、水と原油の界面を表わすが、石油工学においては、この界面が水の原油に対する相対粘性に対し不安定であることが観測されている。界面が手の指のような形をしていることからこの現象を *fingering instability* と呼ぶ。J. Glimm, D. Marchesin, O. McBryan [1] はこの現象を数値解析的に取り扱った。本小論が、この現象に数学的な枠組を与えられれば幸いである。

さて、前に、(1), (2) の解が不連続になると述べた。不連続ならば当然微分可能ではあり得ない。しかし(1)には微分が現われる。そこで、不連続関数に対しても、その微分を何らかの意味で定義しなければならない。ここでは *distribution* の意味で微分することにする:

(1), (2)  $\Leftrightarrow$  すべての  $g(t, x) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^3)$   
 $= \{g \in C^\infty(\mathbf{R}^3); \text{有界領域の外で } g \equiv 0\}$  に対し、次が成り立つ:

$$(3) \quad \iint_{\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^2} \left( u \cdot \frac{\partial g}{\partial t} + \sum_{i=1,2} f_i(u) \frac{\partial g}{\partial x_i} \right) dt dx + \int_{\mathbf{R}^2} \phi(x) g(0, x) dx = 0.$$

$u$  が連続微分可能ならば、変分法の基本原理から、部分積分することにより、(3) から (1), (2) が従う。従って、(3) は、(1), (2) の不連続関数に対する拡張と言える。(3) を満たす関数  $u$  を、(1), (2) の弱解 (weak solution) という。

実は、ここで構成する解は区分的に滑らかで、不連続点の集合は滑らかな2次元曲面になる。これを衝撃波曲面 (shock surface) と呼び、 $S$  と書くことにする。 $p \in S$  とし、 $p$  における  $S$  の単位法線ベクトルを  $n$ , そして、 $u^\pm(p) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} u(p \pm \epsilon n)$  とおくと、簡単な計算により、(3) から次が従う。

(4) (Rankine-Hugoniot 条件)

$$n \cdot (u^+ - u^-, f_1(u^+) - f_1(u^-), f_2(u^+) - f_2(u^-)) = 0.$$

また、(1), (2) の弱解は唯1つとは限らない。そこで、物理的に意味のある解をとり出すために次の条件を仮定する。

(5) (Entropy 条件)  $u^+ \geq u^-$  となるように  $n$  を向き付けたとき、 $u^- \leq k \leq u^+$  なる  $k$  に対し次が成り立つ。

$$n \cdot (k - u^+, f_1(k) - f_1(u^+), f_2(k) - f_2(u^+)) \geq 0.$$

この条件は、気体力学の方程式の場合は、衝撃波を横切るときにエントロピーが増加することを意味する。 $S = \{t = \varphi(x)\}$  としたとき、

$$g(u) = \text{grad } \varphi(x) \cdot f(u) \text{ とおくと、}$$

$$(5) \quad \Leftrightarrow \frac{g(u^+) - g(u^-)}{u^+ - u^-} \leq \frac{g(u^+) - g(k)}{u^+ - k} \quad (u^- \leq k \leq u^+)$$

が直接計算から従う。これは、区間  $[u^-, u^+]$  で  $g(u)$  のグラフが2点  $(u^\pm, g(u^\pm))$  を通る線分の下方にあることを意味する。特に  $g$  が下に凸であれば(5)は成り立つ。

## § 2. 特性曲線の方法

(1), (2) の解を特性曲線の方法を用いて具体的に構成していく。 $a_i(u) = f_i'(u)$  とおくと、 $y \in \mathbf{R}^2$  を通る (1), (2) の特性曲線とは次の方程式の解を指す:

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{dx_i(t)}{dt} = a_i(u(t, x(t))), & (i=1, 2) \\ x_i(0) = y_i. \end{cases}$$

$u(t, x)$  が滑らかならば、Cauchy の存在定理により、(6) の解は存在する。この解曲線  $x = x(t)$  を特性曲線と呼ぶのは、次の事実による。

**補題 1.**  $u(t, x)$  を滑らかな (1), (2) の解とすると、 $u$  は (1), (2) の特性曲線に沿って一定。

$$\begin{aligned} \text{証明} \quad \frac{d}{dt} u(t, x(t)) &= \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1,2} \frac{dx_i}{dt} \frac{\partial u}{\partial x_i} \\ &= \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1,2} a_i(u) \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0. \quad (\text{終}) \end{aligned}$$

従って,  $u(t, x(t)) \equiv u(0, x(0)) = u(0, y) = \phi(y)$ .  
これを (6) に代入すると, (6) の解は  $x(t) = y + t\alpha(\phi(y))$  となり, 特性曲線は, 実は直線であることがわかる. ここで  $C^\infty$  写像  $H_t: \mathbf{R}_y^2 \rightarrow \mathbf{R}_x^2$ ,  $H: \mathbf{R}^3_{(t,y)} \rightarrow \mathbf{R}^3_{(t,x)}$  を次で定義しよう.

$$(7) \quad \begin{cases} H_t(y) = y + t\alpha(\phi(y)), \\ H(t, y) = (t, H_t(y)) \end{cases}$$

すると, 以上のことから,  $H_t$  の逆写像  $H_t^{-1}$  が存在する  $(t, x)$  では,  $u(t, x) = \phi(H_t^{-1}(x))$  が (1), (2) の滑らかな解になることがわかる.  $t=0$  では  $H_t$  は恒等写像故可逆, 従って, 逆写像定理より,  $t$  が十分小でも  $H_t$  は可逆なので, 十分小さい  $t$  に対しては, (1), (2) の滑らかな解が存在する.

次に,  $H_t^{-1}$  が存在しない所で考える.  $H_t^{-1}$  が存在することは,  $H_t$  の一次近似であるヤコビ行列  $J(H_t)$  の逆  $J(H_t)^{-1}$  が存在することと同値なので, 結局, ヤコビアン  $\det J(H_t)$  を見ればよい.

$$\begin{aligned} \det J(H_t) &= \det \begin{bmatrix} 1 + ta_1'(\phi) \frac{\partial \phi}{\partial y_1} & ta_1'(\phi) \frac{\partial \phi}{\partial y_2} \\ ta_2'(\phi) \frac{\partial \phi}{\partial y_1} & 1 + ta_2'(\phi) \frac{\partial \phi}{\partial y_2} \end{bmatrix} \\ &= 1 + t \left( a_1'(\phi) \frac{\partial \phi}{\partial y_1} + a_2'(\phi) \frac{\partial \phi}{\partial y_2} \right) \\ &= 1 + t\lambda(y) \end{aligned}$$

とおく.  $\lambda(y) \geq 0$  ならば  $t > 0$  故  $\det J(H_t) > 0$ , 従って  $H_t^{-1}$  が存在する. そこで, 次を仮定しよう. これを仮定しないと shock が発生せず面白くない.

$$(A.1) \quad \min \lambda(y) = \lambda(y^0) = -M < 0$$

$t^0 = 1/M$  とおくと  $t < t^0$  ならば  $\det J(H_t) > 0$  故  $H_t^{-1}$  が存在して  $u(t, x)$  は滑らかになる. そこで, 以後  $t \geq t^0$  で考えることにしよう. 但し  $t - t^0$  は十分小さいとする. 次の仮定は, 一般的であろう.

$$(A.2) \quad \lambda(y) \text{ の singularity は非退化, 即ち, } \text{grad } \lambda(y) = 0 \text{ なる } y \text{ では Hess } \lambda(y) \text{ は正則 (可逆).}$$

ここで  $\text{Hess } \lambda(y)$  とは  $2 \times 2$  行列  $[\partial^2 \lambda / \partial y_i \partial y_j]$  を指す. (A.2) は, [2] で空間 1 次元のときに仮定したものの 2 次元版である. 従って, この仮定は自然であろう.

### § 3. 幾何学的考察

一般に, 写像  $H$  に対し, ヤコビアン  $\det J(H)$  が 0 になるような点を写像  $H$  の特異点 (singularity) といい, 特異点の  $H$  による像を特異値 (critical value) という.

前節の  $H$  に注目しよう.

$$J(H) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1(\phi) & 1 + ta_1'(\phi) \frac{\partial \phi}{\partial y_1} & ta_1'(\phi) \frac{\partial \phi}{\partial y_2} \\ a_2(\phi) & ta_2'(\phi) \frac{\partial \phi}{\partial y_1} & 1 + ta_2'(\phi) \frac{\partial \phi}{\partial y_2} \end{bmatrix},$$

$$\det J(H) = \det J(H_t) = 1 + t\lambda(y),$$

より,  $H_t$  の特異点 =  $H$  の特異点となるので, 以後, 写像  $H$  を考えることにする. 今問題にしているのは,  $H$  の特異点における  $H$  の挙動である.

写像の特異点について研究する特異点理論 (singularity theory) を用いると,  $H$  の特異点は, generic には Morin singularity という, 特異点の中では最も簡単な, 従って扱い易いものであることがわかる. この事実は, 保存則の方程式のより高次元の場合への拡張を示唆する. 実際, Hamilton-Jacobi 方程式の場合は, 出てくる特異点がいよいよ複雑になり, 今の所 3 次元以上では扱えないと言ってよい. とにかく, Morin singularity (ここでは説明は略す) しか現われないというのは保存則の著しい特徴である.

さて,  $H$  の特異点を更に解析していくが, その前に, 次の reduction を行なう.

**補題 2.** 座標  $(t, y)$  の 1 次変換により, 次を仮定してよい.

$$(8) \quad \begin{aligned} a_1'(\phi(y^0)) &= a_1(\phi(y^0)) = 0, \\ a_2'(\phi(y^0)) &> 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{証明. } a^0 &= (a_1^0, a_2^0) \\ &= (a_1'(\phi(y^0)), a_2'(\phi(y^0))) / \\ &\quad \sqrt{a_1'(\phi(y^0))^2 + a_2'(\phi(y^0))^2}, \end{aligned}$$

$b^0$  を  $a^0$  と直交する単位ベクトルとし,

$$\begin{aligned} T=t \\ \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} b_1^0 & b_2^0 \\ a_1^0 & a_2^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - y_1^0 \\ x_2 - y_2^0 \end{bmatrix} \\ &\quad + \begin{bmatrix} y_1^0 - a_1(\phi(y^0))(t - t^0) \\ y_2^0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

と変換すればよい. (終)

この補題は, (1), (2) が局所的には1次元的に扱えることを意味する.

$H$  の特異点については, 次の事実がわかる.

**補題 3.** (A.1), (A.2) を仮定すると,  $t \geq t^0$ ,  $t - t^0$  が十分小ならば,  $H$  の特異点は fold か cusp のみである.

**定義**  $\mathbf{R}^3$  から  $\mathbf{R}^3$  への写像の特異点が fold 又は cusp であるとは, 座標変換によって, 次の写像に変換されることをいう:

$$\text{fold: } \begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = y_3^2 \end{cases} \quad \text{cusp } \begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = y_3^3 - y_2 y_3 \end{cases}$$

補題 3 の証明のために, 野口一福田 [4] に述べられている, fold と cusp の特徴付けを引用する:

**補題 4** 原点 0 の近くで定義された写像  $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$  で,  $f(y) = f(y_1, y_2, y_3) = (y_1, y_2, f_3(y_1, y_2, y_3))$  の形のものを考える. このとき,

- (i)  $\frac{\partial f_3}{\partial y_3}(0) \neq 0$  ならば 0 は regular,
- (ii)  $\frac{\partial f_3}{\partial y_3}(0) = 0$ ,  $\frac{\partial^2 f_3}{\partial y_3^2}(0) \neq 0$  ならば 0 は fold,
- (iii)  $\frac{\partial f_3}{\partial y_3}(0) = \frac{\partial^2 f_3}{\partial y_3^2}(0) = 0$ ,  $\frac{\partial^2 f_3}{\partial y_2 \partial y_3}(0) \neq 0$ ,  $\frac{\partial^3 f_3}{\partial y_3^3}(0) \neq 0$  ならば 0 は cusp.

**補題 3 の証明の方針**

$H$  を補題 4 の形の写像に変換するために, 次の座標変換を行なう. これが座標変換になっていることは, 補題 2 から従う.

$$\begin{cases} t = t \\ Y_1 = y_1 + t a_1(\phi(y)) \\ Y_2 = y_2. \end{cases}$$

この変換により,  $H$  は

$$H' \begin{cases} t = t \\ x_1 = Y_1 \\ x_2 = Y_2 + t a_2(\phi(y_1(Y), Y_2)) \end{cases}$$

となる. この  $H'$  に補題 4 を適用すればよい. singularity として fold と cusp しか現われないことを示すには, fold でなければ cusp になることを示せばよい. 詳しい計算は一切略す. (終)

ここで,  $\Sigma^1 = \{(t, y) \in \mathbf{R}^3; 1 + t\lambda(y) = 0\}$ , 即ち,  $H$  の singularity 全体の集合,  $\Sigma^{1,1} = \{(t, y) \in \Sigma^1; (t, y) \text{ は } H \text{ の cusp}\}$  とおく.

**補題 5**

$$\begin{aligned} \Sigma^{1,1} &= \left\{ (t, y) \in \mathbf{R}^3; 1 + t\lambda(y) = 0, \right. \\ &\quad \left. a_1'(\phi(y)) \frac{\partial \lambda}{\partial y_1} + a_2'(\phi(y)) \frac{\partial \lambda}{\partial y_2} = 0 \right\} \end{aligned}$$

かつ  $\Sigma^{1,1}$  は  $y_1$  で parametrize される  $\mathbf{R}^3$  内の滑らかな曲線. 即ち,  $C^\infty$  関数  $\alpha(y_1)$ ,  $\beta(y_1)$  が存在して,  $\Sigma^{1,1} = \{(t, y); t = \alpha(y_1), y_2 = \beta(y_1)\}$  と表わされる.

**補題 6**  $H(\Sigma^{1,1})$  は  $x_1$  で parametrize される  $\mathbf{R}^3$  内の滑らかな曲線. 即ち,  $C^\infty$  関数  $\tilde{\alpha}(x_1)$ ,  $\tilde{\beta}(x_1)$  が存在して,  $H(\Sigma^{1,1}) = \{(t, x) \in \mathbf{R}^3; t = \tilde{\alpha}(x_1), x_2 = \tilde{\beta}(x_1)\}$  と表わされる.

#### § 4. 衝撃波曲面の局所存在

$\Sigma^1$  の近くでの  $H$  の挙動を図示すると, 次のようになる.

cusp の定義において  $x_3$  が  $y_3$  の 3 次式で表わされていることに注意しよう. 3 次方程式の根は 3 個から成るので,  $x_3$  の値に対し,  $y_3$  は 3 個対応する. 従って,  $H^{-1}$  は cusp  $\Sigma^{1,1}$  の近くで 3 価になる. それを図 1 のように  $y = g_1(t, x), g_2(t, x), g_3(t, x)$  と表わすことにする. すると,  $H(\Sigma^1)$  の中の領域  $\Omega$  においては, (1), (2) の解  $u(t, x)$  も  $\phi(H^{-1}(t, x)) = \phi(g_1(t, x)), \phi(g_2(t, x)), \phi(g_3(t, x))$

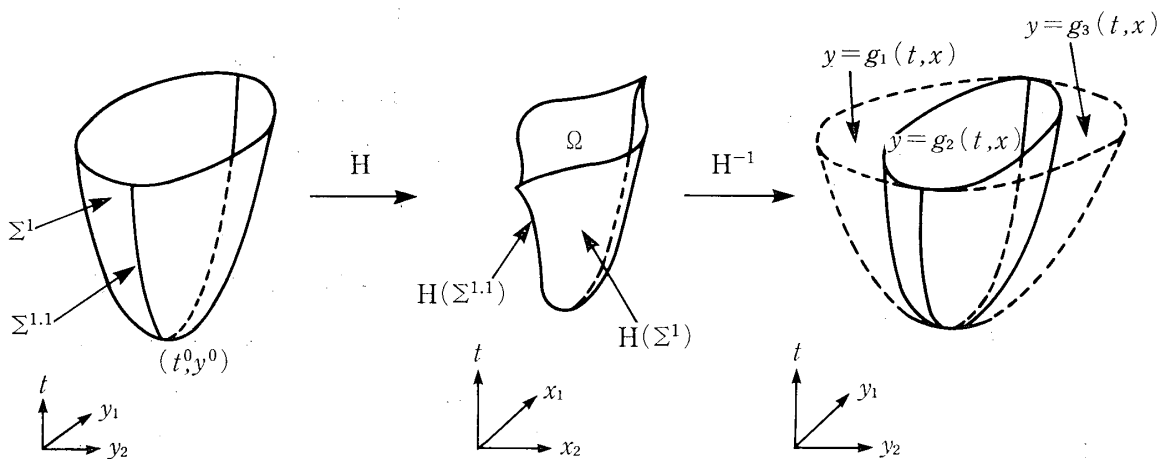


図 1

となり、やはり 3 値となる。これを 1 次元的に図示すると図 2 のようになる。ここで  $u_i(t, x) = \phi(g_i(t, x))$  ( $i=1, 2, 3$ ) とおいた。

ところで、実際に起こる現象は 1 値のはずだから、この 3 値の  $u$  を 1 値にしなければならない。しかも、 $\Omega$  の外では既に 1 値だから、ここでは  $u$  は既に定まっている。図 2 を眺めると、 $u$  を  $\Omega$  で 1 値にするには、 $\Omega$  のどこかで飛んで不連続にしなければならないことがわかるだろう。まさに、ここに衝撃波の発生する原因があるのである。さらに、Rankine-Hugoniot 条件の考察から、 $u$  は、図 2 の右図のように、 $u_1$  から  $u_3$  に飛ばねばならないことがわかる。

さて、Shock surface を  $S = \{x_2 = \varphi(t, x_1)\}$  と表わすことにする。 $S$  の法線ベクトルは  $(\partial\varphi/\partial t, \partial\varphi/\partial x_1, -1)$  となるので、Rankine-Hugoniot 条

件より、 $\varphi$  は次の方程式を満たさねばならない。

$$(9) \quad \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{[f_1(u)]}{[u]} \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} = \frac{[f_2(u)]}{[u]}$$

但し、 $[u] = u_1(t, x_1, \varphi(t, x_1)) - u_3(t, x_1, \varphi(t, x_1))$ ,  $[f_i(u)] = f_i(u_1(t, x_1, \varphi(t, x_1))) - f_i(u_3(t, x_1, \varphi(t, x_1)))$ , ( $i=1, 2$ ) とおく。更に、容易にわかるように、shock は  $H(\Sigma^{1,1})$  を通るので、 $\varphi$  は

$$(10) \quad \varphi(\alpha(x_1), x_1) = \beta(x_1)$$

も満たさねばならない。要するに、 $\varphi$  は 1 階偏微分方程式の初期値問題 (9), (10) の解となるはずである。

さて、(9) に注目しよう。これは、一般には非線型方程式であるが、最初の問題の (1) が線型、即ち、 $f_1, f_2$  が  $u$  の 1 次式のときは、すぐわかるように線型になる。しかも、よく見ると、この

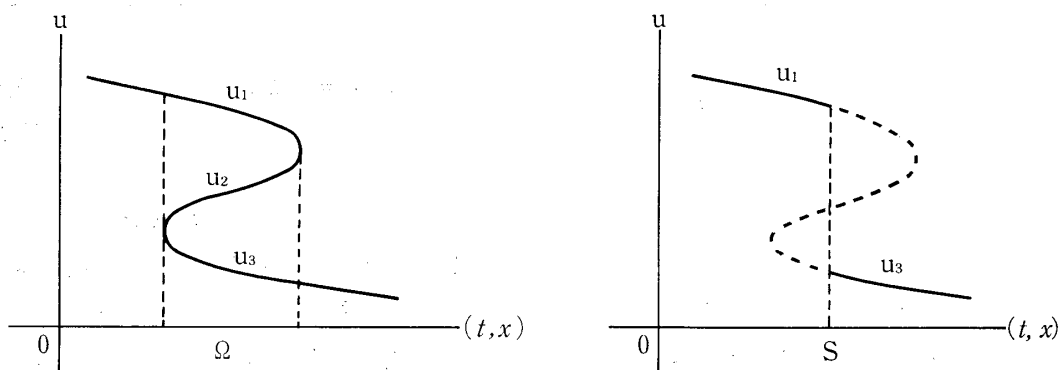


図 2

とき (9) は, (1) の特性方程式と呼ばれているものに他ならない. そこで, (9) を “一般化された特性方程式”, (9), (10) の解曲面  $S$  を “一般化された特性曲面” と呼ぶことにしよう.

すると, (9), (10) は, 要するに, 『衝撃波は, 一般化された特性曲面に沿って伝播する』ことを意味する. これは, 線型偏微分方程式の解の singularity は特性曲面に沿って伝わるというよく知られた事実の非線型への拡張になっている.

ところで, (9), (10) の解の存在についてであるが, 特性曲線の方法で解いていこうとすると, 今度は, 未知関数に関する滑らかさが不足しているために, 常微分方程式の解の存在は言えても, 初期値に関する滑らかさが保証されない. そこで, [2] に従い,  $(t, x)$  空間で考えずに,  $(t, y)$  空間で考えると, 未知関数に関する滑らかさが回復し, [2] の議論の高次元版も成り立つので, 結局, (9), (10) の滑らかな解の存在が言える. この解がエントロピー条件を満たすことも容易にわかる. 以上をまとめると,

**定理** (A.1), (A.2) の仮定の下で,  $(t^0, x^0)$  の近くで, 滑らかな shock surface を持ち, エントロピー条件を満たす区分的に滑らかな (1),

(2) の解が存在する. shock surface は, 一般化された特性曲面である (9), (10) の解曲面に一致する. 但し,  $x^0 = H_{t^0}(y^0)$ .

注意 shock surface の構成の部分は未完.

#### 参考文献

- 1) J. Glimm, D. Marchesin and O. McBryan: Unstable fingers in two phase flow, Comm. Pure Appl. Math., 34, (1981) 53-75.
- 2) J. Guckenheimer: Solving a single conservation law, Lect. Notes in Math., 468, (1975) 108-134.
- 3) J. Guckenheimer: Shocks and rarefactions in two space dimensions, Arch. Rat. Mech. Anal., 59, (1975) 281-291.
- 1) 野口一福田: 「初等カタストロフィー」共立全書 1976.
- 5) R. Thom: The two-fold way of catastrophe theory, Lect. Notes in Math., 525, (1976) 235-252.
- 6) M. Tsuji: Formation of singularities for Hamilton-Jacobi equations. I. Proc. Japan Acad., 59, Ser. A (1983) 55-58.
- 7) D. Wagner: The Riemann problem in two space dimensions for a single conservation law, SIAM. Math. Anal., 14, (1983) 534-559.