

博士学位論文  
導体円板による電磁波散乱に関する研究  
～境界値問題としての厳密解析～

平成25年12月

東京工芸大学大学院工学研究科  
電子情報工学専攻  
黒木 啓之



# 目次

第1章 序論	4
1.1 はじめに	4
1.2 本研究の歴史的背景	6
1.3 本研究の技術的および社会的な意義	8
1.4 本論文の構成	9
第2章 平面波を波源とする完全導体円板による散乱	14
2.1 はじめに	14
2.2 問題の設定	14
2.3 解析	16
2.3.1 ヘルツベクトルによる入射界と散乱界の表現	16
2.3.2 境界条件から得られる導体円板上でのヘルツベクトル	17
2.3.3 導体円板上での界の整合	19
2.3.4 端点条件による補助係数の決定	22
2.3.5 連立方程式における係数の級数表現	24
2.3.6 導体円板上での平面波の表現	25
2.3.7 導体円板上での電流分布	26
2.3.8 遠方散乱界	28
2.4 多倍長精度数値計算インターフェイスの構成	28
2.4.1 多倍長精度数値計算	28
2.4.2 GMP クラス変数とMPFR の関数群とのインターフェイス	29
2.5 計算精度の検討	32
2.6 数値計算	39
2.6.1 垂直入射における電流分布	39
2.6.2 斜め入射における電流分布	42
2.6.3 別法との比較	46
2.6.4 遠方散乱界	49
2.7 むすび	51

第 3 章	水平微小ダイポールを波源とする完全導体円板による散乱	54
3.1	はじめに	54
3.2	問題の設定	54
3.3	解析	55
3.3.1	ヘルツベクトルによる入射界と散乱界の表現	56
3.3.2	展開係数と連立方程式の係数	57
3.3.3	導体円板上での入射界の表現	59
3.3.4	級数展開	61
3.4	級数展開式の特性	68
3.5	数値計算	74
3.5.1	波源が中心軸上にある場合の電流分布	74
3.5.2	波源が中心軸上から外れた場合の電流分布	77
3.5.3	別法との比較	81
3.6	むすび	82
第 4 章	垂直微小ダイポールを波源とする完全導体円板による散乱	86
4.1	はじめに	86
4.2	問題の設定	86
4.3	解析	88
4.3.1	ヘルツベクトルによる入射界と散乱界の表現	88
4.3.2	導体円板上での入射界の表現	89
4.3.3	境界条件から得られる導体円板上でのヘルツベクトル	89
4.3.4	導体円板上での界の整合	90
4.3.5	端点条件による補助係数の決定	94
4.3.6	級数展開	96
4.3.7	級数展開式の特性	108
4.4	展開係数の計算精度に対する検討	111
4.5	数値計算	112
4.5.1	波源が中心軸上にある場合の電流分布	112
4.5.2	別法との比較	114
4.6	むすび	116
第 5 章	結論	118
付録 A		121
A.1	ヘルツベクトル	121

---

A.2	端点条件	123
A.3	円筒座標系での変数分離解	126
A.4	スカラ関数 $U(x, y)$ の導関数	127
A.5	関数 $u_m^n(t)$	130
A.5.1	性質と直交性	130
A.5.2	$u_m^n(t)$ による展開	132
A.5.3	Bessel 関数の展開	132
A.6	円筒座標系	134
A.7	連立 1 次方程式の係数	137
A.8	平面波の円筒波による展開	141
A.9	関数 $S_m^n(r, z)$ の導関数	141
A.10	関数 $S_m^n(r, z)$ の漸近展開	143
A.11	ヘルツベクトルを用いた極座標系の電磁界	145
A.12	水平微小ダイポール波源における入射界の展開	147
A.13	スカラ関数 $U(r, \varphi)$ の導出	149
A.14	垂直微小ダイポールにおける端点条件による展開係数の計算	150

# 第1章 序論

## 1.1 はじめに

1998年に電子情報通信学会のマイクロ波シミュレータ研究会で提唱された「マイクロ波シミュレータ評価のための規範的問題作り」[1]では、「アンテナ/放射系」の規範問題として「放射，散乱問題」が取り上げられている．ここでは，散乱解析の重要性が指摘されており，電磁波の散乱問題において，それを如何に正確に捉えるかが重要課題となっている．

一方，散乱現象において，結果を精度良く得るための厳密解析は，境界値問題を解くことに帰着される．導体円筒，導体球，導体円板などは，境界条件の下でMaxwellの方程式を解析的に解くことのできるごく限られた解析対象である．また，得られた解には，物理現象を説明できる項が入っており，解の物理的な解釈や結果の精度などの評価が可能となる．

ところで，任意形状に対する散乱解析は非常に複雑で一般に困難である．このため，種々の近似法が開発され，電磁現象を定量的に解析する方法が研究開発されてきた．さらに近年，コンピュータの性能が一段と向上すると共に，数値解析法の技術が急速に進歩したことで，より現実に近い問題が解決できるようになってきた．しかしながら，このような近似法や数値解法を利用するには，その解の信頼性の検証が必要になってくる．

解析的に解くことのできる問題のうち，エッジ回折を含む有限な形状の問題として，円板に対する散乱問題が重要である．この問題に対し，NomuraとKatsura[2]は，平面波を入射波とした場合を厳密に解析している．ここでは，波動方程式の固有関数展開を用いて界を表現しており，数値計算を容易にするために散乱界を級数表現している．

しかしながら，その手法では，半径が1から2波長程度までのサイズの円板しか良い結果が得られない．例として，図1.1から図1.3に，垂直入射時の円板の電流分布を，一般的なプログラミング言語で扱うことのできる倍精度計算によって計算した結果を示す．図1.1のように，円板の半径が2.5波長のときには，電流の平均値が2を中心として，波長と同じ周期で振動している．しかし，図1.2の3.5波長，図1.3の4.0波長では，平均値は小さくなり，また波形は大きく乱れている．この現象の原因は，数値計算するときの精度に問題があると考えられる．

本研究では，境界値問題として円板に対する散乱・回折現象の厳密解法を取り上げ，まず平面波入射の場合を検討している．ここでは，円板の半径が数波長程度と大きくなった際に正しい数値解が得られない問題を指摘し，多倍長精度数値計算を導入することで，円板のサ

イズに依らず良好な数値解が得られることを提案している．次に，この手法に基づき，入射波を水平方向に偏波した電氣的微小ダイポールを波源とした場合について，波源が中心軸から外れたときに一般化して級数展開した解を導出し，数値例を示している．さらに，これらの解析方法を発展させ，垂直方向に偏波した電氣的微小ダイポールを波源とした場合について解析している．ここでは，平面波および水平微小ダイポールとは異なる方法で展開係数を決定し，数値例を示している．

以下，本章では，はじめに円板に対する散乱・回折問題の歴史的な背景と本研究の位置付けを述べ，次に本研究の技術的および社会的な意義について述べると共に，その後に本論文の構成を示す．

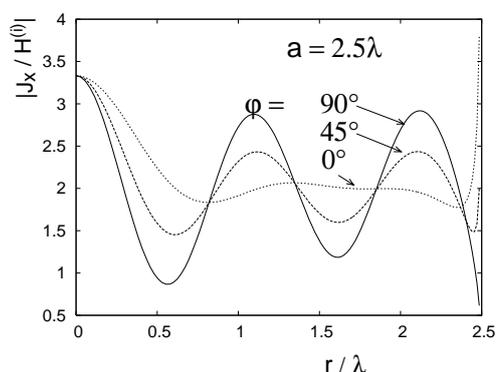


図 1.1: 円板の半径が 2.5 波長のときの倍精度での電流分布計算結果

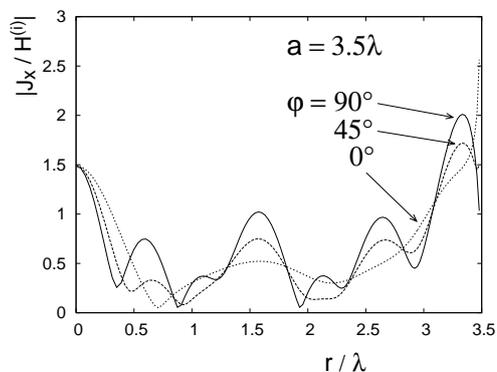


図 1.2: 円板の半径が 3.5 波長のときの倍精度での電流分布計算結果

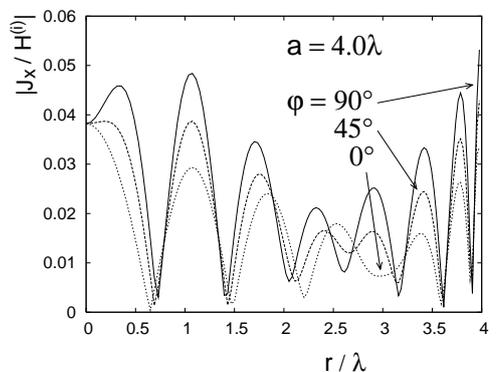


図 1.3: 円板の半径が 4.0 波長のときの倍精度での電流分布計算結果

## 1.2 本研究の歴史的背景

前述のように、平面波を波源とした円板に対する電磁波の散乱は、Nomura と Katsura が厳密に解析している [2]。そこでは、ヘルツベクトルを用いて解析すると共に、Weber-Schafheitlin の不連続積分に関する関数を用いて散乱界を展開している。さらに、精度の改善や解析の容易さのために、電磁界の表現式を級数表現している。また特に、円板の半径が1波長程度と小さい場合について数値例を示している。

水平方向に偏波した電氣的微小ダイポールを波源とした、円板に対する解析は Inawashiro が行っている [3]。そこでは、Nomura と Katsura の手法を拡張して、電磁界の表現式を級数形に変換し表しており、円板面から波源までの距離（波源の高さ）が円板の半径に比して1以下のときに発散してしまう問題を、全ての高さで収束可能な式に変換し解決している。しかし、級数展開での表現式は、波源の位置を中心軸上に限定しており、数値例も円板の半径が1波長程度と小さな場合にしか示されていない。

一方、Balaban らは導体円板に対し、任意の波源を対象として厳密解析を行っている [4, 5]。そこでは、Coupled Dual Integral Equations(CDIEs) という、円板上の電流と入射電界の接線成分の積分方程式 (DIEs) を用いて導出する方法を提案している。また、Balaban らはこの方法を厚みのある完全導体円板の解析にも応用している [6]。他方、Hongo らは、完全導体円板に対し、Dual Integral Equations(DIEs) を用いた解析を提案している [7, 8]。そこでは、式の展開に Kobayashi Potential とベクトル Hankel 変換を導入している。文献 [7] では平面波を、文献 [8] ではダイポールを想定した球面波を位置および高さを特定しない形で扱っている。さらに数値計算では、いずれの場合も波長に対して円板の半径が1波長程度と小さい場合のみとなっている。

これら厳密解法に対して任意形状が扱える近似法が考え出され、円板の問題に適用されてきた。代表的なものは、電磁波を高周波に近似する高周波近似である。その中でも物理光学近似 (Physical Optics, PO) は単純な数値積分の計算でかなりの精度が得られる高周波近似として、頻繁に使われている [9]。この近似では、完全導体を散乱体とした場合、照射領域では電流を  $2n \times H^i$  (ただし、 $n$  は境界面の外側を向く単位法線ベクトル、 $H^i$  は入射磁界)、影領域では0と近似し、主として散乱界を求める方法である。このため、物理光学近似では電流分布計算において端点付近で精度が良くないことが知られている。これに対し、回折を散乱体の局所的な形状に依ると捕らえたのが幾何光学的回折理論 (Geometrical Theory of Diffraction, GTD) である [10]。そこでは、端点での回折波が含まれ、電流分布計算での精度が改善されている。この他、物理光学的回折理論 (Physical Theory of Diffraction, PTD) では、物理光学近似に GTD と同様の回折界を導入し、GTD における幾何光学項の発散を解消している [11]。さらに、一様回折理論 (Uniform Theory of Diffraction, UTD) では、回折界に Fresnel 積分を使い、遷移領域でも発散しない工夫を行っている [12]。

これら近似法を使った円板の散乱解析に適用した例としては、平面波においては、古くは

Eggimann が完全導体円板に対して高周波近似を用いて解析している [13] . Zalipaev は平面波において, UTD を用いて解析をしている . Duan らは, ダイポール波源を対象として, PO と後述するモーメント法との比較で PTD や GTD の性能の評価を行っている [14] . 評価には 1.5 波長の円板の電流分布を用いている . さらに, 安藤らは, 特に PO や GTD などの高周波近似法を使った散乱問題を多く扱っている [15, 16, 17, 18, 19, 20, 21] . 円板に対しては, 文献 [15, 16] では平面波を扱っており, 文献 [19] では水平ダイポールを扱っている . また村崎も, 完全導体円板に対して物理光学近似を用いた散乱問題を扱っており, そこでは PO の面積分を線積分に置き換える手法を提案している [22] .

次に, 数値解法として, モーメント法 (Method of Moment)[23] や有限差分時間領域法 (Finite-Difference Time-Domain Method, FD-TD 法) [24] がある . モーメント法は電流分布を区分的な関数で展開し, 電流分布の積分方程式を展開係数に対する連立 1 次方程式に近似して解決する方法である . この方法は, アンテナ設計などに良く使われており, 適用範囲も広い . Arvas らは, 完全導体円板に対してモーメント法を用いた散乱問題の解析を行っている [25] . ここでは, 検証のために入射界を平面波およびダイポール波源として, 文献 [2] と比較しながら 0.5 波長程度の円板の電流分布計算を行っている . 一方, FD-TD 法は, Maxwell 方程式を時間・空間領域における差分方程式に展開し, 逐次その計算を行い, 過渡解析する方法である . この方法は, 高周波になるほど解析領域を細かく取る必要がある . Leoncini らはこの FD-TD 法を用いて解析を行っている [26] .

この他, Li ら [27] や Zalevsky ら [28] , Hodge[29, 30] が円板に対する解析を行っているが, いずれも 0.2 波長から 4 波長程度までの比較的小さい円板について扱っている .

以上のように, 円板の散乱・回折問題は, 完全導体円板を対象とし, 平面波および微小ダイポールを波源として, 重要な問題として多く解析が行われてきた . 歴史的には, 平面波入射の場合における厳密解析から始められたが, その数値例では, 半径が 1 から 2 波長程度の大きさの円板が扱われてきた . その後, その困難さから後に PO などの高周波近似法が適用され, またコンピュータの性能の向上とともにモーメント法や FD-TD 法などの数値解法が採用されてきた . 一般に, 高周波近似などの波長比に対する解析対象の大きさの適用範囲は良く知られており, 文献 [31] では表 1.1 のように示されている . この表のように, 高周波近似では 1 波長以上で適用が良いとされ, またモーメント法では 10 波長以下で, FD-TD 法では波長に対して非常に小さい場合および大きい場合を除いて適用が良いとされている . 一方, 厳密解析における数値例は, 先に述べたように, 1 から 2 波長程度でしか得られておらず, 10 波長程度の計算値が得られれば, 各近似法および数値解法の検証の指針となる値を得ることができる .

これまで述べたように, 導体円板における厳密解析ではまだ解決すべき課題がいくつか挙げられる . ここで, 本研究で取り挙げる具体的な課題について整理すると, 次のようになる .

表 1.1: 波長に対する各計算法の適用範囲 [31]

計算法	~ 0.1 波長	~ 1 波長	~ 10 波長	~ 100 波長	100 波長 ~
高周波近似	×	×			
モーメント法				×	×
FD-TD 法					

注) ○ : 適用可能      ◐ : 適用可能であるが適切ではない      × : 適用不可能

- 平面波
  - これまで、円板の半径が波長に比して大きい場合、特に 1 波長から 10 波長程度まで、あるいはそれ以上の円板の厳密計算結果が示されていない
- 水平方向に偏波した電氣的微小ダイポール波源
  - 級数展開の表現式に対して、波源が中心軸上の場合しか扱われていない
- 垂直方向に偏波した電氣的微小ダイポール波源
  - 波源の位置や高さを考慮した解析が未だなされていない。したがって明確に定式化が行われていない

以上のように、本研究においてこれらの課題を解決することで、近似法ではその適用範囲を確認でき、また数値解法では計算精度などの指標となる規範を与えることが可能となる。

### 1.3 本研究の技術的および社会的な意義

本論文では、平面波および水平方向に偏波した電氣的微小ダイポール、垂直方向に偏波した電氣的微小ダイポールを波源とし、完全導体円板に対する散乱・回折現象を、境界値問題として扱った厳密解法を確立することを目的とする。その際、特に、数値計算においては多倍長精度数値計算を導入して、精度良い数値解が得られる工夫をしている。

このような研究に対する技術的な意義としては、第 1 に平面波を波源とした場合では、

- 多倍長精度数値計算を導入することで、これまで得られなかった、円板の半径が波長に比して大きい場合についても、厳密に数値解を得ることができる

ことである。

第 2 に、水平方向に偏波した電氣的微小ダイポール波源とした場合では、

- 数値計算をする際に有利な級数展開形の表現式に対して、波源が中心軸上から外れている場合の表現式を導出している

- 波源の高さが波長に比して小さい場合の、収束可能な級数形式の表現を導出している
- 円板の半径が波長に比して大きい場合の数値計算結果を示している

ことが意義として挙げられる。

さらに、第 3 に、垂直方向に偏波した微小ダイポール波源とした解析では、

- これまで行われていなかった波源の位置や高さを考慮した解析を行うことで、その現象を明確にしている
- 波源の高さを考慮した級数展開による表現式を導出しており、数値計算を容易にしている
- 円板の大きさが大きい場合の数値計算結果を示している

ことが意義として挙げられる。

また、円板の大きさが 1 から 2 波長程度までの数値結果はこれまでに得られていた。それ以上の波長では平面波の場合でも、精度の良い計算結果が得られていなかった。したがって、本研究の社会的な意義としては、平面波入射をはじめとした、円板の散乱問題に対して、多倍長精度数値計算を導入することにより、円板の大きさに依らず、数値計算のできる工夫をした点である。円板の散乱問題は、規範問題として、厳密界を精度良く計算できることにより、それら結果が評価の基準として利用できる。本研究の解析手法に基づく、多倍長精度数値計算を用いた数値計算結果を指標とすることで、近似法やモーメント法、FD-TD 法などの各種手法の、円板に対する結果の精度、収束性、適用範囲などの評価が可能となり、さらに、今後開発される近似法や計算手法の発展に寄与することができる。また実用的には、近年小型化が進んでいるマイクロ波帯のパラボラアンテナについて、その設計に必要な解析に応用することもできる。

### 1.4 本論文の構成

本論文は 5 章で構成されている。第 1 章の序論に続き、第 2 章は平面波、第 3 章では水平微小ダイポール、第 4 章では垂直微小ダイポールを波源とする完全導体円板による散乱界について述べ、第 5 章で本研究の結論を述べている。

第 2 章では、平面波を波源とする完全導体円板による散乱問題の厳密解析を行っている。まず、ヘルツベクトルを導入して問題の設定を行った後、入射界と散乱界をヘルツベクトルを用いて表現している。次に、散乱界が導体円板を含む平面上の円板の外側で連続、かつ円板上での電流に応じた不連続を持つよう、Weber-Schafheitlin の不連続積分に帰着する波動関数でヘルツベクトルを展開している。その上で、境界条件から得られる円板上での散乱界

のヘルツベクトルを求めている．ここでは補助係数を導入し、ヘルツベクトルを表現して界を整合し、マトリクス方程式を解くことに帰着させることで、展開係数の決定をしている．さらに、端点条件により補助係数を決定し、その後、マトリクス方程式の係数の級数表現を導出して、導体円板上の電流分布および遠方散乱界を計算するための式を示している．数値計算にあたっては、まず、計算精度の問題を解決するために導入した多倍長精度数値計算について述べ、次にプログラムの作成を円滑にするために作成したインターフェイスについて説明している．さらに、計算精度が落ちる原因を調査し、データ長と計算精度の関係を明らかにしている．以上の検討を踏まえて、垂直入射および斜め入射における電流分布を計算している．また本手法の妥当性を示すために、別法との比較を行っている．最後に、遠方散乱界の計算を行い、物理的意味を検証している．

第3章では、水平方向に偏波した電氣的微小ダイポールを波源とする完全導体円板による散乱問題の厳密解析を行っている．問題の設定を行った後、ヘルツベクトルにより入射界と散乱界を表現している．また、第2章と問題の設定が同じであることから、展開係数と連立方程式の係数について簡単に述べた後、円板上での微小ダイポール波源の表現を整理し、それを級数表現している．これまで波源が中心軸上にある場合のみ、数値計算に利用可能な級数展開式が示されていたが、特にここでは、任意の位置に対応できるように級数展開式を定式化している．その際、波源の高さが低いときに式が収束しない場合があり、それに対応する定式化を行っている．また、ここでも級数展開式の計算において、精度が落ちる原因を調査するとともに、その収束性も検討している．これらの結果を踏まえて、まず、波源が中心軸上の場合には、これまで得られていなかった波長に比して大きい円板の電流分布計算を行っている．次に、波源が中心軸上から外れた場合の電流分布計算を行うと共に、別法と比較し、その妥当性を検証している．

第4章では、垂直方向に偏波した電氣的微小ダイポールを波源とする完全導体円板による散乱問題の厳密解析を行っている．まず、問題の設定を行い、ヘルツベクトルによる入射界と散乱界の表現を求めた後、円板上での微小ダイポールの表現を導出している．次に、境界条件から得られる円板上でのヘルツベクトルを求め、導体円板上での界の整合を行っている．ここでは第2章と異なり、境界条件の下で得られた非斉次微分方程式の解を、散乱界と整合している．その後、端点条件により補助係数を決定し、入射波に係する式を級数展開している．その際、まず、波源と円板との距離が半径より大きい場合に収束する級数表現式を導出し、次に、その距離が小さい場合に収束する定式化を行っている．さらに、その級数展開式の収束性を検討するとともに、波長に対する円板の大きさとデータ長との関係を明らかにしている．最後に、波源が中心軸上にある場合の電流分布計算を行った後、別法と比較し、その妥当性を検証している．

第5章では、本論文の結論を述べている．ここではこれまでに得られた結果をまとめるとともに、今後の課題について述べている．

## 参考文献

- [1] 穴田ら , “マイクロ波シミュレータ評価のための規範的問題作り ;” 電子情報通信学会技術報告, MW98-79 , pp.31 - 34 , 1998.
- [2] Y. Nomura, and S. Katsura, “Diffraction of electromagnetic waves by circular plate and circular hole,” J. Physical Society of Japan, vol.10, no.4, pp.285-304, Apr 1955.
- [3] S. Inawashiro, “Diffraction of electromagnetic waves from an electric dipole by a conducting circular disc,” J. Physical Society of Japan, vol.18, no.2, pp.273-287, Feb. 1963.
- [4] M.V. Balaban, A.I. Nosich, A. Altintas, and T.M. Benson, “The method of analytical regularization in the electromagnetic wave scattering by thin disks,” Antennas and Propagation, 2007. EuCAP 2007. The Second European Conference, pp.1-5, 2007.
- [5] M.V. Balaban, R. Sauleau, T.M. Benson, and A.I. Nosich, “Dual integral equations technique in electromagnetic wave scattering by thin disks,” Progress In Electromagnetics Research B, vol.16, pp.107-126, 2009.
- [6] M.V. Balaban, R. Sauleau, T.M. Benson, and A.I. Nosich, “Modification of the power radiated by an electrical dipole in the presence of a thin dielectric disk,” 2010 International Conference on Advanced Optoelectronics and Lasers (CAOL), pp.133-135, 2010.
- [7] K. Hongo, and Q.A. Naqvi, “Diffraction of electromagnetic wave by disk and circular hole in a perfectly plane,” Progress In Electromagnetics Research, vol.68, pp.113-150, 2007.
- [8] K. Hongo, A.D.U. Jafri, and Q.A. Naqvi, “Scattering of electromagnetic spherical wave by a perfectly conducting disk,” Progress In Electromagnetics Research, vol.129, pp.315-343, 2012.
- [9] S. Silver, Microwave Antenna Theory and Design, McGraw-Hill Co. Inc, 1949.
- [10] J.B. Keller, “Geometrical theory of diffraction,” J. Optical Society America, vol.52, no.2, pp.116-130, Feb. 1962.

- 
- [11] P.Y. Ufimtsev, Method of edge waves in the physical theory of diffraction, Foreign Technology Div, Wright-Patterson AFB, OH, Sep. 1972.
- [12] R. G.Kouyoumjian, and P. H.Pathak, "A uniform geometrical theory of diffraction for an edge in a perfectly conductive surface," Proc. IEEE, vol.62, no.11, pp.1448-1461, Nov. 1974.
- [13] W.H. Eggimann, "Higher-order evaluation of electromagnetic diffraction by circular disks," IRE Transactions on Microwave Theory and Techniques, vol.9, no.5, pp.408-418, 1961.
- [14] D. Duan, Y. Rahmat-Samii, and J. Mahon, "Scattering from a circular disk: A comparative study of PTD and GTD techniques," Progress In Electromagnetics Research, vol.20, pp.101-123, 1998.
- [15] M. Ando, "PO and PTD analyses of offset reflector antenna patterns," 1988 AP-S Antennas and Propagation Society International Symposium, vol.1, pp.112 - 115, 1988.
- [16] S. Cui, K. Sakina, and M. Ando, "A mathematical proof of physical optics equivalent edge currents based upon the path of most rapid phase variation," IEICE TRANS. on Electronics, vol.E83-C, no.4, pp.659 - 663, Apr. 2000.
- [17] T. Shijo, T. Itoh, and M. Ando, "Visualization of high frequency diffraction based on physical optics," IEICE TRANS. on Electronics, vol.E87-C, no.9, pp.1607-1614, Sep. 2004.
- [18] L. Rodriguez, K. Yukimasa, J. Goto, T. Shijo, and M. Ando, "Geometrical optics terms calculated by a PO-MER line integration methodology," 2005 IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium, pp.155-158, 2005.
- [19] T. Shijo, L. Rodriguez, and M. Ando, "Accuracy demonstration of physical optics with modified surface-normal vectors," IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium 2006, pp.1873-1876, 2006.
- [20] T. Shijo, L. Rodriguez, and M. Ando, "The modified surface-normal vectors in the physical optics," IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol.AP-56, no.12, pp.3714 - 3722, Dec. 2008.
- [21] P. Lu, and M. Ando, "Discussions of differences between scattering geometrical optics and line integral of modified edge representation," 2011 IEEE International Conference

- on Microwave Technology & Computational Electromagnetics (ICMTCE), pp.376-379, 2011.
- [22] 村崎勉, “平板散乱問題における物理光学放射面積分の境界積分への変換,” 電子情報通信学会技術報告 A・P, アンテナ・伝播, vol.101, no.50, pp.1-7, Nov. 2001.
- [23] R.F. Harrington, Field Computation by Moment Methods, Wiley-IEEE Press, 1993.
- [24] S. Taflove, Computational Electrodynamics The Finite-Difference Time-Domain Method, Artech House, Boston, London, 1995.
- [25] E. Arvas, R.F. Harrington, and J.R. Mautz, “Radiation and scattering from electrically small conducting bodies of arbitrary shape,” IEEE Trans. Antennas and Propagation, vol.AP-34, no.1, pp.66-77, Jan. 1986.
- [26] M. Leoncini, S. Maci, and A. Toccafondi, “Analysis of electromagnetic scattering by artificially soft disk,” IEE Proc.-MicrowTrans. Antenna Propagation., vol.142, no.5, pp.399-404, Oct. 1995.
- [27] L.W. Li, P.S. Kooi, Y.L. Qiu, T.S. Yeo, and M.S. Leong, “Analysis of electromagnetic scattering of conducting circular disk using a hybrid method,” Proceeding of the IEEE, vol.79, no.10, pp.1472-1480, Oct. 1991.
- [28] G.S. Zalevsky, S. Nechitaylo, O. Sukharevsky, and I. Sukharevsky, “Em wave scattering by perfectly conducting disk of finite thickness,” 2010 International Conference on Mathematical Methods in Electromagnetic Theory, pp.1-4, Sep. 2010.
- [29] D. Hodge, “Spectral and transient response of a circular disk to plane electromagnetic waves,” IEEE Trans. Antennas and Propagation, vol.AP-19, no.4, pp.558 - 561, Jul. 1971.
- [30] D. Hodge, “Scattering by circular metallic disks,” IEEE Trans. Antennas and Propagation, vol.AP-28, no.5, pp.707-712, Sep. 1980.
- [31] K. Umashankar, and A. Taflove, Computational Electromagnetics, Artech House, Boston, London, 1993.

# 第2章 平面波を波源とする完全導体円板による散乱

## 2.1 はじめに

本章では，平面波を波源とする完全導体円板による電磁波散乱問題を扱う．この問題は，Nomura と Katsura[1] によって，厳密な解析が行われている．その解析方法は，散乱界が導体円板の外側で連続，かつ円板上で電流に応じた不連続を持つよう Weber-Schafheitlin の不連続積分に帰着する波動関数でヘルツベクトルを展開している．そこでは，境界条件と端点条件より展開係数を決定しており，解析過程で得られるマトリクス方程式の係数を積分形式から級数展開形式に変換し，厳密に解析している．

この解析手法にしたがって，散乱界を数値計算しようとした場合，一般的なプログラミング言語で使われる変数が持つ倍精度の計算では，第1章で述べたように，円板の半径が2.5～3波長程度まででしか良好な計算結果が得られない．この原因は，計算過程で精度が十分でないことが考えられる．

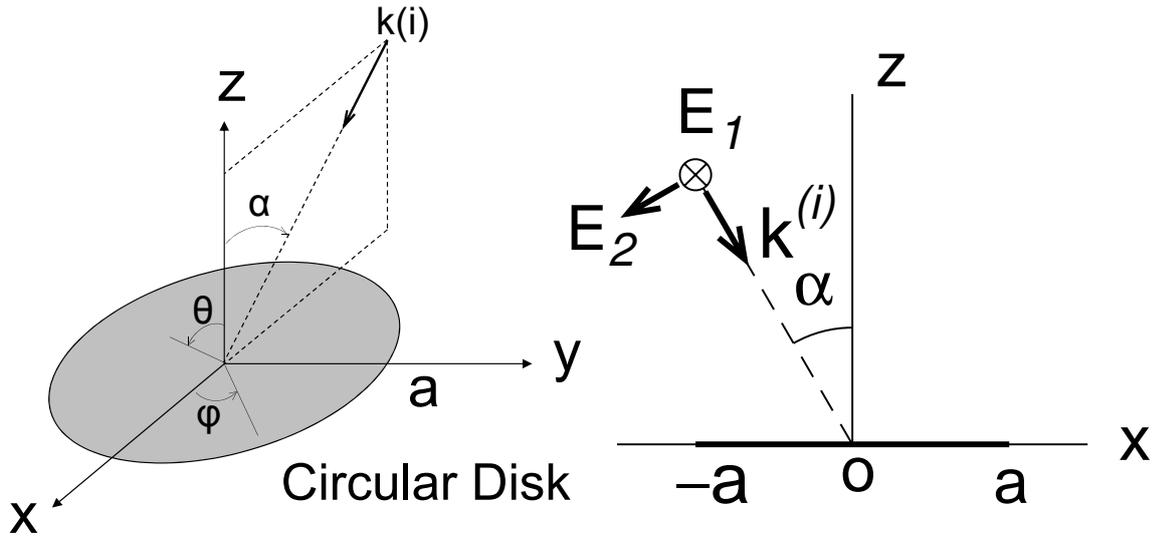
本章では，平面波を波源とする完全導体円板に対する散乱の解析を行い，計算精度を考慮する上で多倍長精度計算法を適用して，従来法では良好な計算結果が得られなかった原因を探る．さらに，ここでは，電流分布を数値計算して別法との比較を行い，その物理的な考察をすると共に，数値計算の妥当性を確認し，その後遠方散乱界を示す．

なお，本論文では電磁界の時間変化を  $e^{j\omega t}$  とし以下では省略する．さらに，これ以降，誘電率を  $\varepsilon$ ，透磁率を  $\mu$ ，波数を  $k(= \omega\sqrt{\mu\varepsilon})$ ，波長を  $\lambda(= 2\pi/k)$ ，空間の固有インピーダンスを  $\eta(= \sqrt{\mu/\varepsilon})$  と表して，説明を省略する．

## 2.2 問題の設定

図2.1(a)のように，原点を中心として  $x$ - $y$  平面 ( $z = 0$ ) に置かれた半径  $a$  の非常に薄い完全導体円板に平面波が入射した場合の散乱界を求める．また，入射平面波は，図2.1(b)のように， $x$ - $z$  平面内を  $z$  軸から測って負の  $x$  軸方向に  $\alpha$  の方向から原点へ到来するものとし，平面波の波数ベクトルを

$$\mathbf{k}^{(i)} = k(\sin \alpha, 0, -\cos \alpha)$$



(a) 導体円板 (半径  $a$ , 厚み  $0$ ) (b) 平面波の座標系

図 2.1: 導体円板と入射平面波の座標系

とする．入射波の電界  $E^{(i)}$  と磁界  $H^{(i)}$  は

$$E^{(i)} = (-E_2 \cos \alpha, E_1, -E_2 \sin \alpha) e^{jk(-x \sin \alpha + z \cos \alpha)} \quad (2.1)$$

$$H^{(i)} = -\frac{1}{j\omega\mu} \nabla \times E^{(i)} \quad (2.2)$$

と表すことができる．ただし， $E_1$  は  $y$  軸と平行な成分， $E_2$  は垂直な成分である．

ここでは，電界  $E$  および磁界  $H$  を入射界  $E^{(i)}$ ， $H^{(i)}$  と散乱界  $E^{(s)}$ ， $H^{(s)}$  に分けて，

$$E = E^{(i)} + E^{(s)} \quad (2.3)$$

$$H = H^{(i)} + H^{(s)} \quad (2.4)$$

とし，散乱界を求めることにする．

付録 A.1 に示すように，解析の容易さからヘルツベクトルを導入する．入射界の電氣的ヘルツベクトルを  $\Pi^{(i)}$ ，散乱界の電氣的ヘルツベクトルを  $\Pi^{(s)}$  とすると，界全体の電氣的ヘルツベクトル  $\Pi$  は，

$$\Pi = \Pi^{(i)} + \Pi^{(s)} \quad (2.5)$$

と表すことができる．

このヘルツベクトルを用いることで，式 (A.1)，(A.2) より，電界および磁界は次のように表すことができる．

$$E = \nabla(\nabla \cdot \Pi) + k^2 \Pi \quad (2.6)$$

$$H = j\omega\epsilon \nabla \times \Pi \quad (2.7)$$

ここでヘルツベクトル  $\Pi$  は、Helmholtz 方程式

$$\nabla^2 \Pi + k^2 \Pi = 0 \quad (2.8)$$

を満足し、さらに電界の  $x, y$  成分  $E_x, E_y$  および磁界の  $z$  成分  $H_z$  に対する境界条件

$$E_x = E_x^{(i)} + E_x^{(s)} = 0 \quad (2.9)$$

$$E_y = E_y^{(i)} + E_y^{(s)} = 0 \quad (2.10)$$

$$H_z = H_z^{(i)} + H_z^{(s)} = 0 \quad (z = 0, \sqrt{x^2 + y^2} < a) \quad (2.11)$$

と、式 (A.6), (A.8) より、磁界の  $H_\varphi, H_\theta$  成分に対する端点条件

$$H_\varphi = O(\delta^{\frac{1}{2}}) \quad (2.12)$$

$$H_\theta = O(\delta^{-\frac{1}{2}}) \quad (\delta = \sqrt{(a - \sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2} \rightarrow 0) \quad (2.13)$$

を満足する。

## 2.3 解析

本章では、Nomura と Katsura[1] の手法に従って、数式表現などの表記を整理しながら電磁界の解析方法について述べる。なお、ここでの解析結果の一部は、次章の水平微小ダイポール、第4章の垂直微小ダイポールの解析で使われるため、ここで詳しく述べる。

### 2.3.1 ヘルツベクトルによる入射界と散乱界の表現

入射界の電氣的ヘルツベクトル  $\Pi^{(i)}$  は、 $x, y$  成分のみで、

$$\Pi^{(i)} = (\Pi_x^{(i)}, \Pi_y^{(i)}, 0) \quad (2.14)$$

と表すことができる。これら入射波の各成分をヘルツベクトルを用いて表すと、

$$\Pi_x^{(i)} = -\frac{E_2}{k^2 \cos \alpha} e^{jk(-x \sin \alpha + z \cos \alpha)} \quad (2.15)$$

$$\Pi_y^{(i)} = \frac{E_1}{k^2} e^{jk(-x \sin \alpha + z \cos \alpha)} \quad (2.16)$$

と記述できる。

次に、導体円板上の誘導電流は  $z$  成分を持たないので、散乱界も  $x$  および  $y$  成分のみを持つ電氣的ヘルツベクトルを用い、

$$\Pi^{(s)} = (\Pi_x^{(s)}, \Pi_y^{(s)}, 0) \quad (2.17)$$

と表すことができ、散乱界のヘルツベクトルは、

$$\Pi_x^{(s)} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_n S_m^n(r, z) \{A_m^n \cos n\varphi + B_m^n \sin n\varphi\} \quad (2.18)$$

$$\Pi_y^{(s)} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_n S_m^n(r, z) \{C_m^n \cos n\varphi + D_m^n \sin n\varphi\} \quad (2.19)$$

$$\Pi_z^{(s)} = 0 \quad (2.20)$$

と展開できる。ただし、 $S_m^n(r, z)$  は文献 [1] で示されている波動方程式の固有関数で、導体円板表面を除いて、導関数も含めて連続な性質を持っており、

$$S_m^n(r, z) = \int_0^{\infty} \frac{\sqrt{\xi} J_n(r\xi/a) J_{n+m+\frac{1}{2}}(\xi)}{\sqrt{\xi^2 - (ka)^2}} \exp\left[-\sqrt{\xi^2 - (ka)^2} \frac{|z|}{a}\right] d\xi \quad (2.21)$$

と表される。さらに、 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 、 $\varphi = \tan^{-1}(y/x)$  であり、式中の  $\epsilon_n$  は、

$$\epsilon_n = \begin{cases} 1 & (n = 0) \\ 2 & (n \neq 0) \end{cases}$$

である。また  $A_m^n, B_m^n, C_m^n, D_m^n$  は展開係数であり、

$$B_m^0 = D_m^0 = 0$$

としておく。

### 2.3.2 境界条件から得られる導体円板上でのヘルツベクトル

まず、 $z = 0$ 、 $r < a$  での境界条件を満足する散乱界のヘルツベクトルを求める。境界条件式 (2.9)、(2.10) より、入射電界と散乱電界の接線成分の和は導体円板上で 0 でなければならない。このために、 $z = 0$ 、 $r < a$  での散乱界のヘルツベクトル  $\Pi_x^{(s)}$ 、 $\Pi_y^{(s)}$  を波源からの界を打ち消す項と補正項に分割して、

$$\Pi_x^{(s)} = \Pi_{2x} - \Pi_x^{(i)} \quad (2.22)$$

$$\Pi_y^{(s)} = \Pi_{2y} - \Pi_y^{(i)} \quad (2.23)$$

と置き、式 (2.6)、(2.7) に適用し、境界条件式 (2.9) から (2.11) に代入して次のように整理する。

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Pi_{2x}}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_{2y}}{\partial y} \right) + k^2 \Pi_{2x} = 0 \quad (2.24)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \Pi_{2x}}{\partial x} + \frac{\partial \Pi_{2y}}{\partial y} \right) + k^2 \Pi_{2y} = 0 \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial \Pi_{2y}}{\partial x} - \frac{\partial \Pi_{2x}}{\partial y} = 0 \quad (2.26)$$

また，式 (2.26) より， $(\Pi_{2x}, \Pi_{2y})$  は任意のスカラー関数  $U(x, y)$  を用いて，

$$(\Pi_{2x}, \Pi_{2y}) = \nabla_t U(x, y) \quad (2.27)$$

と表すことができる．ただし， $\nabla_t = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$  である．これを式 (2.24), (2.25) に代入して整理すると，

$$\frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial y^2} + k^2 U(x, y) \right\} = 0 \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial y^2} + k^2 U(x, y) \right\} = 0 \quad (2.29)$$

となるので， $U(x, y)$  についての微分方程式として，

$$\frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial y^2} + k^2 U(x, y) = C \quad (2.30)$$

を得る．ただし  $C$  は任意の定数である．

次に，式 (2.22), (2.23) を式 (2.18), (2.19) と整合する．まず，式 (2.30) を円筒座標系で表すと，

$$\frac{\partial^2 U(r, \varphi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial U(r, \varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U(r, \varphi)}{\partial \varphi^2} + k^2 U(r, \varphi) = C \quad (2.31)$$

を得る．さらに， $r = 0$  で有界な解は，付録 A.3 の式 (A.9) より

$$U(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n J_n(kr) \{ U_n^{(e)} \cos n\varphi + U_n^{(o)} \sin n\varphi \} \quad (2.32)$$

と表される． $J_n(z)$  は  $n$  次の Bessel 関数を表す．ここで， $U_n^{(e,o)}$  は任意の定数であり，導関数が零となりヘルツベクトルに影響しないので定数  $C$  は除いている．

また，この  $U(x, y)$  を用いると，式 (2.22), (2.23), (2.27) より， $z = 0, r < a$  での散乱界のヘルツベクトルは，

$$\Pi_x^{(s)} = \frac{\partial U(x, y)}{\partial x} - \Pi_x^{(i)}(x, y, 0) \quad (2.33)$$

$$\Pi_y^{(s)} = \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} - \Pi_y^{(i)}(x, y, 0) \quad (2.34)$$

と表すことができる．これら式の第 1 項は，式 (A.14), (A.15) よりそれぞれ

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= \frac{\partial U}{\partial r} \cos \varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \sin \varphi \\ &= \frac{k}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n J_n(kr) \left[ (U_{n+1}^{(e)} - U_{n-1}^{(e)}) \cos n\varphi + (U_{n+1}^{(o)} - U_{n-1}^{(o)}) \sin n\varphi \right] \end{aligned} \quad (2.35)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial y} &= \frac{\partial U}{\partial r} \sin \varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \cos \varphi \\ &= \frac{k}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n J_n(kr) \left[ (U_{n+1}^{(o)} + U_{n-1}^{(o)}) \cos n\varphi - (U_{n+1}^{(e)} + U_{n-1}^{(e)}) \sin n\varphi \right] \end{aligned} \quad (2.36)$$

となる．ただし，

$$U_{-1}^{(e)} = -U_1^{(e)}, \quad U_{-1}^{(o)} = U_1^{(o)}, \quad U_0^{(o)} = 0$$

である．また第 2 項の入射界  $\Pi_x^{(i)}(x, y, 0)$ ,  $\Pi_y^{(i)}(x, y, 0)$  は，式 (2.15), (2.16) をフーリエ級数展開し，

$$\Pi_x^{(i)}(x, y, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \left[ \Pi_x^{(i)(e)} \cos n\varphi + \Pi_x^{(i)(o)} \sin n\varphi \right] \quad (2.37)$$

$$\Pi_y^{(i)}(x, y, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \left[ \Pi_y^{(i)(e)} \cos n\varphi + \Pi_x^{(i)(o)} \sin n\varphi \right] \quad (2.38)$$

と表す．ただし， $\Pi_x^{(i)(e,o)}$ ,  $\Pi_y^{(i)(e,o)}$  は，それぞれ  $x, y$  の偶関数および奇関数成分の係数である．以上より，円筒座標系を用いた式 (2.33), (2.34) の円板上でのヘルツベクトルは次のように表現できる．

$$\begin{aligned} \Pi_x^{(s)} &= - \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \left[ \Pi_x^{(i)(e)} \cos n\varphi + \Pi_x^{(i)(o)} \sin n\varphi \right] \\ &\quad + \frac{k}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n J_n(kr) \left[ (U_{n+1}^{(e)} - U_{n-1}^{(e)}) \cos n\varphi + (U_{n+1}^{(o)} - U_{n-1}^{(o)}) \sin n\varphi \right] \end{aligned} \quad (2.39)$$

$$\begin{aligned} \Pi_y^{(s)} &= - \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \left[ \Pi_y^{(i)(e)} \cos n\varphi + \Pi_x^{(i)(o)} \sin n\varphi \right] \\ &\quad + \frac{k}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n J_n(kr) \left[ (U_{n+1}^{(o)} + U_{n-1}^{(o)}) \cos n\varphi - (U_{n+1}^{(e)} + U_{n-1}^{(e)}) \sin n\varphi \right] \end{aligned} \quad (2.40)$$

### 2.3.3 導体円板上での界の整合

ここで，展開係数を決定するために，式 (2.18), (2.19) と式 (2.39), (2.40) を  $z = 0$  で整合する．

式 (2.18), (2.19) を  $z = 0$  と置き，(2.39) と (2.40) に代入すると，

$$\begin{aligned} &\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_n S_m^n(r, 0) \{A_m^n \cos n\varphi + B_m^n \sin n\varphi\} \\ &= - \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \left[ \Pi_x^{(i)(e)} \cos n\varphi + \Pi_x^{(i)(o)} \sin n\varphi \right] \\ &\quad + \frac{k}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n J_n(kr) \left[ (U_{n+1}^{(e)} - U_{n-1}^{(e)}) \cos n\varphi + (U_{n+1}^{(o)} - U_{n-1}^{(o)}) \sin n\varphi \right] \end{aligned} \quad (2.41)$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_n S_m^n(r, 0) \{C_m^n \cos n\varphi + D_m^n \sin n\varphi\} \\
&= - \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \left[ \Pi_{y_n}^{(i)(e)} \cos n\varphi + \Pi_{x_n}^{(i)(o)} \sin n\varphi \right] \\
&\quad + \frac{k}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n J_n(kr) \left[ (U_{n+1}^{(o)} + U_{n-1}^{(o)}) \cos n\varphi - (U_{n+1}^{(e)} + U_{n-1}^{(e)}) \sin n\varphi \right] \quad (r < a)
\end{aligned} \tag{2.42}$$

と書くことができる．したがって，フーリエ級数に展開した各成分について，

$$\sum_{m=0}^{\infty} A_m^n S_m^n(r, 0) = -\Pi_{x_n}^{(i)(e)} + \frac{k}{2}(U_{n+1}^{(e)} - U_{n-1}^{(e)})J_n(kr) \tag{2.43}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} B_m^n S_m^n(r, 0) = -\Pi_{x_n}^{(i)(o)} + \frac{k}{2}(U_{n+1}^{(o)} - U_{n-1}^{(o)})J_n(kr) \tag{2.44}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} C_m^n S_m^n(r, 0) = -\Pi_{y_n}^{(i)(e)} + \frac{k}{2}(U_{n+1}^{(o)} + U_{n-1}^{(o)})J_n(kr) \tag{2.45}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} D_m^n S_m^n(r, 0) = -\Pi_{y_n}^{(i)(o)} - \frac{k}{2}(U_{n+1}^{(e)} + U_{n-1}^{(e)})J_n(kr) \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots) \tag{2.46}$$

と， $A_m^n$  から  $D_m^n$  についての方程式が得られる．

次に展開係数  $A_m^n$  などの決定方法について検討する．以下，簡単のために

$$ka = \gamma, \quad \left(\frac{r}{a}\right)^2 = t$$

と表す．付録 A.5 に示す，Jacobi の多項式に関連した

$$u_m^n(t) = t^{-n/2} \int_0^{\infty} \frac{J_n(\xi\sqrt{t})J_{n+2m+\frac{1}{2}}(\xi)}{\sqrt{\xi}} d\xi \tag{2.47}$$

を用いて，方程式 (2.43)–(2.46) の両辺を  $0 < t < 1$  の範囲で整合する．この  $u_m^n(t)$  は  $0 < t < 1$  において  $m$  に関して直交完備な関数列である．

式 (2.43)–(2.46) の両辺に，

$$\frac{\Gamma(n+\ell+1)\Gamma(\ell+1)}{\Gamma(n+\ell+\frac{1}{2})\Gamma(\ell+\frac{1}{2})} \frac{t^{n/2}}{\sqrt{1-t}} \times u_\ell^n(t) \quad (\ell = 0, 1, 2, \dots) \tag{2.48}$$

を掛け， $0 < t < 1$  で積分する．すると，

$$\sum_{m=0}^{\infty} G_{\ell,m}^n A_m^n = \Pi_{x_\ell}^{(e)n} + \frac{k}{2}(U_{n+1}^{(e)} - U_{n-1}^{(e)})f_\ell^n \tag{2.49}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} G_{\ell,m}^n B_m^n = \Pi_{x_\ell}^{(o)n} + \frac{k}{2}(U_{n+1}^{(o)} - U_{n-1}^{(o)})f_\ell^n \tag{2.50}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} G_{\ell,m}^n C_m^n = \Pi_{y_\ell}^{(e)n} + \frac{k}{2}(U_{n+1}^{(o)} + U_{n-1}^{(o)})f_\ell^n \tag{2.51}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} G_{\ell,m}^n D_m^n = \Pi_{y_\ell}^{(o)n} - \frac{k}{2}(U_{n+1}^{(e)} + U_{n-1}^{(e)})f_\ell^n \tag{2.52}$$

と展開係数  $A_m^n$  から  $D_m^n$  に関する連立方程式が得られる．ただし，

$$G_{\ell,m}^n = \frac{\Gamma(n+\ell+1)\Gamma(\ell+1)}{\Gamma(n+\ell+\frac{1}{2})\Gamma(\ell+\frac{1}{2})} \int_0^\infty \frac{\sqrt{\xi} J_{n+2m+\frac{1}{2}}(\xi)}{\sqrt{\xi^2-\gamma^2}} \left\{ \int_0^1 \frac{t^{n/2} J_n(\xi\sqrt{t})}{\sqrt{1-t}} \times u_\ell^n(t) dt \right\} d\xi \quad (2.53)$$

$$\Pi_x^{(e,o)\ell n} = -\frac{\Gamma(n+\ell+1)\Gamma(\ell+1)}{\Gamma(n+\ell+\frac{1}{2})\Gamma(\ell+\frac{1}{2})} \int_0^1 \frac{t^{n/2}}{\sqrt{1-t}} u_\ell^n(t) \Pi_x^{(i)\ell n(e,o)} dt \quad (2.54)$$

$$\Pi_y^{(e,o)\ell n} = -\frac{\Gamma(n+\ell+1)\Gamma(\ell+1)}{\Gamma(n+\ell+\frac{1}{2})\Gamma(\ell+\frac{1}{2})} \int_0^1 \frac{t^{n/2}}{\sqrt{1-t}} u_\ell^n(t) \Pi_y^{(i)\ell n(e,o)} dt \quad (2.55)$$

$$f_\ell^n = \frac{\Gamma(n+\ell+1)\Gamma(\ell+1)}{\Gamma(n+\ell+\frac{1}{2})\Gamma(\ell+\frac{1}{2})} \int_0^1 \frac{t^{n/2}}{\sqrt{1-t}} u_\ell^n(t) J_n(\gamma\sqrt{t}) dt \quad (2.56)$$

である．式 (2.49) から (2.52) をマトリクス方程式で表現すると，

$$[G_{\ell,m}^n] [A_m^n] = \left[ \Pi_x^{(e)\ell n} \right] + \frac{k}{2} (U_{n+1}^{(e)} - U_{n-1}^{(e)}) [f_m^n] \quad (2.57)$$

$$[G_{\ell,m}^n] [B_m^n] = \left[ \Pi_x^{(o)\ell n} \right] + \frac{k}{2} (U_{n+1}^{(o)} - U_{n-1}^{(o)}) [f_m^n] \quad (2.58)$$

$$[G_{\ell,m}^n] [C_m^n] = \left[ \Pi_y^{(e)\ell n} \right] + \frac{k}{2} (U_{n+1}^{(o)} + U_{n-1}^{(o)}) [f_m^n] \quad (2.59)$$

$$[G_{\ell,m}^n] [D_m^n] = \left[ \Pi_y^{(o)\ell n} \right] - \frac{k}{2} (U_{n+1}^{(e)} + U_{n-1}^{(e)}) [f_m^n] \quad (2.60)$$

となる．これらの両辺に  $[G_{\ell,m}^n]$  の逆マトリクスを掛けると，

$$[A_m^n] = [\widetilde{A}_m^n] + \frac{k}{2} (U_{n+1}^{(e)} - U_{n-1}^{(e)}) [\widetilde{f}_m^n] \quad (2.61)$$

$$[B_m^n] = [\widetilde{B}_m^n] + \frac{k}{2} (U_{n+1}^{(o)} - U_{n-1}^{(o)}) [\widetilde{f}_m^n] \quad (2.62)$$

$$[C_m^n] = [\widetilde{C}_m^n] + \frac{k}{2} (U_{n+1}^{(o)} + U_{n-1}^{(o)}) [\widetilde{f}_m^n] \quad (2.63)$$

$$[D_m^n] = [\widetilde{D}_m^n] - \frac{k}{2} (U_{n+1}^{(e)} + U_{n-1}^{(e)}) [\widetilde{f}_m^n] \quad (2.64)$$

となり，未定である  $U_n^{(e,o)}$  を除いて展開係数が求まる．ただし，

$$[\widetilde{A}_m^n] = [G_{\ell,m}^n]^{-1} \left[ \Pi_x^{(e)\ell n} \right] \quad (2.65)$$

$$[\widetilde{B}_m^n] = [G_{\ell,m}^n]^{-1} \left[ \Pi_x^{(o)\ell n} \right] \quad (2.66)$$

$$[\widetilde{C}_m^n] = [G_{\ell,m}^n]^{-1} \left[ \Pi_y^{(e)\ell n} \right] \quad (2.67)$$

$$[\widetilde{D}_m^n] = [G_{\ell,m}^n]^{-1} \left[ \Pi_y^{(o)\ell n} \right] \quad (2.68)$$

$$[\widetilde{f}_m^n] = [G_{\ell,m}^n]^{-1} [f_m^n] \quad (2.69)$$

である．なお，数値計算においては式 (2.65)-(2.69) を有限項で打ち切って計算を行う．

### 2.3.4 端点条件による補助係数の決定

まず，端点条件を使って未定である式 (2.61)-(2.64) に含まれる補助係数  $U_n^{(e,o)}$  を決定する．ここで， $\Pi_x^{(s)}$ ， $\Pi_y^{(s)}$  のフーリエ級数展開を

$$\Pi_x^{(s)} = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \left\{ \Pi_{x_n}^{(s)(e)} \cos n\varphi + \Pi_{x_n}^{(s)(o)} \sin n\varphi \right\} \quad (2.70)$$

$$\Pi_y^{(s)} = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \left\{ \Pi_{y_n}^{(s)(e)} \cos n\varphi + \Pi_{y_n}^{(s)(o)} \sin n\varphi \right\} \quad (2.71)$$

とし， $H_\varphi^{(s)}$  のフーリエ級数展開を

$$H_\varphi^{(s)} = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \left\{ H_{\varphi_n}^{(s)(e)} \cos n\varphi + H_{\varphi_n}^{(s)(o)} \sin n\varphi \right\} \quad (2.72)$$

としておく．式 (2.70)，(2.71) の  $\Pi_{x,y_n}^{(s)(e,o)}$  は，式 (2.18)，(2.19) の  $\Pi_x^{(s)}$ ， $\Pi_y^{(s)}$  を使うと，

$$\Pi_{x_n}^{(s)(e)} = \sum_{m=0}^{\infty} A_m^n S_m^n(r, z) \quad (2.73)$$

$$\Pi_{x_n}^{(s)(o)} = \sum_{m=0}^{\infty} B_m^n S_m^n(r, z) \quad (2.74)$$

$$\Pi_{y_n}^{(s)(e)} = \sum_{m=0}^{\infty} C_m^n S_m^n(r, z) \quad (2.75)$$

$$\Pi_{y_n}^{(s)(o)} = \sum_{m=0}^{\infty} D_m^n S_m^n(r, z) \quad (2.76)$$

と表される．

磁界のヘルツベクトル式 (2.7) より，磁界成分  $H_\varphi^{(s)}$  は，

$$\begin{aligned} H_\varphi^{(s)} &= -H_x^{(s)} \sin \varphi + H_y^{(s)} \cos \varphi \\ &= j\omega\epsilon \frac{\partial}{\partial z} (\Pi_y^{(s)} \sin \varphi + \Pi_x^{(s)} \cos \varphi) \\ &= j\omega\epsilon \frac{\partial \Pi_r^{(s)}}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.77)$$

と表される．ただし， $\Pi_r^{(s)}$  は，

$$\Pi_r^{(s)} = \Pi_x^{(s)} \cos \varphi + \Pi_y^{(s)} \sin \varphi \quad (2.78)$$

である．式 (A.31) より，式 (2.78) は，

$$\begin{aligned} \Pi_r^{(s)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \left\{ \left( \Pi_{x_{n-1}}^{(s)(e)} + \Pi_{x_{n+1}}^{(s)(e)} - \Pi_{y_{n-1}}^{(s)(o)} + \Pi_{y_{n+1}}^{(s)(o)} \right) \cos n\varphi \right. \\ &\quad \left. + \left( \Pi_{x_{n-1}}^{(s)(o)} + \Pi_{x_{n+1}}^{(s)(o)} + \Pi_{y_{n-1}}^{(s)(e)} - \Pi_{y_{n+1}}^{(s)(e)} \right) \sin n\varphi \right\} \end{aligned} \quad (2.79)$$

と表される．ただし，

$$\Pi_{x,y_0}^{(s)(o)} = 0, \quad \Pi_x^{(s)(e)} = \Pi_x^{(s)(e)}, \quad \Pi_y^{(s)(o)} = -\Pi_y^{(s)(o)}$$

である．次に式 (2.79) を (2.77) に代入し，式 (2.73)-(2.76) の関係を利用すると，式 (2.72) の  $H_{\varphi_n}^{(e)}$  および  $H_{\varphi_n}^{(o)}$  は，

$$\begin{aligned} H_{\varphi_n}^{(e)} &= j\omega\varepsilon \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \frac{\partial \Pi_x^{(s)(e)}{}_{n-1}}{\partial z} + \frac{\partial \Pi_x^{(s)(e)}{}_{n+1}}{\partial z} - \frac{\partial \Pi_y^{(s)(o)}{}_{n-1}}{\partial z} + \frac{\partial \Pi_y^{(s)(o)}{}_{n+1}}{\partial z} \right\} \\ &= j\omega\varepsilon \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ A_m^{n-1} \frac{\partial S_m^{n-1}(r, z)}{\partial z} + A_m^{n+1} \frac{\partial S_m^{n+1}(r, z)}{\partial z} - D_m^{n-1} \frac{\partial S_m^{n-1}(r, z)}{\partial z} + D_m^{n+1} \frac{\partial S_m^{n+1}(r, z)}{\partial z} \right\} \end{aligned} \quad (2.80)$$

$$\begin{aligned} H_{\varphi_n}^{(o)} &= j\omega\varepsilon \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ \frac{\partial \Pi_x^{(s)(o)}{}_{n-1}}{\partial z} + \frac{\partial \Pi_x^{(s)(o)}{}_{n+1}}{\partial z} + \frac{\partial \Pi_y^{(s)(e)}{}_{n-1}}{\partial z} - \frac{\partial \Pi_y^{(s)(e)}{}_{n+1}}{\partial z} \right\} \\ &= j\omega\varepsilon \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ B_m^{n-1} \frac{\partial S_m^{n-1}(r, z)}{\partial z} + B_m^{n+1} \frac{\partial S_m^{n+1}(r, z)}{\partial z} + C_m^{n-1} \frac{\partial S_m^{n-1}(r, z)}{\partial z} - C_m^{n+1} \frac{\partial S_m^{n+1}(r, z)}{\partial z} \right\} \end{aligned} \quad (2.81)$$

と表される．ただし，式 (2.73)-(2.76) と式 (A.35) より

$$A_m^{-1} = A_m^1, \quad B_m^{-1} = -B_m^1, \quad C_m^{-1} = C_m^1, \quad D_m^{-1} = -D_m^1, \quad S_m^{-1}(r, z) = S_m^1(r, z) \quad (2.82)$$

である．

円板の端部近傍 ( $z = \pm 0$ ,  $r = a - \delta$  ( $0 < \delta \ll a$ )) では，式 (A.43) より，

$$\frac{\partial S_m^n(r, z)}{\partial z} \simeq \mp \frac{(-1)^m}{\sqrt{\pi a}} \delta^{-\frac{1}{2}}, \quad (\delta = a - r \rightarrow 0, z = \pm 0) \quad (2.83)$$

であるから，式 (2.80) および (2.81) に式 (2.83) を代入すると，

$$H_{\varphi_n}^{(e)} \simeq \mp \frac{j\omega\varepsilon}{2\sqrt{\pi a}} \delta^{-\frac{1}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \{ A_m^{n-1} + A_m^{n+1} - D_m^{n-1} + D_m^{n+1} \} \quad (2.84)$$

$$H_{\varphi_n}^{(o)} \simeq \mp \frac{j\omega\varepsilon}{2\sqrt{\pi a}} \delta^{-\frac{1}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \{ B_m^{n-1} + B_m^{n+1} + C_m^{n-1} - C_m^{n+1} \} \quad (2.85)$$

である．ここで端点条件式 (2.12) より，式 (2.84)，(2.85) はエッジ近傍で有界でなければならない．したがって，式 (2.84)，(2.85) が有界になるのは 0 のみで，

$$\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \{ A_m^{n-1} + A_m^{n+1} - D_m^{n-1} + D_m^{n+1} \} = 0 \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots) \quad (2.86)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \{ B_m^{n-1} + B_m^{n+1} + C_m^{n-1} - C_m^{n+1} \} = 0 \quad (n = 1, 2, 3, 4, \dots) \quad (2.87)$$

となり，これらを満足する必要がある．

式 (2.86) の  $A_m^{n-1}$ ,  $A_m^{n+1}$ ,  $D_m^{n-1}$ ,  $D_m^{n+1}$  へ式 (2.61)-(2.64) のマトリクス要素を代入すると,

$$\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left\{ \widetilde{A}_m^{n-1} + \frac{k}{2}(U_n^{(e)} - U_{n-2}^{(e)})\widetilde{f}_m^{n-1} + \widetilde{A}_m^{n+1} + \frac{k}{2}(U_{n+2}^{(e)} - U_n^{(e)})\widetilde{f}_m^{n+1} \right. \\ \left. - \widetilde{D}_m^{n-1} + \frac{k}{2}(U_n^{(e)} + U_{n-2}^{(e)})\widetilde{f}_m^{n-1} + \widetilde{D}_m^{n+1} - \frac{k}{2}(U_{n+2}^{(e)} + U_n^{(e)})\widetilde{f}_m^{n+1} \right\} = 0 \quad (2.88)$$

となる. この式の  $U_{n-2}^{(e)}$ ,  $U_{n+2}^{(e)}$  は打ち消し合い,  $U_n^{(e)}$  のみが残る. そこで,  $U_n^{(e)}$  について解けば,

$$\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left\{ \widetilde{A}_m^{n-1} + \widetilde{A}_m^{n+1} - \widetilde{D}_m^{n-1} + \widetilde{D}_m^{n+1} \right\} = - \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left\{ \widetilde{f}_m^{n-1} - \widetilde{f}_m^{n+1} \right\} kU_n^{(e)} \\ kU_n^{(e)} = - \frac{\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left\{ \widetilde{A}_m^{n-1} + \widetilde{A}_m^{n+1} - \widetilde{D}_m^{n-1} + \widetilde{D}_m^{n+1} \right\}}{\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left\{ \widetilde{f}_m^{n-1} - \widetilde{f}_m^{n+1} \right\}} \quad (n \geq 0) \quad (2.89)$$

を得る. ただし, 式 (A.32) と同様に  $\widetilde{A}_m^{-1} = \widetilde{A}_m^1$ ,  $\widetilde{D}_m^{-1} = -\widetilde{D}_m^1$ ,  $\widetilde{D}_m^0 = 0$  である.

また, 式 (2.87) の  $B_m^{n-1}$ ,  $B_m^{n+1}$ ,  $C_m^{n-1}$ ,  $C_m^{n+1}$  に式 (2.62) および (2.63) を代入し, 上と同様に  $U_n^{(o)}$  を含む項と含まない項とで分けると,

$$\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left\{ \widetilde{B}_m^{n-1} + \widetilde{B}_m^{n+1} + \widetilde{C}_m^{n-1} - \widetilde{C}_m^{n+1} \right\} = - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^m \left\{ \widetilde{f}_m^{n-1} - \widetilde{f}_m^{n+1} \right\} kU_n^{(o)} \quad (2.90)$$

となる.  $U_n^{(o)}$  について解けば,

$$kU_n^{(o)} = - \frac{\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left\{ \widetilde{B}_m^{n-1} + \widetilde{B}_m^{n+1} + \widetilde{C}_m^{n-1} - \widetilde{C}_m^{n+1} \right\}}{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^m \left\{ \widetilde{f}_m^{n-1} - \widetilde{f}_m^{n+1} \right\}} \quad (n \geq 1) \quad (2.91)$$

を得る. ただし, 同様に  $\widetilde{B}_m^{-1} = -\widetilde{B}_m^1$ ,  $\widetilde{C}_m^{-1} = \widetilde{C}_m^1$ ,  $\widetilde{B}_m^0 = 0$  である.

### 2.3.5 連立方程式における係数の級数表現

次に, マトリクス方程式 (2.57)-(2.60) の係数  $G_{\ell,m}^n$ ,  $f_{\ell}^n$  を級数表現する.

式 (2.53) の  $G_{\ell,m}^n$  は, 式 (A.37), (A.38) および (A.39) より,

$$G_{\ell,m}^n = g_1(n+m+\ell, |m-\ell|) - jg_2(n+m+\ell, |m-\ell|) \quad (2.92)$$

$$g_1(p, q) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{k=q}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\Gamma(p-k+\frac{1}{2})\Gamma(2k+1) \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{2k}}{\Gamma(\frac{1}{2}-k)\Gamma(p+k+\frac{3}{2})\Gamma(k+q+1)\Gamma(k-q+1)} \quad (2.93)$$

$$g_2(p, q) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\Gamma(p+k+1)\Gamma(2p+2k+2) \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{2p+2k+1}}{\Gamma(2p+k+2)\Gamma(p+k+q+\frac{3}{2})} \frac{1}{\Gamma(p+k-q+\frac{3}{2})\Gamma(p+k+\frac{3}{2})} \quad (2.94)$$

と表される. ここで,  $\Gamma(n)$  は gamma 関数を表す.

また, 式 (2.56) の  $f_{\ell}^n$  は, 式 (A.40) より,

$$f_{\ell}^n = \frac{\Gamma(\ell+\frac{1}{2})\Gamma(n+\ell+\frac{1}{2})}{\sqrt{2}\Gamma(\ell+1)\Gamma(n+\ell+1)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu} \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{n+2\ell+2\nu}}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\nu+n+2\ell+\frac{3}{2})} \quad (2.95)$$

と表される.

### 2.3.6 導体円板上での平面波の表現

最後に入射界に関連する式  $\Pi_{x,y,\ell}^{(e,o)n}$  について整理する.

円板上  $z=0$  では, 式 (2.15) および (2.16) は,

$$\Pi_x^{(i)}(x, y, 0) = -\frac{E_2}{k^2 \cos \alpha} e^{-jkx \sin \alpha} \quad (2.96)$$

$$\Pi_y^{(i)}(x, y, 0) = \frac{E_1}{k^2} e^{-jkx \sin \alpha} \quad (2.97)$$

と表すことができる. 式 (A.41) より,

$$\begin{aligned} e^{jkx \sin \alpha} &= e^{jkr \sin \alpha \cos \varphi} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n j^n J_n(kr \sin \alpha) \cos n\varphi \end{aligned} \quad (2.98)$$

と表すことができるので, 式 (2.37) と (2.96), 式 (2.38) と (2.97) をそれぞれ等しいと置き, 式 (2.54), (2.55) に式 (2.98) を代入し, さらに式 (A.26) を用いて,  $\Pi_x^{(e)n}$ ,  $\Pi_x^{(o)n}$ ,  $\Pi_y^{(e)n}$ ,  $\Pi_y^{(o)n}$  はそれぞれ

$$\Pi_x^{(e)n} = \frac{(-j)^n E_2}{\sqrt{2}k^2 \cos \alpha} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu} \left(\frac{1}{2}\gamma \sin \alpha\right)^{n+2\ell+2\nu}}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\nu+n+2\ell+\frac{3}{2})} \quad (2.99)$$

$$\Pi_y^{(e)n} = -\frac{(-j)^n E_1}{\sqrt{2}k^2} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu} \left(\frac{1}{2}\gamma \sin \alpha\right)^{n+2\ell+2\nu}}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\nu+n+2\ell+\frac{3}{2})} \quad (2.100)$$

$$\Pi_x^{(o)n} = \Pi_y^{(o)n} = 0 \quad (2.101)$$

と表される.

### 2.3.7 導体円板上での電流分布

式 (2.18), (2.19) の展開係数を決定できると, 実際に電流分布や散乱界を計算することができる. ここでは, 電流分布の表現を示す.

磁界は式 (2.4) と (2.7) よりヘルツベクトルを用いて,

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^{(i)} + j\omega\nabla \times \mathbf{\Pi}^{(s)} \quad (2.102)$$

$$H_x = H_x^{(i)} - j\omega\varepsilon \frac{\partial \Pi_y^{(s)}}{\partial z} \quad (2.103)$$

$$H_y = H_y^{(i)} + j\omega\varepsilon \frac{\partial \Pi_x^{(s)}}{\partial z} \quad (2.104)$$

と書ける. したがって, 円板表面 ( $z = \pm 0$ ) での電流  $J$  は,

$$J_x = \mp H_y(x, y, \pm 0) = \mp \left( H_y^{(i)} + j\omega\varepsilon \frac{\partial \Pi_x^{(s)}}{\partial z} \Big|_{z=\pm 0} \right) \quad (2.105)$$

$$J_y = \pm H_x(x, y, \pm 0) = \pm \left( H_x^{(i)} - j\omega\varepsilon \frac{\partial \Pi_y^{(s)}}{\partial z} \Big|_{z=\pm 0} \right) \quad (2.106)$$

と表される. これら式のヘルツベクトルを含む項は, 式 (2.18), (2.19) を微分して,

$$\frac{\partial \Pi_x^{(s)}}{\partial z} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_n \frac{\partial S_m^n(r, z)}{\partial z} \{A_m^n \cos n\varphi + B_m^n \sin n\varphi\} \quad (2.107)$$

$$\frac{\partial \Pi_y^{(s)}}{\partial z} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_n \frac{\partial S_m^n(r, z)}{\partial z} \{C_m^n \cos n\varphi + D_m^n \sin n\varphi\} \quad (2.108)$$

で表されるので, 円板上での電流分布の  $x, y$  成分,  $J_x, J_y$  は

$$J_x = \mp H_y(x, y, \pm 0) = \mp \left( H_y^{(i)} + j\omega\varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_n \frac{\partial S_m^n(r, z)}{\partial z} \Big|_{z=\pm 0} \{A_m^n \cos n\varphi + B_m^n \sin n\varphi\} \right) \quad (2.109)$$

$$J_y = \pm H_x(x, y, \pm 0) = \pm \left( H_x^{(i)} - j\omega\varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_n \frac{\partial S_m^n(r, z)}{\partial z} \Big|_{z=\pm 0} \{C_m^n \cos n\varphi + D_m^n \sin n\varphi\} \right) \quad (2.110)$$

で計算できる.

また, 電流分布の  $r, \varphi$  成分,  $J_r, J_\varphi$  は,

$$J_r = J_x \cos \varphi + J_y \sin \varphi = \mp H_\varphi^{(i)} - j\omega\varepsilon \left( \cos \varphi \frac{\partial \Pi_x^{(s)}}{\partial z} \Big|_{z=\pm 0} + \sin \varphi \frac{\partial \Pi_y^{(s)}}{\partial z} \Big|_{z=\pm 0} \right) \quad (2.111)$$

$$J_\varphi = -J_x \sin \varphi + J_y \cos \varphi = \pm H_r^{(i)} - j\omega\varepsilon \left( -\sin \varphi \frac{\partial \Pi_x^{(s)}}{\partial z} \Big|_{z=\pm 0} + \cos \varphi \frac{\partial \Pi_y^{(s)}}{\partial z} \Big|_{z=\pm 0} \right) \quad (2.112)$$

と表される．これら  $J_r$  ,  $J_\varphi$  を

$$J_r = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \left\{ J_{r_n}^{(e)}(r) \cos n\varphi + J_{r_n}^{(o)}(r) \sin n\varphi \right\} \quad (2.113)$$

$$J_\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \left\{ J_{\varphi_n}^{(e)}(r) \cos n\varphi + J_{\varphi_n}^{(o)}(r) \sin n\varphi \right\} \quad (2.114)$$

とフーリエ級数に展開し，式 (A.33) および (A.34) を利用すると，式 (2.111) , (2.112) は，

$$J_{r_n}^{(e)} = -H_\varphi^{(i)(e)} - j\omega\varepsilon \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \Pi_{x_{n-1}}^{(e)} + \Pi_{x_{n+1}}^{(e)} - \Pi_{y_{n-1}}^{(o)} + \Pi_{y_{n+1}}^{(o)} \right\} \quad (2.115)$$

$$J_{r_n}^{(o)} = -H_\varphi^{(i)(o)} - j\omega\varepsilon \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \Pi_{x_{n-1}}^{(o)} + \Pi_{x_{n+1}}^{(o)} + \Pi_{y_{n-1}}^{(e)} - \Pi_{y_{n+1}}^{(e)} \right\} \quad (2.116)$$

$$J_{\varphi_n}^{(e)} = H_r^{(i)(e)} - j\omega\varepsilon \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \Pi_{x_{n-1}}^{(o)} - \Pi_{x_{n+1}}^{(o)} + \Pi_{y_{n-1}}^{(e)} + \Pi_{y_{n+1}}^{(e)} \right\} \quad (2.117)$$

$$J_{\varphi_n}^{(o)} = H_r^{(i)(o)} - j\omega\varepsilon \frac{\partial}{\partial z} \left\{ -\Pi_{x_{n-1}}^{(e)} + \Pi_{x_{n+1}}^{(e)} + \Pi_{y_{n-1}}^{(o)} + \Pi_{y_{n+1}}^{(o)} \right\} \quad (2.118)$$

となる．これらに式 (2.73)-(2.76) を代入すると，

$$J_{r_n}^{(e)} = -H_\varphi^{(i)(e)} - j\omega\varepsilon \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ A_m^{n-1} \frac{\partial S_m^{n-1}(r, z)}{\partial z} \Big|_{z=\pm 0} + A_m^{n+1} \frac{\partial S_m^{n+1}(r, z)}{\partial z} \Big|_{z=\pm 0} \right. \\ \left. - D_m^{n-1} \frac{\partial S_m^{n-1}(r, z)}{\partial z} \Big|_{z=\pm 0} + D_m^{n+1} \frac{\partial S_m^{n+1}(r, z)}{\partial z} \Big|_{z=\pm 0} \right\} \quad (2.119)$$

$$J_{r_n}^{(o)} = -H_\varphi^{(i)(o)} - j\omega\varepsilon \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ B_m^{n-1} \frac{\partial S_m^{n-1}(r, z)}{\partial z} \Big|_{z=\pm 0} + B_m^{n+1} \frac{\partial S_m^{n+1}(r, z)}{\partial z} \Big|_{z=\pm 0} \right. \\ \left. + C_m^{n-1} \frac{\partial S_m^{n-1}(r, z)}{\partial z} \Big|_{z=\pm 0} - C_m^{n+1} \frac{\partial S_m^{n+1}(r, z)}{\partial z} \Big|_{z=\pm 0} \right\} \quad (2.120)$$

$$J_{\varphi_n}^{(e)} = -H_r^{(i)(e)} - j\omega\varepsilon \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ B_m^{n-1} \frac{\partial S_m^{n-1}(r, z)}{\partial z} \Big|_{z=\pm 0} + B_m^{n+1} \frac{\partial S_m^{n+1}(r, z)}{\partial z} \Big|_{z=\pm 0} \right. \\ \left. + C_m^{n-1} \frac{\partial S_m^{n-1}(r, z)}{\partial z} \Big|_{z=\pm 0} + C_m^{n+1} \frac{\partial S_m^{n+1}(r, z)}{\partial z} \Big|_{z=\pm 0} \right\} \quad (2.121)$$

$$J_{\varphi_n}^{(o)} = -H_r^{(i)(o)} - j\omega\varepsilon \sum_{m=0}^{\infty} \left\{ -A_m^{n-1} \frac{\partial S_m^{n-1}(r, z)}{\partial z} \Big|_{z=\pm 0} + A_m^{n+1} \frac{\partial S_m^{n+1}(r, z)}{\partial z} \Big|_{z=\pm 0} \right. \\ \left. + D_m^{n-1} \frac{\partial S_m^{n-1}(r, z)}{\partial z} \Big|_{z=\pm 0} + D_m^{n+1} \frac{\partial S_m^{n+1}(r, z)}{\partial z} \Big|_{z=\pm 0} \right\} \quad (2.122)$$

を得る．ただし， $\frac{\partial S_m^n(r, z)}{\partial z}$  は式 (A.42) より，Gauss の超幾何関数  $F(a, b, c; x)$  を使って，

$$\frac{\partial S_m^n(r, z)}{\partial z} \Big|_{z=\pm 0} = \mp \frac{1}{a} \frac{\sqrt{2} t^{n/2} \Gamma(m+n+1)}{\Gamma(n+1) \Gamma(m+\frac{1}{2})} (1-t)^{-\frac{1}{2}} F(-m, n+m+\frac{1}{2}, n+1; t) \quad (2.123)$$

と変形できる．

### 2.3.8 遠方散乱界

次に遠方での散乱界を求める．観測点を  $(x, y, z)$  とし，さらに原点から観測点までの距離を  $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  と表す．式 (2.18), (2.19) に  $S_m^n(r, z)$  の漸近展開式 (A.46) を代入すると，遠方では，

$$\Pi_x^{(s)} \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi}} a \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_n j^n j_{n+2m}(\gamma \sin \theta) \{A_m^n \cos n\varphi + B_m^n \sin n\varphi\} \frac{e^{-jkR}}{R} \quad (2.124)$$

$$\Pi_y^{(s)} \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi}} a \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_n j^n j_{n+2m}(\gamma \sin \theta) \{C_m^n \cos n\varphi + D_m^n \sin n\varphi\} \frac{e^{-jkR}}{R} \quad (2.125)$$

と表される．ただし， $j_\ell(x)$  は球 Bessel 関数を表す．

極座標系  $(R, \theta, \varphi)$  でのヘルツベクトルの各成分は，

$$\Pi_r^{(s)} = \cos \varphi \Pi_x^{(s)} + \sin \varphi \Pi_y^{(s)} \quad (2.126)$$

$$\Pi_\varphi^{(s)} = -\sin \varphi \Pi_x^{(s)} + \cos \varphi \Pi_y^{(s)} \quad (2.127)$$

$$\Pi_z^{(s)} = 0 \quad (2.128)$$

$$\Pi_R^{(s)} = \sin \theta \Pi_r^{(s)} \quad (2.129)$$

$$\Pi_\theta^{(s)} = \cos \theta \Pi_r^{(s)} = \cos \theta (\cos \varphi \Pi_x^{(s)} + \sin \varphi \Pi_y^{(s)}) \quad (2.130)$$

と書くことができる．また，これらヘルツベクトル式と A.11 より，式 (2.6) と (2.7) の遠方での電磁界の各成分は，

$$H_\theta^{(s)} = -\frac{k^2}{\eta} \Pi_\varphi^{(s)} \quad (2.131)$$

$$H_\varphi^{(s)} = \frac{k^2}{\eta} \Pi_\theta^{(s)} \quad (2.132)$$

$$E_\theta^{(s)} = \eta H_\varphi^{(s)} = k^2 \Pi_\theta^{(s)} \quad (2.133)$$

$$E_\varphi^{(s)} = -\eta H_\theta^{(s)} = k^2 \Pi_\varphi^{(s)} \quad (2.134)$$

となる．

## 2.4 多倍長精度数値計算インターフェイスの構成

### 2.4.1 多倍長精度数値計算

近年におけるコンピュータの進歩は劇的なものであり，これまで難しかった数値計算も簡単かつ高速に計算することができるようになった．併せて，これまで倍精度や4倍精度でし

か計算できなかったが、それ以上の高精度で計算できる仕組み、すなわち、多倍長精度数値計算という手法が出現してきた。

一般に単精度 (32[bit]) や倍精度 (64[bit]) より高い精度のことを多倍長精度と呼ぶ。多倍長精度を扱えるシステムでは、ユーザが任意に精度、言い換えれば桁数 (一般に 2 進の桁数) の変数を宣言でき、さらにそれらの演算を行うことができる。ただし、単精度や倍精度の計算はハードウェアで実現できるが、多倍長精度の計算はソフトウェアにより実現されている。

多倍長精度計算を実現するには、変数に対しては整数の場合は表現したい数全体を、浮動小数の場合は表現したい数の仮数部全体を表現できるような大きさのメモリを確保し、演算に対してはそれら変数が計算できるような仕組みを作ればよい。現在リリースされている多倍長精度計算のためのソフトウェアはこの原理に基づいているが、基数を 2 進ではなく 10 進で扱うものや、特に多くの時間を費やす乗算について工夫が行われているものがある。

多倍長精度計算のソフトウェアにはソフトウェアタイプとライブラリタイプがある。ソフトウェアタイプは、Mathematica や Maple のような計算したい数式を任意の精度 (桁数) で実現するものである。またライブラリタイプは、プログラミング言語に対してライブラリという形で組み込むことが可能となり、繰り返し行う数値計算に利用される他、開発者が自身でプログラムが書けるために、自由度が高くなっている。

多倍長精度計算ライブラリにはいくつか種類がある。特に、どのような変数を扱えるかが重要であり (対象の変数が扱えれば、その演算は可能である)、整数、実数、浮動小数点数、固定小数点数、有理数、複素数などが扱う対象となる。また使うことのできる言語も考慮する必要があり、C 言語、C++ 言語で扱えるものが多いが、Java、FORTRAN、アセンブラ、Python などでも扱えるものがある。

C 言語および C++ 言語においては多倍長精度数値計算が可能な数値計算ライブラリである GMP (GNU Multiple Precision Arithmetic Library) [2] が開発されている。GMP は、整数、有理数、浮動小数点数の変数に対し任意の桁数 (2 進数における桁数) を指定することができる。一方、C 言語には GMP をベースに任意精度浮動小数点演算を行うための MPFR (Multiple Precision Floating-Point Reliable Library) [3] がある。MPFR には、三角関数や gamma 関数など数学ライブラリ関数が用意されている上、任意の精度で計算値が得られる精度保証計算の機能が用意されている。また、GMP と MPFR のライブラリは、両者を組み合わせて利用することができる。

### 2.4.2 GMP クラス変数と MPFR の関数群とのインターフェイス

前節のように、任意の桁の演算を行うことのできるライブラリは大変有用である。しかしながら、C 言語で GMP を使う場合、加算であっても `add(m,n)` など関数の形で記述しなけれ

ばならず、また初期化や終了処理などが煩雑であるので、この点が非常に使い勝手が悪い。

一方、C++言語に対応したライブラリ（通称 GMP++）では、クラス変数が利用可能であり、変数の初期化や終了処理の記述が必要ない。その上、GMP++では加減乗除を  $+ - * /$  記号で記述することができ、C言語の GMP に比して非常に使い勝手が良く、煩雑さは激減する。しかしながら、MPFR は C++ のクラスインターフェイスを持っていないため、クラス変数を使って数学ライブラリ関数を計算することができない。したがって、MPFR を GMP++ で使うためには、独自のインターフェイスを作成・工夫する必要がある。

そこで本研究に際し、これらの問題を解決する GMP クラス変数から MPFR 関数へのインターフェイスを新たに作成した。本研究で作成したインターフェイスの流れを図 2.2 に示す。図のように、gmp クラス形式で変数を関数に受け渡し、関数内部でまず gmp クラスから mpfr 形式の変数に変換し、mpfr 形式の変数で当該関数を計算する。次に mpfr 形式の変数から gmp クラスに変換する必要があるが、この操作は直接できない。そこで、まず mpfr 形式の変数から gmp 形式の変数に変換し、さらに gmp 形式の変数から gmp クラスに変換を行っている。最終的にその gmp クラスを戻り値として返しているが、各プロセスにおいて変数間の精度は保証されている。

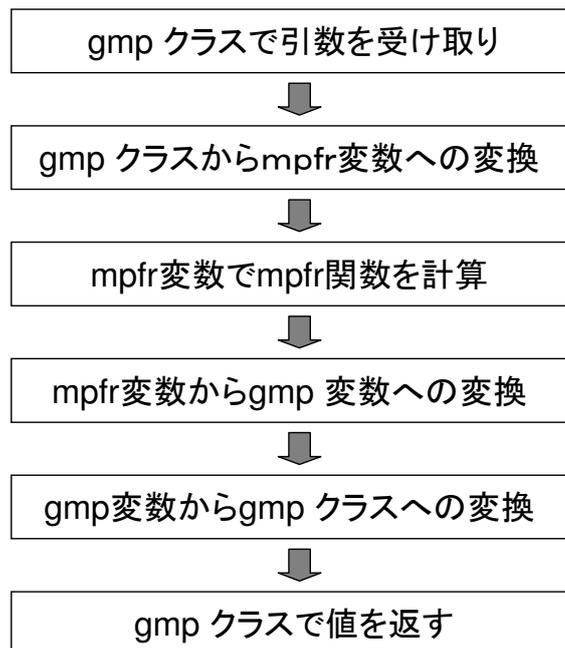


図 2.2: gmp クラスから mpfr 関数の利用方法

```

mpf_class sqrt(const mpf_class &class_x)
    gmp クラスで引数を受け取り
{
    mpfr_t mpfr_x, mpfr_y;

    mpfr_init_set_f(mpfr_x, class_x.get_mpf_t(), RND);

    gmp クラスから mpfr 変数への変換

    mpfr_init(mpfr_y);
    mpfr_sqrt(mpfr_y, mpfr_x, RND);

    mpfr 変数で mpfr 関数を計算

    mpfr_clear(mpfr_x); mpf_t y; mpf_init(y);

    mpfr_get_f(y, mpfr_y, RND);

    mpfr 変数から gmp 変数への変換

    mpf_class class_y(y, PREC);

    gmp 変数から gmp クラスへの変換

    mpfr_clear(mpfr_y); mpf_clear(y);

    return class_y;

    gmp クラスで値を返す
}

```

図 2.3: 平方根を計算するためのインターフェイス

図 2.3 に、このインターフェイスを用いた一例として、平方根を計算するための関数を示す。特に、「gmp クラスから mpfr 変数への変換」部では、mpfr 変数を初期化したのち、gmp クラス変数の値を初期値として代入することで変換を行っている。また、「mpfr 変数から gmp 変数への変換」および「gmp 変数から gmp クラスへの変換」部で、mpfr 変数から gmp クラスへの変換を、mpfr 変数 → gmp 変数 → gmp クラスと、gmp 変数を媒介させて変換を行っている。

本研究では、このようなインターフェイスを三角関数など数値計算に必要な関数群に対して用意し、以降利用している。このインターフェイスにより、GMP++のクラス変数を用いて MPFR の数学ライブラリ関数を利用することが可能となり、プログラミングを容易にしている。

## 2.5 計算精度の検討

本節では、 $[G_{\ell,m}^n]$  の計算精度について調査する。

ここで、 $[G_{\ell,m}^n]$  の構成要素である式 (2.93) および式 (2.94) の

$$g_1(p, q) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{k=q}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\Gamma(p - k + \frac{1}{2})\Gamma(2k + 1) \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{2k}}{\Gamma(\frac{1}{2} - k)\Gamma(p + k + \frac{3}{2})\Gamma(k + q + 1)\Gamma(k - q + 1)}$$

$$g_2(p, q) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\Gamma(p + k + 1)\Gamma(2p + 2k + 2) \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{2p+2k+1}}{\Gamma(2p + k + 2)\Gamma(p + k + q + \frac{3}{2})} \frac{1}{\Gamma(p + k - q + \frac{3}{2})\Gamma(p + k + \frac{3}{2})}$$

に対して（ただし、 $\gamma = ka = 2\pi a/\lambda$ ）、データ長、円板の半径  $a$  と波長  $\lambda$  の比  $a/\lambda$  と計算精度の関係を検証する。ただし、ここでの計算精度は、512[bit] を基準として設定したデータ長  $n$ [bit] での精度、すなわち両者が一致した桁数、

$$d = -\log_{10} \left| \frac{g_{1,2n\text{-bit}} - g_{1,2512\text{-bit}}}{g_{1,2512\text{-bit}}} \right| \quad (2.135)$$

で表す。

$a/\lambda$  に対する、 $g_1(p, q)$  および  $g_2(p, q)$  の計算精度を図 2.4 に示す。図は、横軸は  $a/\lambda$  を、縦軸は計算精度  $d$  とし、 $n$  を 64[bit] と 128[bit] で計算した例である。ここで  $d$  は  $g_1(p, q)$ 、 $g_2(p, q)$  の計算精度の平均としている。また  $p = 0$ 、 $q = 0$  とし、総和は収束したと判断できる第 100 項までとしている。図 2.4 より、 $a/\lambda$  が大きくなる、すなわち波長に対して半径が大きくなるにしたがって計算精度が落ちていることがわかる。特にデータ長 64[bit] での  $a/\lambda = 5$  では、2 桁目より結果が異なっている。また、64[bit] と 128[bit] との比較により、データ長を大きくすると計算精度が高くなることがわかる。

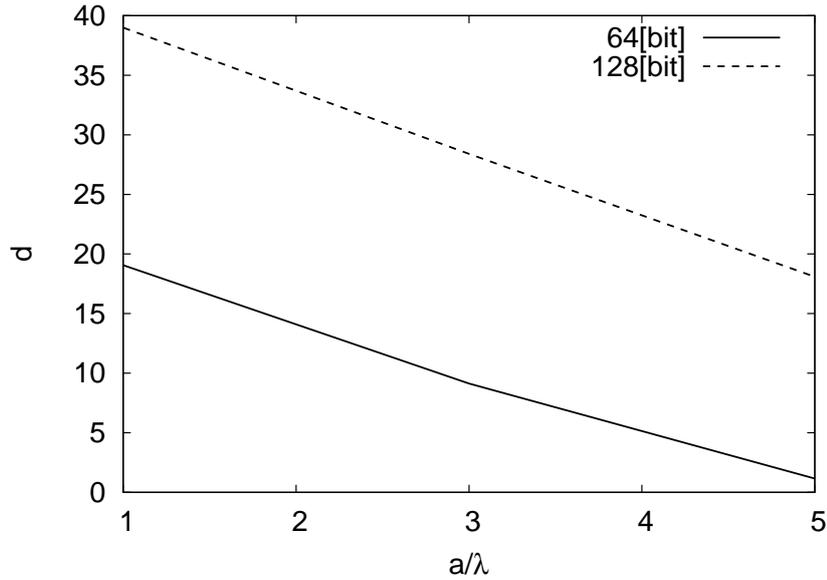


図 2.4: 各データ長における  $g_1(p, q)$  および  $g_2(p, q)$  に対する  $a/\lambda$  での計算精度

次に，総和をする際の打ち切り項数と計算精度の関係を調査するために，

$$\begin{aligned}
 g_1(p, q) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{k=q}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\Gamma(p - k + \frac{1}{2})\Gamma(2k + 1) \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{2k}}{\Gamma(\frac{1}{2} - k)\Gamma(p + k + \frac{3}{2})\Gamma(k + q + 1)\Gamma(k - q + 1)} \\
 &= \sum_{k=q}^{\infty} a_k
 \end{aligned} \tag{2.136}$$

とし，さらに， $k$  を  $q$  から  $N$  まで足したものを

$$g_1^N(p, q) = \sum_{k=q}^N a_k \tag{2.137}$$

として， $k = q, q + 1, q + 2, \dots$ ，と加算する過程での精度を検証した．

$p = 0, q = 0, a/\lambda = 1, 2, 3, 5$ ，データ長を 64[bit] としたときの結果を図 2.5 に示す．横軸は  $N$ ，縦軸は計算精度  $d$  を示している．図より， $a/\lambda$  の値によらず， $N$  が大きくなるにつれて，計算精度が落ちてしまっていることがわかる．したがって，計算は総和の過程で精度が落ちてしまっていると判断される．またこの結果は， $g_2(p, q)$  でも同じであった．

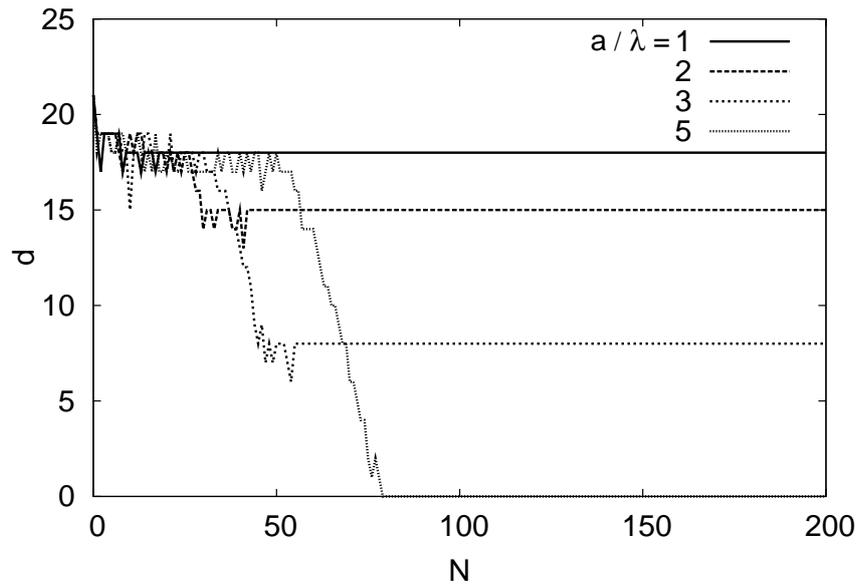


図 2.5: データ長 64[bit] における  $p = 0$ ,  $q = 0$ ,  $a/\lambda = 1, 2, 3, 5$  の場合の計算精度

次に, さらに詳しく精度が落ちる原因を調べるため, 式 (2.137) の  $g_1^N(p, q)$  と  $a_N$  との関係を調査した.  $p = 0$ ,  $q = 0$ ,  $a/\lambda = 5$  の場合の,  $g_1^N(p, q)$  と  $a_N$  の値を図 2.6 に示す. さらに, 図 2.6 の  $N = 20$  から 40 を拡大したものを図 2.7 に示す. 横軸は  $N$ , 縦軸は  $a_k$  の  $k$  を  $q$  から  $N$  までを足した  $g_1^N(p, q)$  を表す. 図より,  $g_1^N(p, q)$  と  $a_N$  のいずれも正負の振動を繰り返す, さらに一旦  $10^{23}$  程度の大きな値になり, その後小さくなっていくことがわかる.  $a_N$  と  $g_1^N(p, q)$  の値も振動していることから,  $g_1^N(p, q)$  は  $a_N$  とほぼ等しい値を取ると考えられる.

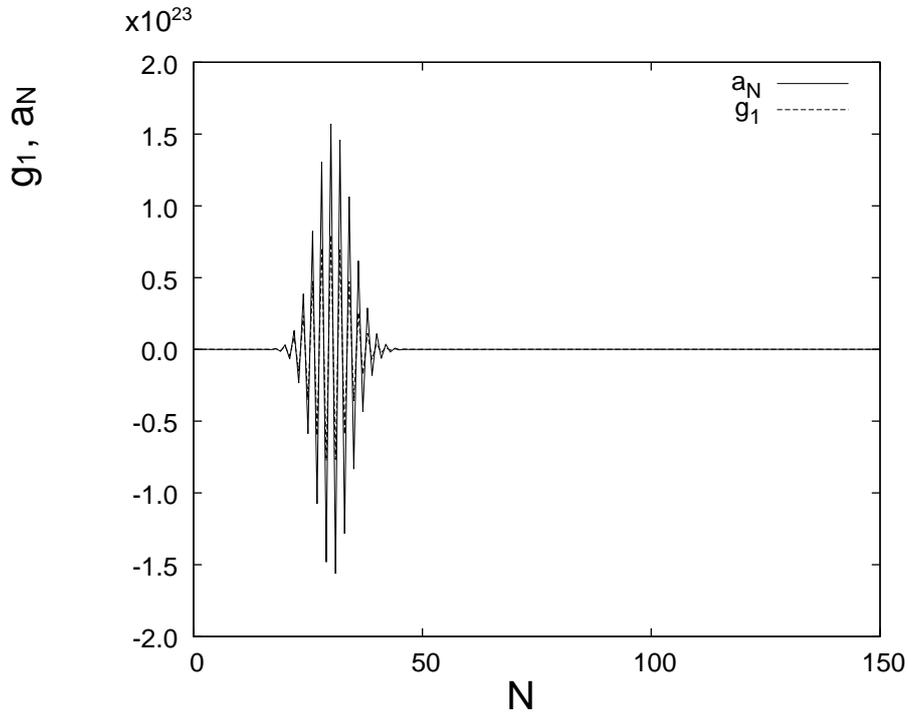


図 2.6:  $p = 0, q = 0, a/\lambda = 5$  の場合の  $g_1(p, q)$  と  $a_k$  の値

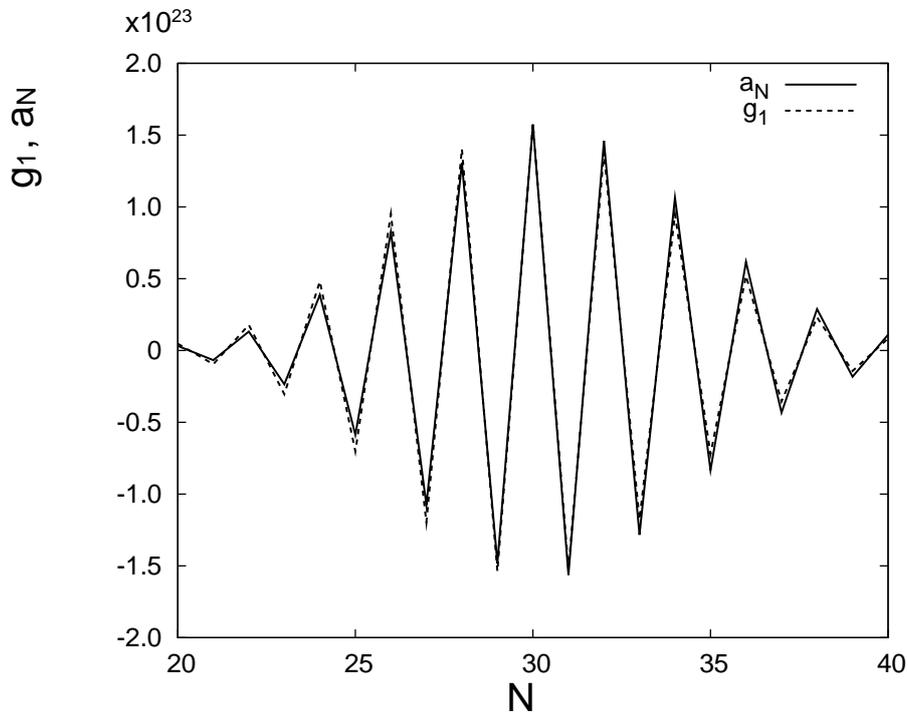


図 2.7:  $p = 0, q = 0, a/\lambda = 5$  の場合の  $g_1(p, q)$  と  $a_k$  の値 (N=20-40 を拡大)

そこで、この図の縦軸を絶対値にし、対数目盛りとしたものを図 2.8 に示す。図より、 $k < 80$  までは  $|g_1^N(p, q)| \simeq |a_N|$  であり、 $k > 80$  になると  $|a_N|$  は小さくなるが  $|g_1^N(p, q)|$  は一定値となる。これは、式 (2.136) の  $N$  が小さいときには  $g_1^N(p, q) = g_1^{N-1}(p, q) + a_N \simeq a_N$  となっており、この間では  $N-1$  まで足した  $g_1^{N-1}(p, q)$  は、 $N$  では  $a_N$  の値が大きいために埋もれてしまい、 $N$  での  $g_1^N(p, q)$  にほとんど反映されていないことを示しており、このように桁落ちが発生している。

次に、式 (2.93)、(2.94) の  $g_1(p, q)$ 、 $g_2(p, q)$  の値におけるデータ長と計算精度との関係を調査した。図 2.9 に設定したデータ長で得られる  $g_1(p, q)$  の精度を示す。横軸はデータ長、縦軸は計算精度  $d$  を表す。図では、 $p = 0$ 、 $q = 0$  とし、データ長は 64[bit] から 16[bit] 間隔で変化させた。図 2.9 より、 $a/\lambda = 2.0$  では、データ長が 64[bit] の場合には  $d = 15$  までであるのに対し、128[bit] の場合は  $d = 35$  まで得られている。一方、 $a/\lambda = 8.0$  では、128[bit] の場合には  $d = 0$ 、すなわち 1 桁も正確な値が得られていないが、256[bit] では  $d = 37$  まで正確な値が得られている。また、精度は設定したデータ長にほぼ比例して増加している。したがって、この比例関係により、各  $a/\lambda$  において要求される精度に対し、必要なデータ長を予測することができる。

さらに、 $a/\lambda$  に対する、 $g_1(p, q)$  および  $g_2(p, q)$  を総和するための各項の値を調査した。 $a/\lambda$  をパラメータとして、 $p = 0$ 、 $q = 0$  の場合の結果を図 2.10 に示す。横軸は式 (2.136) および

$$\begin{aligned} g_2(p, q) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(p+k+1) \Gamma(2p+2k+2) \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{2p+2k+1}}{k! \Gamma(2p+k+2) \Gamma(p+k+q+\frac{3}{2})} \frac{1}{\Gamma(p+k-q+\frac{3}{2}) \Gamma(p+k+\frac{3}{2})} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} b_k \end{aligned} \quad (2.138)$$

(2.94) の  $k$  の値を、縦軸は第  $k$  項の  $a_k$  および  $b_k$  の絶対値を示しており、図中の数値が  $a/\lambda$  を表している。図より、 $k$  が増加すると  $a_k$  および  $b_k$  は両者とも急速に減少するが、半径  $a/\lambda = 2.0$  と 6.0 では、それぞれおよそ 40 項目および 110 項目で  $10^{-10}$  まで減少しており、円板が大きくなるほど、計算項数を増やす必要がある。

最後に、電流分布の計算を行う場合に、展開係数の計算に要する項数を調べた。垂直入射で電界が  $y$  成分のみの場合の展開係数の値を図 2.11 に示す。横軸は  $m$ 、縦軸は式 (2.19) の展開係数の 1 つである  $C_m^n$  の絶対値である。また図中の数値は  $a/\lambda$  を表し、 $n = 0$  ときのみとした。この結果においても、円板が大きくなるほど、計算項数を増やす必要があることがわかる。

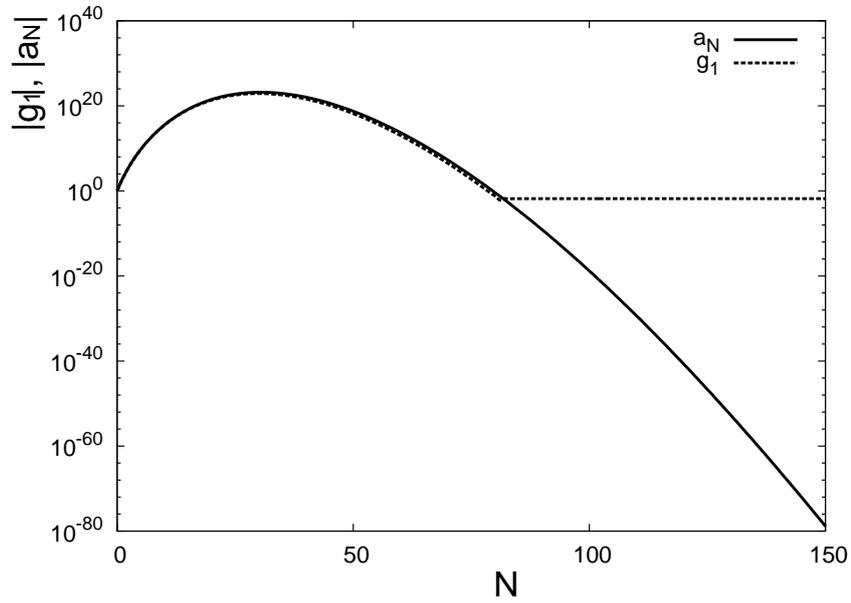


図 2.8:  $p = 0, q = 0, a/\lambda = 5$  の場合の  $|g_1|$  と  $|a_k|$  の値

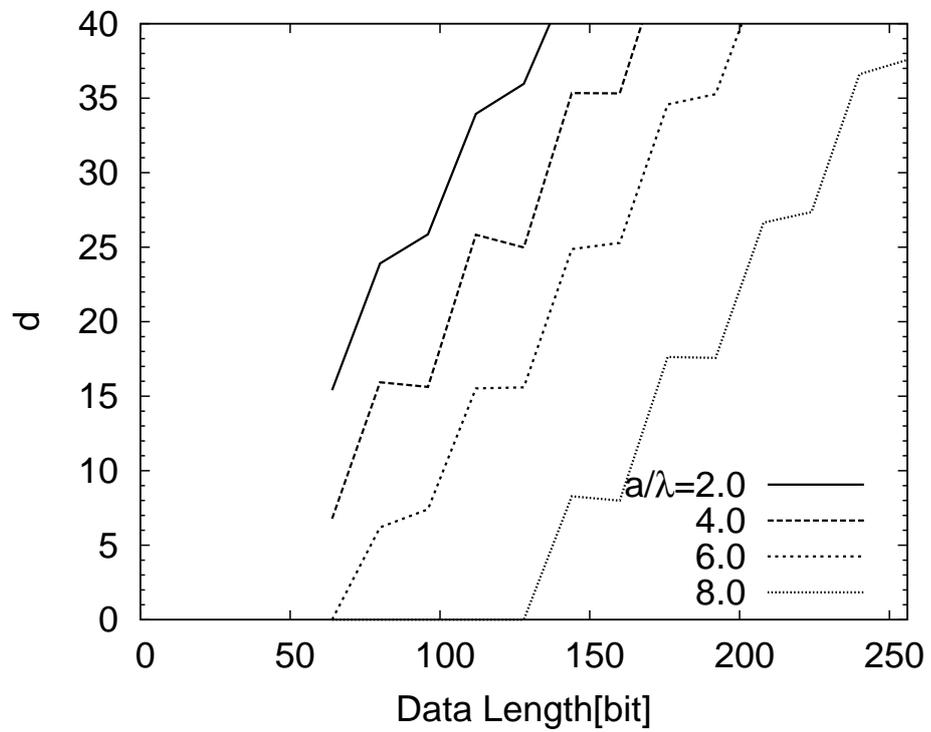


図 2.9: 各データ長で発生する精度 ( $p = 0, q = 0, a/\lambda = 2, 4, 6, 8$ )

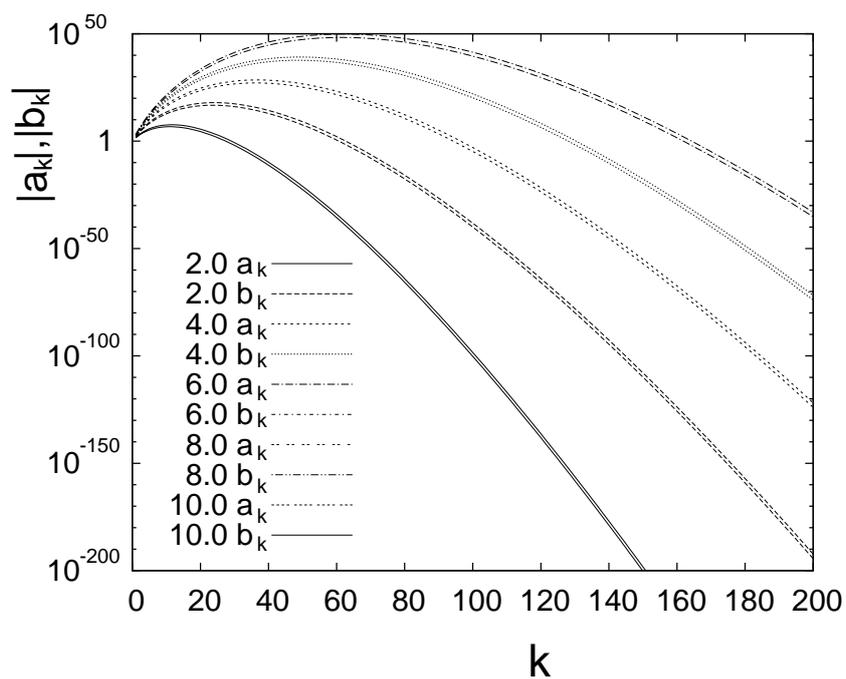


図 2.10:  $k$  に対する  $a_k$  および  $b_k$  の値

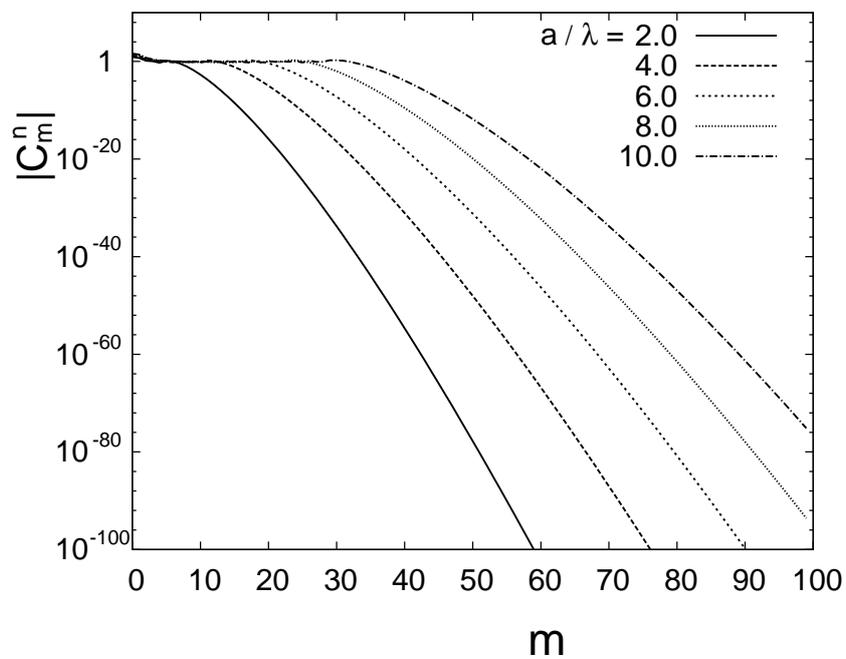


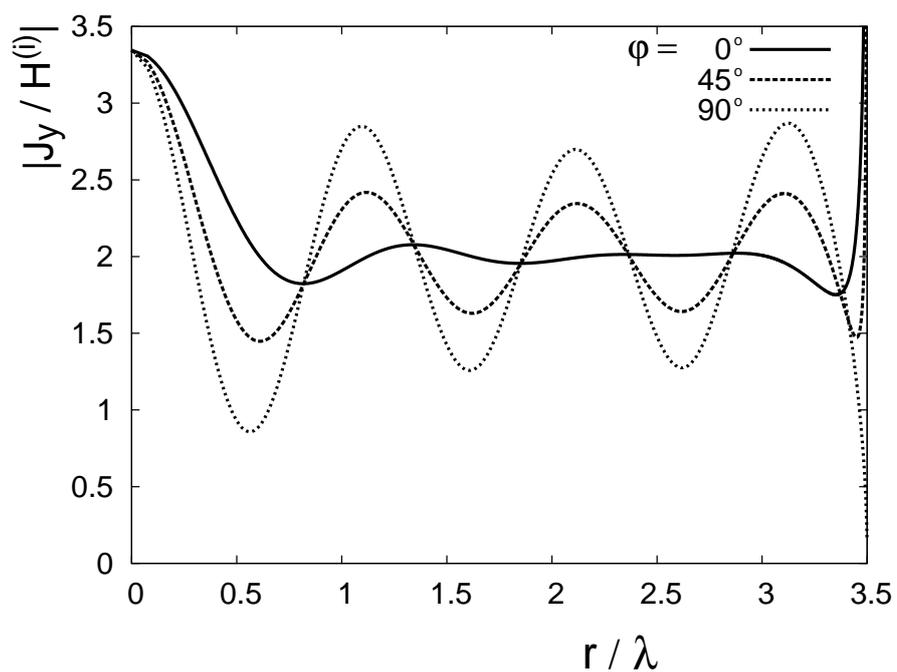
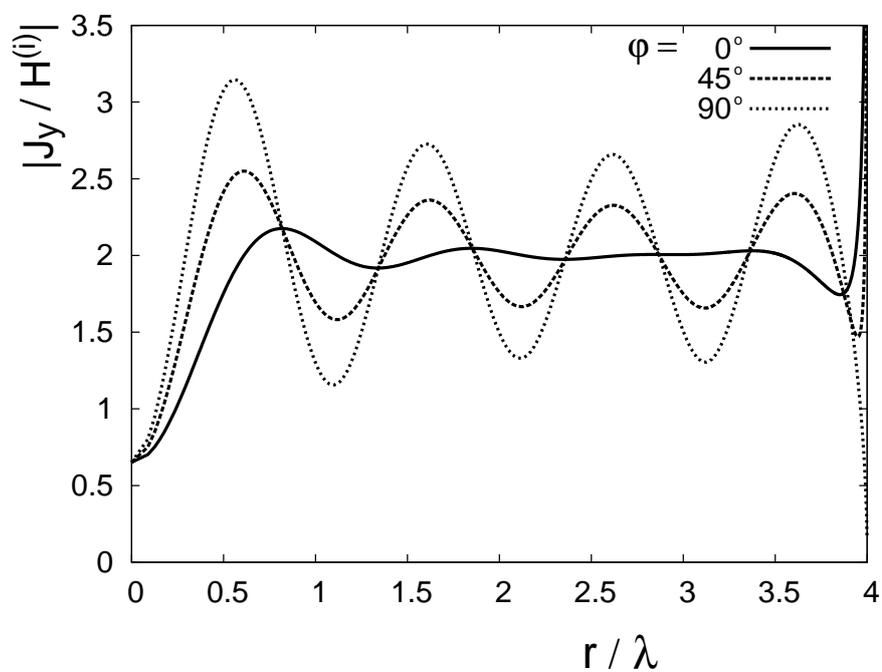
図 2.11:  $m$  に対する  $C_m^n$  の値 ( $n = 0$ )

## 2.6 数値計算

前節までの調査をもとに，電流分布および遠方散乱界を計算する．

### 2.6.1 垂直入射における電流分布

まず，垂直入射（図 2.1 で  $\alpha = 0[^\circ]$ ， $E_1 = 1$ ， $E_2 = 0$ ）に対する円板表面（ $z = +0$ ）での電流分布を図 2.12 から 2.16 に示す．ここで，図の横軸は円板の中心からの距離  $r$  と波長  $\lambda$  の比  $r/\lambda$  を，縦軸は電流の  $y$  成分を入射磁界  $H^{(i)}$  で規格化したものを表す．また各図では  $a/\lambda$  の値をそれぞれ，3.5，4.0，4.5，6.0，8.0 としている．いずれの図でも，電流分布は物理光学近似界の結果である 2 を中心として，放射方向に波長と同じ数で振動している．また，円板の端では，入射電界と平行な電流（ $\varphi = 90[^\circ]$ ）は有限値となり，垂直な電流（ $\varphi = 0[^\circ]$ ）は発散しており，端点での性質を示している．さらに，円板の半径が整数波長の場合は中心軸上の電流は極小値となるが，半整数波長の場合は極大値となる．垂直入射における半無限平板の場合，電流分布は文献 [4] にあるように，直接波により生じる誘導電流（物理光学界）とエッジ回折波は，エッジから整数波長離れた位置で逆相となり，互いに弱め合う性質を持っている．このことから類推すると，円板においても，半径が整数波長のとき，エッジ回折界が集中する円板の中心付近で物理光学界を回折界が弱め合い，極小値となっているものと解釈できる．最後に，図 2.15 はデータ長 128[bit]，図 2.16 はデータ長 256[bit] で計算している．これらは図 2.9 から得られる精度の見積もりより余裕を持って計算をしているが，これまで得られていなかった波長に比べて大きな円板に対しては，4 倍長および多倍長精度数値計算を導入することによって，良好な結果が得られることがわかる．

図 2.12: 垂直入射に対する電流分布 ( $a/\lambda = 3.5$ )図 2.13: 垂直入射に対する電流分布 ( $a/\lambda = 4.0$ )

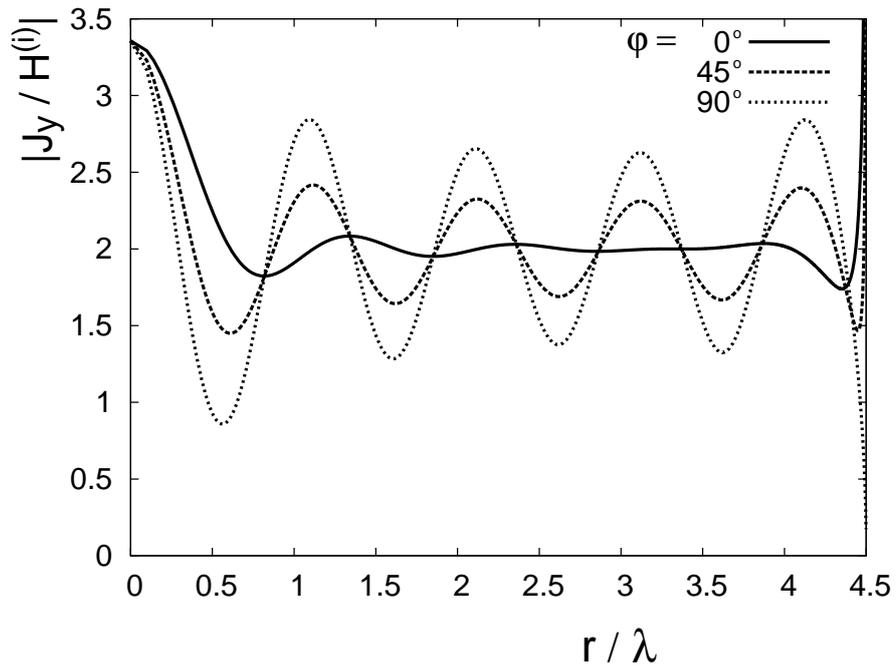


図 2.14: 垂直入射に対する電流分布 ( $a/\lambda = 4.5$ )

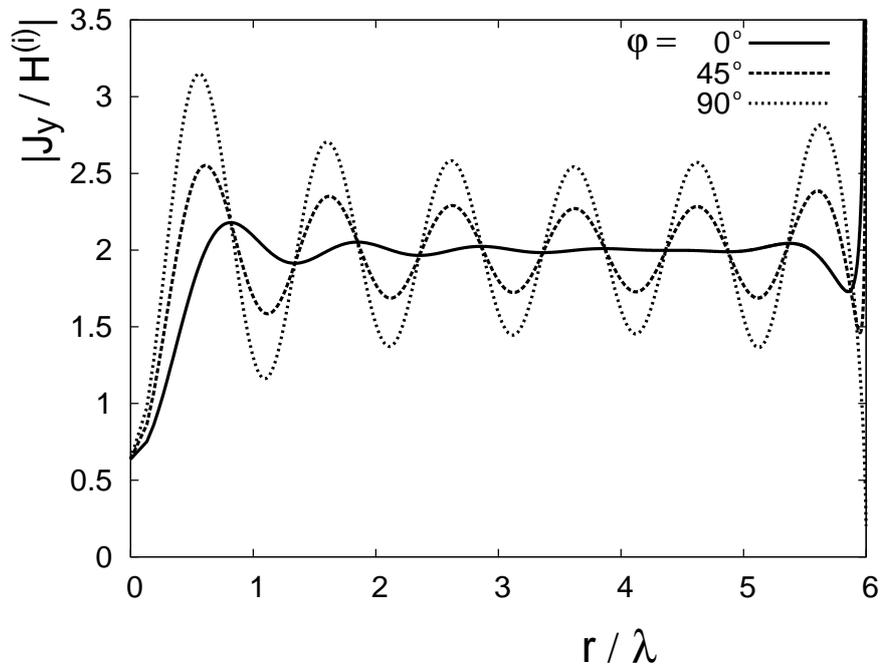


図 2.15: 垂直入射に対する電流分布 ( $a/\lambda = 6.0$ )

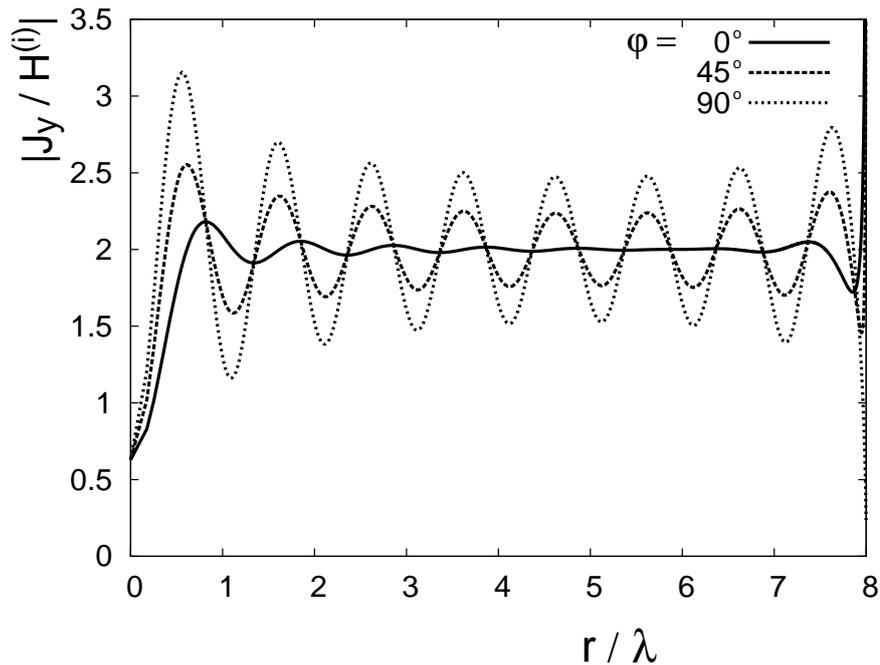


図 2.16: 垂直入射に対する電流分布 ( $a/\lambda = 8.0$ )

### 2.6.2 斜め入射における電流分布

次に、斜め入射における電流分布を示す。図 2.17 から 2.19 に、円板の半径が  $a/\lambda = 3.5$  のときの、円板表面 ( $z = +0$ ) の電流分布を示す。ただし、図 2.1(b) において、 $E_1 = 1$ 、 $E_2 = 0$ 、入射角は  $\alpha = 30, 45, 60[^\circ]$  とした。斜め入射の場合、垂直入射と比較して、その振動の振幅は円板の中心で小さく、端部で大きくなる。一方、斜め入射の場合でも、垂直入射の場合同様に、円板の端では電界と平行な電流 ( $\varphi = 90^\circ$ ) は有限値となり、垂直な電流 ( $\varphi = 0^\circ$ ) は発散しており、この場合でも端点の性質を示している。さらに、全体的な振幅の平均は、 $\alpha = 30[^\circ]$  のときは約 1.7、 $45[^\circ]$  では約 1.4、 $60[^\circ]$  では約 1.0 となっている。これら結果は、垂直入射と同じく物理光学近似 ( $2 \times \cos \alpha$ ) を中心として振動していることに起因している。

図 2.20 から図 2.22 に、円板の半径を  $a/\lambda = 6.0$  のときの電流分布を示す。この場合、図 2.20 の  $30[^\circ]$  では中心部分が平坦となるが、端部付近は垂直入射と変わらない。さらに入射角を図 2.21、図 2.22 と大きくすると、端部付近も平坦となり、 $60[^\circ]$  では端部付近以外ほとんど平坦となってしまうことがわかる。

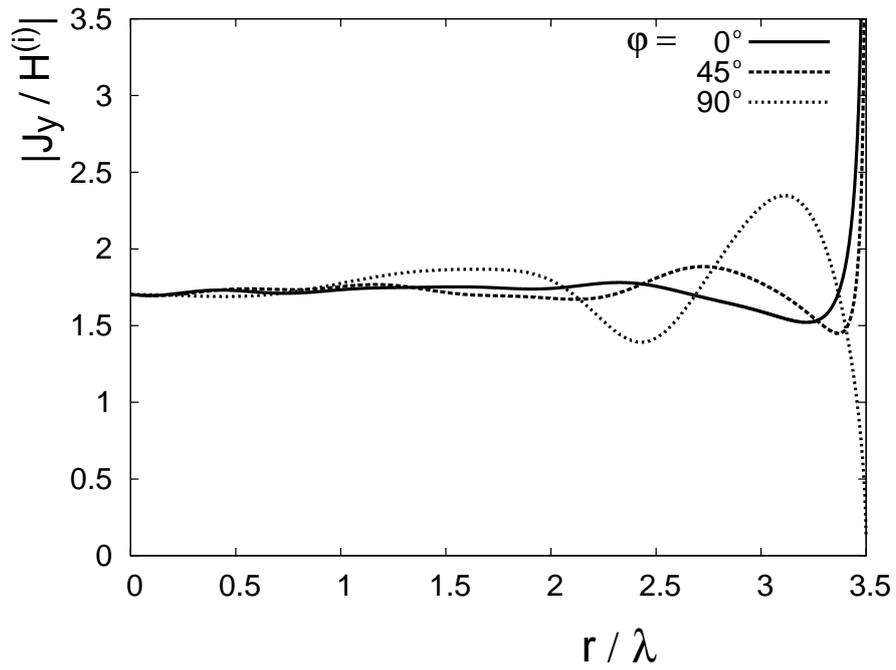


図 2.17: 斜め入射における電流分布 ( $a/\lambda = 3.5$ , 入射角 30 度)

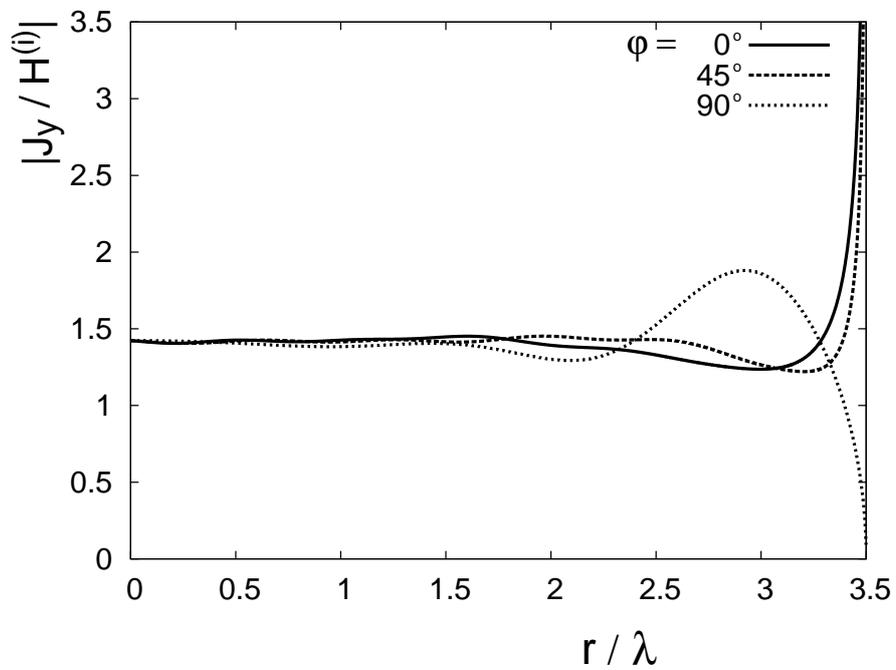


図 2.18: 斜め入射における電流分布 ( $a/\lambda = 3.5$ , 入射角 45 度)

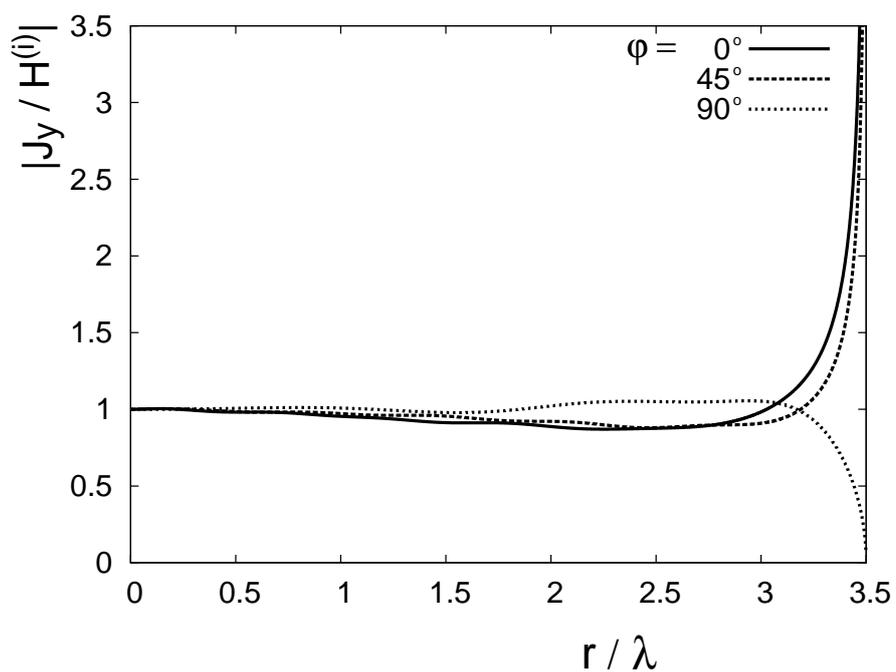


図 2.19: 斜め入射における電流分布 ( $a/\lambda = 3.5$ , 入射角 60 度)

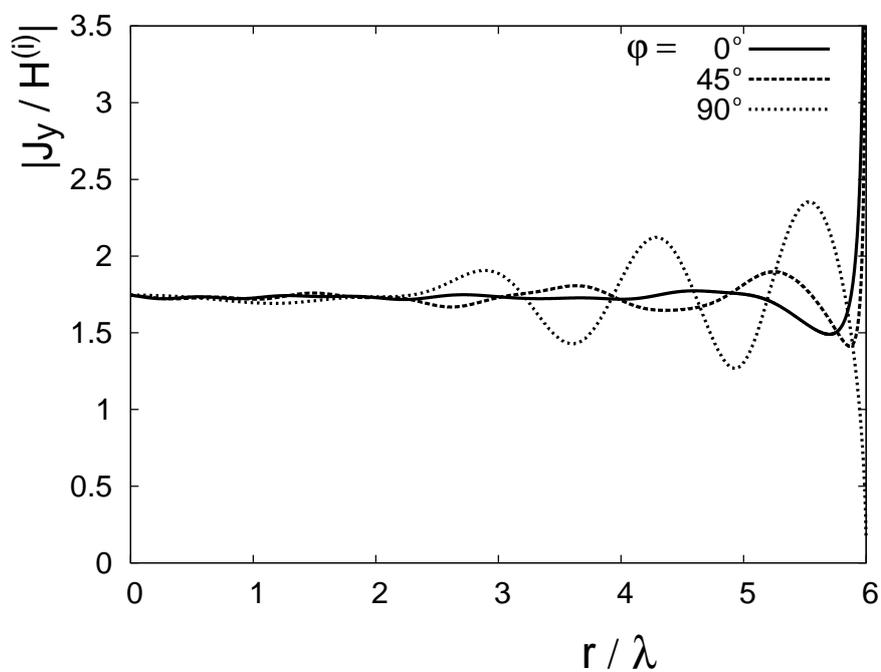


図 2.20: 斜め入射における電流分布 ( $a/\lambda = 6.0$ , 入射角 30 度)

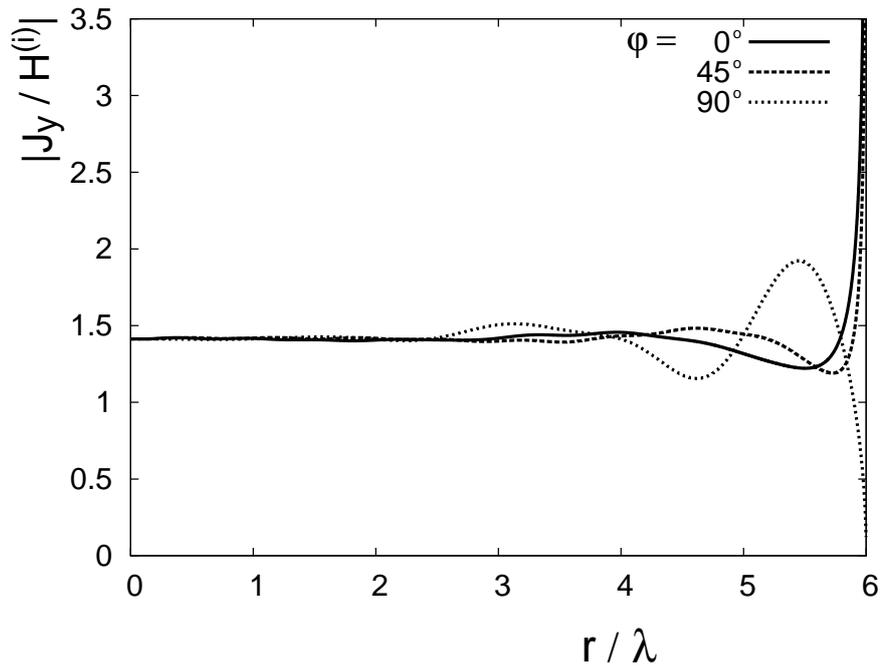


図 2.21: 斜め入射における電流分布 ( $a/\lambda = 6.0$ , 入射角 45 度)

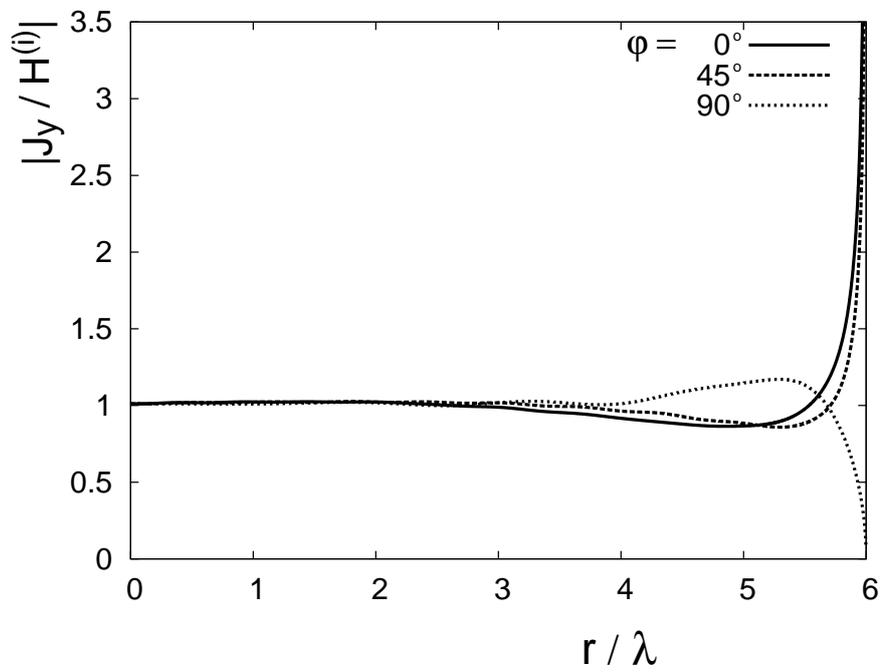


図 2.22: 斜め入射における電流分布 ( $a/\lambda = 6.0$ , 入射角 60 度)

### 2.6.3 別法との比較

#### (1) 高周波近似との比較

まず，円板が大きい場合の本手法と，高周波近似による結果とを比較する．円板の半径が  $a/\lambda = 6.0$  で垂直入射での図 2.15 の結果と，等価端部電磁流源からの寄与を円周に沿って数値積分した回折波と物理光学波の和で近似した高周波近似電流 [5] とを比較したものを図 2.23 に示す．図では，両者の差がわかりづらいので，中心軸上と最大値付近の様子を拡大して示している．図より，両者ともに物理光学近似である 2 を中心に振動しており，ほぼ一致していることが確認できる．また，拡大図を見ると，円板中心での差は 0.05 程度であり，両者の一致がよくわかる．一方， $r/\lambda = 5.6$  付近ではその差は 0.1 と少し大きくなっていることが確認できる．

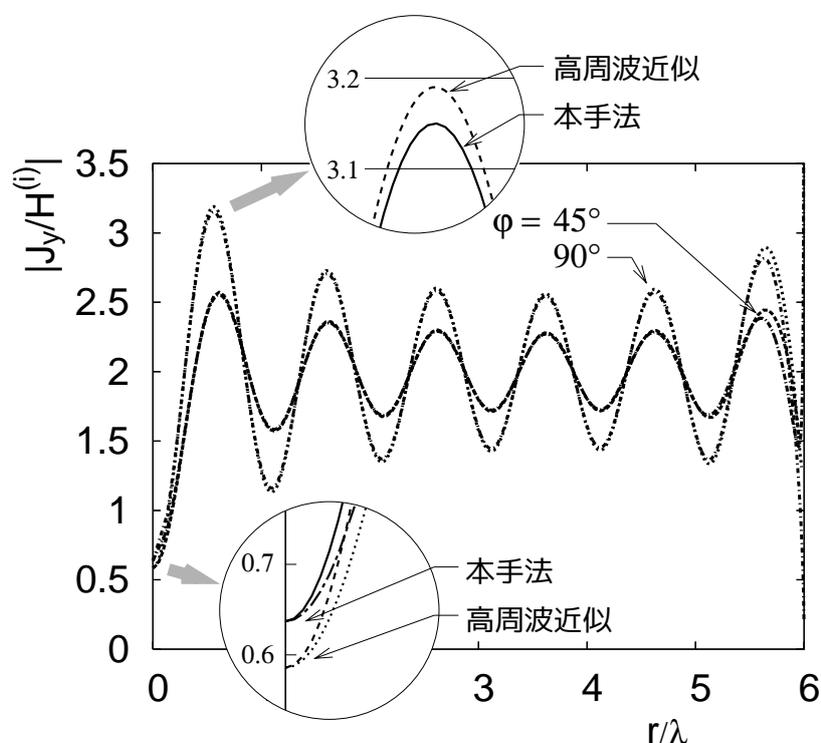


図 2.23: 本計算と高周波近似での電流分布 ( $a/\lambda = 6.0$ )

(2) モーメント法との比較

次に、同じく垂直入射で円板の半径が  $a/\lambda = 2.5$  における、モーメント法 [6] と本手法による電流計算の比較を図 2.24 に示す。図中の「on the x,y axis」はモーメント法での結果、「on x,y axis[centroid]」が文献 [7] で提案しているモーメント法での結果である。図より、本手法と 2 つの手法のモーメント法はよく一致している。序論の表 1.1 より、モーメント法はこの波長では適用可能であるが適切ではないと評価されていたが、よく一致している。しかしながら、円板端部 ( $r/\lambda = 2.5$ ) 付近で一致していないことが、適切でないという評価になっていると言える。

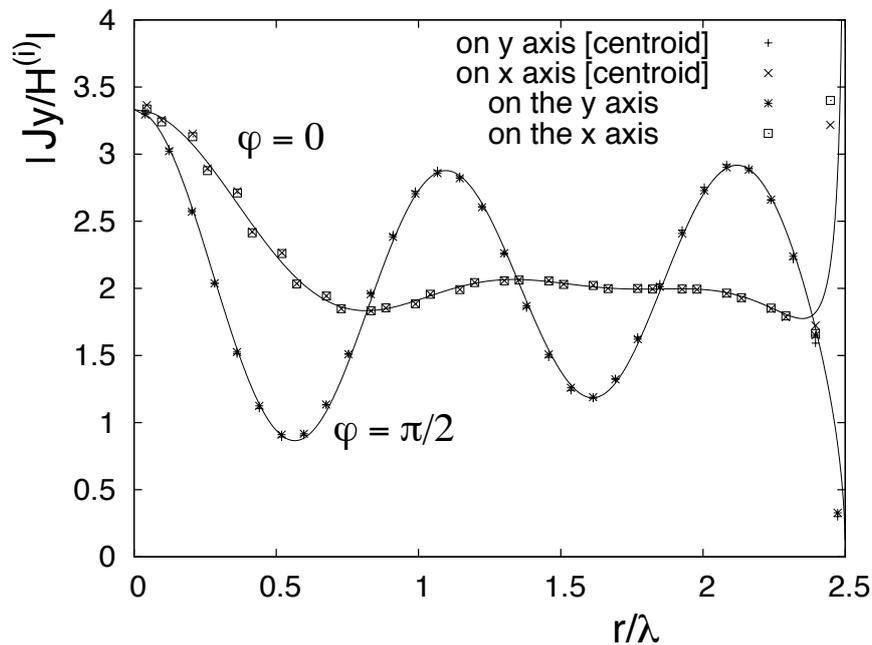


図 2.24: モーメント法と本手法での電流分布 ( $a/\lambda = 2.5$ )

## (3)FD-TD 法との比較

最後に，FD-TD 法と本手法による電流との比較を図 2.25 から 2.26 に示す．図 2.25 は 3.5，2.26 は 4.0 での結果である．また，図中の「rigorous」は本手法，「FD-TD」は FD-TD 法によるものである．ただし，「FD-TD」は分割幅を  $\lambda/20$  として計算している．図より，3.5 ではよく一致しているが，4.0 では中心部と端部で一致しているがそれ以外の場所では一致していない．この差は序論で議論したように，FD-TD 法が分割できる格子の大きさで精度が決定するために，同じ分割数で解析を行った今回の比較では，より高周波な  $a/\lambda = 4.0$  の方が大きく生じたものと考えられる．また，このことは， $a/\lambda$  が大きくなるにつれてその差は大きくなっていくと考えられる．

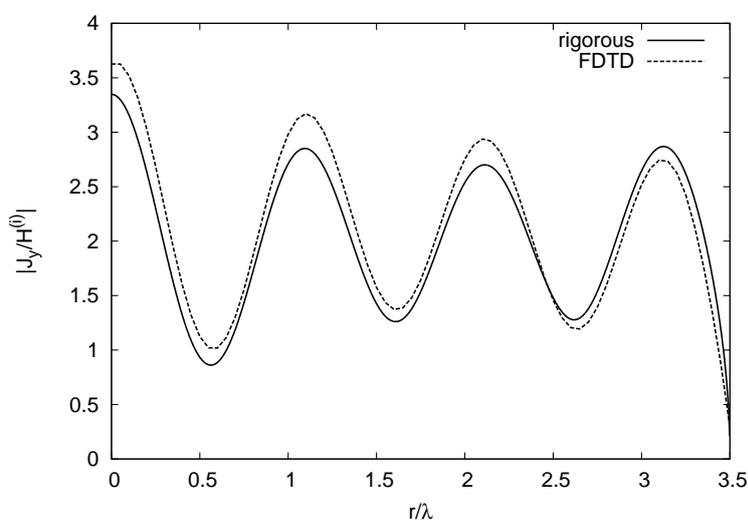


図 2.25: FD-TD 法と本手法での電流分布 ( $a/\lambda = 3.5$ ，FD-TD 分割幅: $\lambda/20$ )

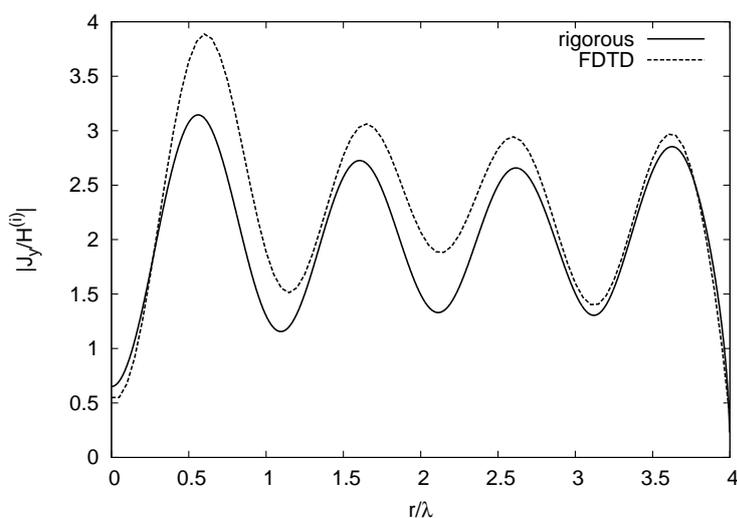


図 2.26: FD-TD 法と本手法での電流分布 ( $a/\lambda = 4.0$ ，FD-TD 分割幅: $\lambda/20$ )

### 2.6.4 遠方散乱界

図 2.27 に、垂直入射に対する散乱界の電界分布について示す。図では、 $a/\lambda = 3.5$ 、 $\varphi = 0$  および  $90^\circ$  としている。なお、 $\varphi = 0$  の場合  $E_\theta = 0$  であり、 $\varphi = 90$  の場合  $E_\varphi = 0$  であるので、それぞれ  $\varphi = 0$  での  $E_\varphi$ 、 $\varphi = 90^\circ$  での  $E_\theta$  を表している。図において、横軸は観測角  $\theta$ 、縦軸は垂直入射時の後方 ( $\theta = 0$ ) での物理光学界で規格化した電界強度  $E$  である。 $\varphi = 0$  および  $90^\circ$  のいずれの場合も  $\theta = 0$  付近での散乱界、すなわちメインローブではほぼ同じ値を示している。さらに、メインローブとサイドローブのピークの数、 $a/\lambda$  の 2 倍であることがわかる。一方、 $\varphi = 0^\circ$  のときの  $E_\varphi$  に着目すると、 $\theta = 60 \sim 90^\circ$  と変化しても、電界強度が  $-40$ [dB] 一定である。また、 $\varphi = 0^\circ$  のときは、0 となっていないために散乱界は下がっていない。これに対し、 $\varphi = 90^\circ$  のときの  $E_\theta$  は  $\theta = 90^\circ$  付近で、 $-60$ [dB] 以下と大きく減衰する。これは、式 (2.130) および (2.132)、(2.133) より、 $H_\varphi = 0$  となるので  $E_\theta = 0$  となるためである。

次に、 $a/\lambda = 4.0$  における電界分布の計算結果を図 2.28 に示す。さらに、 $a/\lambda = 6.0$  の場合を図 2.29 に示す。いずれの結果も、 $a/\lambda = 3.5$  と同様に、 $\theta = 0$  付近での散乱界はほぼ同じ値を示し、さらにメインローブとサイドローブのピーク数は、 $a/\lambda$  の 2 倍である。

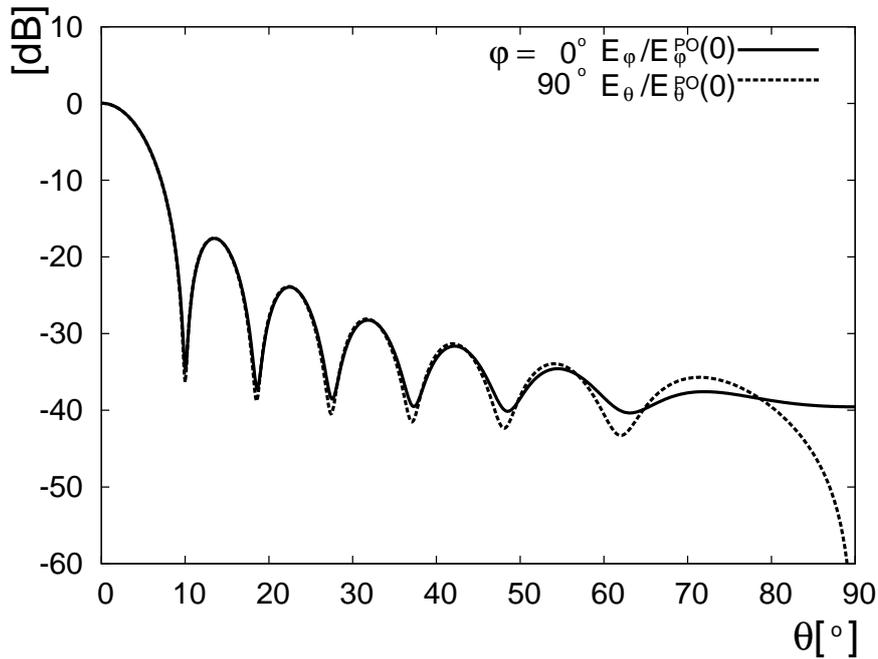


図 2.27: 垂直入射に対する散乱界 ( $a/\lambda = 3.5$ )

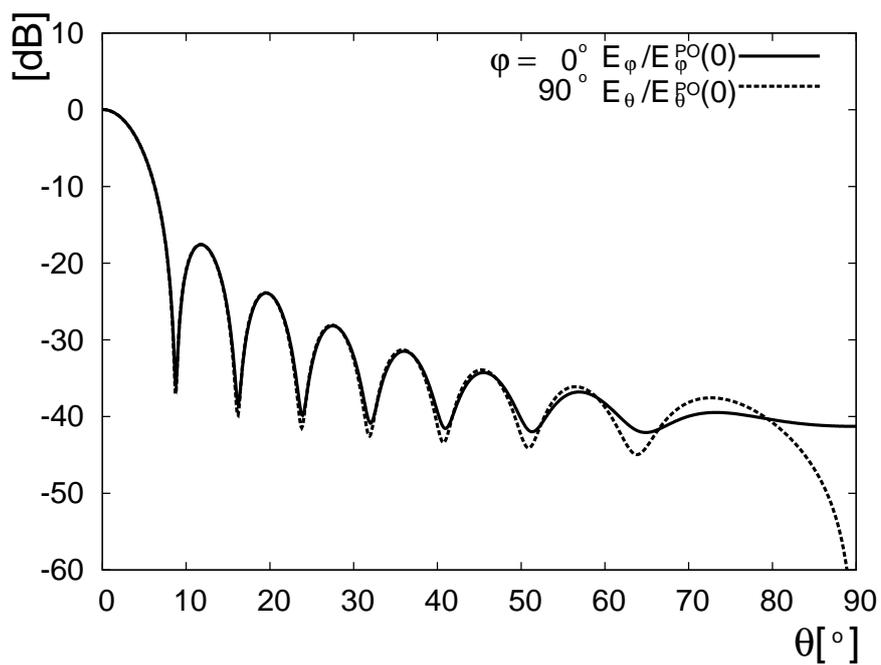


図 2.28: 垂直入射に対する散乱界 ( $a/\lambda = 4.0$ )

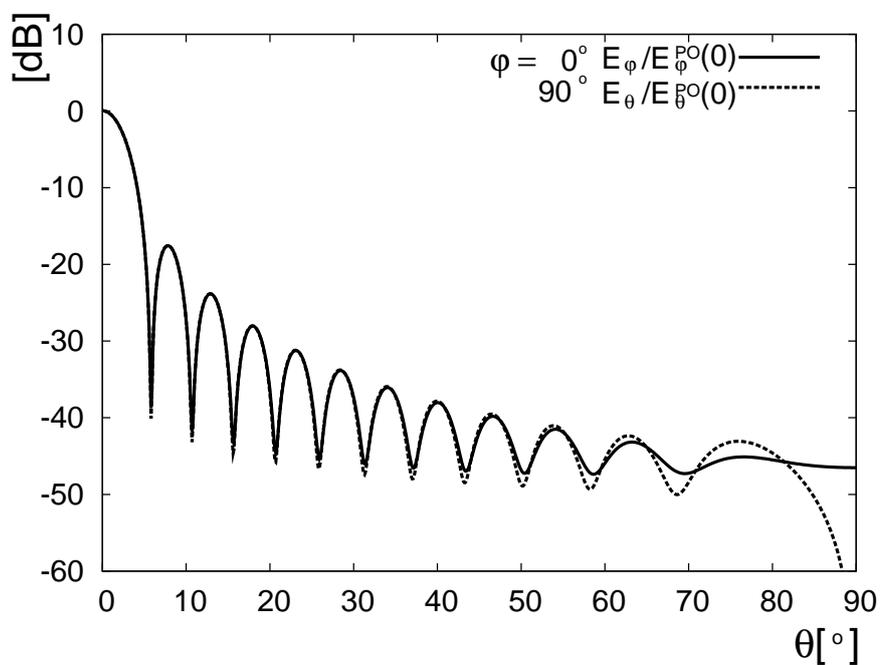


図 2.29: 垂直入射に対する散乱界 ( $a/\lambda = 6.0$ )

## 2.7 むすび

本章では、平面波を波源とする完全導体円板による散乱界の検討を行い、計算精度を考慮する上で多倍長精度計算法を適用して、従来法では良好な計算結果が得られなかった原因を探った。以下、本章をまとめる。

- まず、Nomura と Katsura の手法に従って、数式表現などの表記を整理しながら電磁界の解析方法について詳しく述べた。
- 次に、多倍長数値計算を円滑に進めるために、GMP++ と MPFR ライブラリのインターフェイスを作成した。GMP および MPFR の特徴を生かし、数学ライブラリ関数の利用および四則演算の利用の簡易化を実現した。
- さらに、展開係数を計算するための  $G_{\ell,m}^n$  の構成要素である  $g_1(p, q)$  および  $g_2(p, q)$  の級数計算の計算精度について調査した。その結果、この計算過程において計算精度が低下が見られ、その原因は桁落ちにあり、それは多倍長精度数値計算で防ぐことが可能であった。
- これらの検証を考慮して、電流分布の計算を行った。垂直入射の場合、電流は物理光学近似の結果を中心に円板の半径と波長の比の周期で振動する。また中心部分の電流は、円板の半径が整数波長の場合は極小値、半整数波長の場合は極大値となることを明らかにした。
- 次に、斜め入射の場合の電流分布の計算を行った。この場合も物理光学近似界を中心に振動するが、円板の端部で振動が大きく、中心部で小さくなることを明らかにした。また、入射角が大きくなるほどその振幅は小さくなることを明らかにした。
- さらに、高周波近似、モーメント法、FD-TD 法での結果と本手法での結果と比較し、結果の妥当性を確認した。
- 最後に、遠方散乱界の計算を行い、電流分布計算での結果を反映した結果が得られた。

## 参考文献

- [1] Y. Nomura, and S. Katsura, “Diffraction of electromagnetic waves by circular plate and circular hole,” J. Physical Society of Japan, vol.10, no.4, pp.285-304, Apr 1955.
- [2] GNU MP-The GNU Multiple Precision Arithmetic Library, version 4.2.1, 2006.
- [3] MPFR-The Multiple Precision Floating-Point Reliable Library, version 2.2.0, 2006.
- [4] J. Bowman, T. Senior, and P. Usleghi, Electromagnetic and Acoustic Scattering by Simple Shapes, Chapter 8 Half-plane p.321 Fig. 8.12, 8.13, Hemisphere Publishing Corporation, New York, 1987.
- [5] E. Yamashita, Analysis Methods of Electromagnetic Wave Problems, Artech House, 1990.
- [6] R.F. Harrington, Field Computation by Moment Methods, Wiley-IEEE Press, 1993.
- [7] 柴崎年彦, 近藤久純, 黒木啓之, 木下照弘, “平面波入射により生じる完全導体円板上の誘導電流の数値計算 –モーメント法・FDTD 法と精密解の比較–” 電気学会, 第 39 回電磁界理論シンポジウム講演論文集, EMT-10-134, pp.13-18, Nov. 2010.



# 第3章 水平微小ダイポールを波源とする 完全導体円板による散乱

## 3.1 はじめに

前章では、Nomura と Katsura[1] の手法を用い、多倍長精度数値計算法を導入して、平面波入射において波長と比較して大きな導体円板の計算を可能とした。

Inawashiro[2] は同様の解析方法を用い、波源が円板に対して水平を向いた電氣的微小ダイポールの場合についての解析を行っている。ここでは、波源が中心軸上にある場合に限って級数形式での表現が示されている。

また Inawashiro[2] や Hongo ら [3] では、数値例は波長に対する円板の半径が1程度までが示されており、円板の半径が大きい場合の数値例はこれまで示されていない。

そこで本章では、水平方向に偏波した電氣的微小ダイポールの場合の解析方法を検討する。特に波源が中心軸上から外れている場合について解析を一般化し、その特性についても議論する。また同時に、波長と比較して大きな導体円板での数値計算を行い、その物理的特性について検討する。

## 3.2 問題の設定

図 3.1 のように、 $z = 0$  の  $x-y$  平面に原点を中心とした半径  $a$  の非常に薄い完全導体円板が置かれており、さらに  $x$  軸方向を向く、円板に対して平行な電氣的微小ダイポール（以下、これを水平微小ダイポールと呼ぶ）波源  $Idl$  が  $(x_0, y_0, z_0)$  に置かれた場合の電磁界分布を求める。ここでは、電界  $E$  および磁界  $H$  を入射界  $E^{(i)}$ ,  $H^{(i)}$  と散乱界  $E^{(s)}$ ,  $H^{(s)}$  に分けて、

$$E = E^{(i)} + E^{(s)} \quad (3.1)$$

$$H = H^{(i)} + H^{(s)} \quad (3.2)$$

とし、水平ダイポール波源からの放射界を入射界としたときの散乱界を求めることにする。

入射界の電氣的ヘルツベクトルを  $\Pi^{(i)}$ 、散乱界の電氣的ヘルツベクトルを  $\Pi^{(s)}$  とすると、界全体の電氣的ヘルツベクトル  $\Pi$  は、

$$\Pi = \Pi^{(i)} + \Pi^{(s)} \quad (3.3)$$

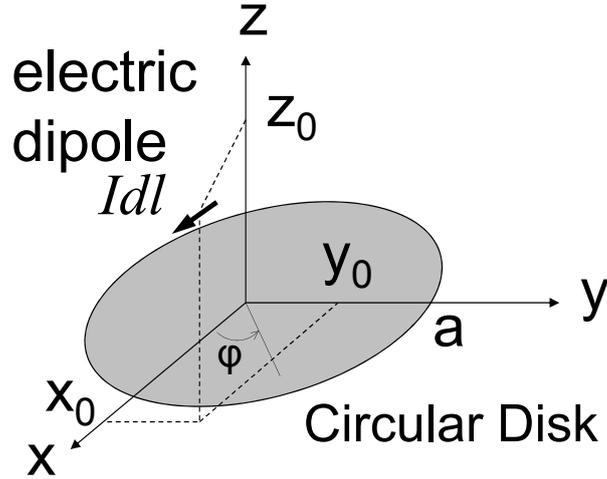


図 3.1: 導体円板と座標系

と表すことができる。

このヘルツベクトルを用いることで，式 (A.1)，(A.2) より，電界及び磁界は次のように表すことができる。

$$\mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{\Pi}) + k^2 \mathbf{\Pi} \quad (3.4)$$

$$\mathbf{H} = \frac{jk}{\eta} \nabla \times \mathbf{\Pi} \quad (3.5)$$

ここでヘルツベクトル  $\mathbf{\Pi}$  は，Helmholtz 方程式

$$\nabla^2 \mathbf{\Pi} + k^2 \mathbf{\Pi} = 0 \quad (3.6)$$

を満足し，さらに，電界の  $x, y$  成分  $E_x, E_y$  および磁界の  $z$  成分  $H_z$  に対する境界条件

$$E_x = E_x^{(i)} + E_x^{(s)} = 0 \quad (3.7)$$

$$E_y = E_y^{(i)} + E_y^{(s)} = 0 \quad (3.8)$$

$$H_z = H_z^{(i)} + H_z^{(s)} = 0 \quad (z = 0, \sqrt{x^2 + y^2} < a) \quad (3.9)$$

と，付録 A.2 式 (A.6)，(A.8) より，磁界の  $H_\varphi, H_\theta$  成分に対する端点条件

$$H_\varphi = O(\delta^{\frac{1}{2}}) \quad (3.10)$$

$$H_\theta = O(\delta^{-\frac{1}{2}}) \quad (\delta = \sqrt{(a - \sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2} \rightarrow 0) \quad (3.11)$$

を満足する。

### 3.3 解析

水平微小ダイポールに対する解析は，問題の設定を第 2 章の平面波波源の場合と比較すると，入射波が異なるのみであることから，その解析方法は入射界の表現以外，平面波と同じ

である．したがって，ここでは円板上での水平微小ダイポールに対する入射界の表現のみを詳しく説明し，その他の内容および式の表現は簡単に説明する．

### 3.3.1 ヘルツベクトルによる入射界と散乱界の表現

$(x_0, y_0, z_0)$  に置かれた，水平微小ダイポール  $Idl$  の入射界の電氣的ヘルツベクトル  $\Pi^{(i)}$  は，波源が  $x$  方向を向いているため  $x$  成分のみで，

$$\mathbf{\Pi}^{(i)} = (\Pi_x^{(i)}, 0, 0) \quad (3.12)$$

$$\Pi_x^{(i)} = a\Pi_0 \frac{e^{-jkR}}{R}, \quad \Pi_0 = \frac{\eta Idl}{4\pi jka} \quad (3.13)$$

$$R = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} \quad (3.14)$$

と表される．ここで，

$$x_0 \geq 0, \quad y_0 \geq 0, \quad z_0 > 0,$$

と制限しても一般性を失うことはないので，以降これを用いて解析する．

また，導体円板上の誘導電流は  $z$  成分を持たないので，散乱界も  $x$  および  $y$  成分のみを持つ電氣的ヘルツベクトルを用いて次のように表すことができる．

$$\mathbf{\Pi}^{(s)} = (\Pi_x^{(s)}, \Pi_y^{(s)}, 0) \quad (3.15)$$

さらに散乱界のヘルツベクトルは，

$$\Pi_x^{(s)} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_n S_m^n(r, z) \{A_m^n \cos n\varphi + B_m^n \sin n\varphi\} \quad (3.16)$$

$$\Pi_y^{(s)} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_n S_m^n(r, z) \{C_m^n \cos n\varphi + D_m^n \sin n\varphi\} \quad (3.17)$$

$$\Pi_z^{(s)} = 0 \quad (3.18)$$

と展開できる．ただし， $S_m^n(r, z)$  は第2章式(2.21)であり，文献[1]で示されている波動方程式の固有関数であり，導体円板表面を除いて，導関数も含めて連続な性質を持っている．また， $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ， $\varphi = \tan^{-1}(y/x)$  であり，式中の  $\epsilon_n$  は，

$$\epsilon_n = \begin{cases} 1 & (n=0) \\ 2 & (n \neq 0) \end{cases}$$

である．さらに，

$$B_m^0 = D_m^0 = 0$$

としておく． $A_m^n, B_m^n, C_m^n, D_m^n$  は展開係数である．また，これ以降，

$$h = \frac{z_0}{a} > 0, \quad t_0 = \frac{x_0^2 + y_0^2}{a^2}, \quad t = \frac{r^2}{a^2}$$

として表現する．

### 3.3.2 展開係数と連立方程式の係数

展開係数は、第 2 章同様の方法で求めることができる。

$z = 0, r < a$  での散乱界のヘルツベクトル  $\Pi_x^{(s)}, \Pi_y^{(s)}$  を波源からの界を打ち消す項と端点条件を満足させるための補正項に分割し、さらに補正項に対しスカラ関数  $U(x, y)$  を用いると、第 2 章の式 (2.33), (2.34) と同様に、

$$\Pi_x^{(s)} = \frac{\partial U(x, y)}{\partial x} - \Pi_x^{(i)}(x, y, 0) \quad (3.19)$$

$$\Pi_y^{(s)} = \frac{\partial U(x, y)}{\partial y} \quad (3.20)$$

と表すことができる。ただし、 $r = 0$  で有界な解は、付録 A.3 の式 (A.9) より

$$U(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n J_n(kr) \{U_n^{(e)} \cos n\varphi + U_n^{(o)} \sin n\varphi\} \quad (3.21)$$

と表される。ここで、 $U_n^{(e,o)}$  は任意の定数である。

第 2 章の式 (2.35), (2.36) と同様に、式 (A.14), (A.15) より、この  $U(r, \varphi)$  を利用し、直角座標の微分から円筒座標の微分に変換し、式 (3.19), (3.20) の第 1 項は、

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{k}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n J_n(kr) \left[ (U_{n+1}^{(e)} - U_{n-1}^{(e)}) \cos n\varphi + (U_{n+1}^{(o)} - U_{n-1}^{(o)}) \sin n\varphi \right] \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{k}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n J_n(kr) \left[ (U_{n+1}^{(o)} + U_{n-1}^{(o)}) \cos n\varphi - (U_{n+1}^{(e)} + U_{n-1}^{(e)}) \sin n\varphi \right] \quad (3.23)$$

と導出できる。ただし、

$$U_{-1}^{(e)} = -U_1^{(e)}, \quad U_{-1}^{(o)} = U_1^{(o)}, \quad U_0^{(o)} = 0$$

である。

式 (3.19) の入射界  $\Pi_x^{(i)}(x, y, 0)$  をフーリエ級数展開すると、

$$\Pi_x^{(i)}(x, y, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \left[ \Pi_x^{(i)e} \cos n\varphi + \Pi_x^{(i)o} \sin n\varphi \right] \quad (3.24)$$

と表すことができる。

次に、式 (3.16), (3.17) において  $z = 0$  と置き、さらに式 (3.22), (3.23) および式 (3.24) を整合すると、第 2 章式 (2.49) から (2.52) と同様に、

$$\sum_{m=0}^{\infty} G_{\ell,m}^n A_m^n = \Pi_x^{(e)} \ell^n + \frac{k}{2} (U_{n+1}^{(e)} - U_{n-1}^{(e)}) f_\ell^n \quad (3.25)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} G_{\ell,m}^n B_m^n = \Pi_x^{(o)} \ell^n + \frac{k}{2} (U_{n+1}^{(o)} - U_{n-1}^{(o)}) f_\ell^n \quad (3.26)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} G_{\ell,m}^n C_m^n = \frac{k}{2} (U_{n+1}^{(o)} + U_{n-1}^{(o)}) f_\ell^n \quad (3.27)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} G_{\ell,m}^n D_m^n = -\frac{k}{2} (U_{n+1}^{(e)} + U_{n-1}^{(e)}) f_\ell^n \quad (3.28)$$

と展開係数に関する方程式が得られる．ただし， $G_{\ell,m}^n, f_\ell^n$  は付録 A.7 の式 (A.37)–(A.40) より得られる．

式 (3.25) から (3.28) は， $A_m^n - D_m^n$  についての連立方程式をマトリクス方程式で表現すると，第 2 章式 (2.57) から (2.60) と同様にして，

$$[G_{\ell,m}^n] [A_m^n] = \left[ \Pi_x^{(e)n} \right] + \frac{k}{2} (U_{n+1}^{(e)} - U_{n-1}^{(e)}) [f_m^n] \quad (3.29)$$

$$[G_{\ell,m}^n] [B_m^n] = \left[ \Pi_x^{(o)n} \right] + \frac{k}{2} (U_{n+1}^{(o)} - U_{n-1}^{(o)}) [f_m^n] \quad (3.30)$$

$$[G_{\ell,m}^n] [C_m^n] = \frac{k}{2} (U_{n+1}^{(o)} + U_{n-1}^{(o)}) [f_m^n] \quad (3.31)$$

$$[G_{\ell,m}^n] [D_m^n] = -\frac{k}{2} (U_{n+1}^{(e)} + U_{n-1}^{(e)}) [f_m^n] \quad (3.32)$$

となる．これらの両辺に  $[G_{\ell,m}^n]$  の逆マトリクスを掛けると，

$$[A_m^n] = \left[ \widetilde{A}_m^n \right] + \frac{k}{2} (U_{n+1}^{(e)} - U_{n-1}^{(e)}) \left[ \widetilde{f}_m^n \right] \quad (3.33)$$

$$[B_m^n] = \left[ \widetilde{B}_m^n \right] + \frac{k}{2} (U_{n+1}^{(o)} - U_{n-1}^{(o)}) \left[ \widetilde{f}_m^n \right] \quad (3.34)$$

$$[C_m^n] = \frac{k}{2} (U_{n+1}^{(o)} + U_{n-1}^{(o)}) \left[ \widetilde{f}_m^n \right] \quad (3.35)$$

$$[D_m^n] = -\frac{k}{2} (U_{n+1}^{(e)} + U_{n-1}^{(e)}) \left[ \widetilde{f}_m^n \right] \quad (3.36)$$

となり展開係数が求まる．ただし，

$$\left[ \widetilde{A}_m^n \right] = [G_{\ell,m}^n]^{-1} \left[ \Pi_x^{(e)n} \right] \quad (3.37)$$

$$\left[ \widetilde{B}_m^n \right] = [G_{\ell,m}^n]^{-1} \left[ \Pi_x^{(o)n} \right] \quad (3.38)$$

$$\left[ \widetilde{f}_m^n \right] = [G_{\ell,m}^n]^{-1} [f_\ell^n] \quad (3.39)$$

である．

さらに  $U_n^{(e)}, U_n^{(o)}$  は端点条件式 (3.11) より，第 2 章式 (2.89), (2.91) と同様に，

$$kU_n^{(e)} = \frac{\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left\{ \widetilde{A}_m^{n-1} + \widetilde{A}_m^{n+1} \right\}}{\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left\{ \widetilde{f}_m^{n-1} - \widetilde{f}_m^{n+1} \right\}} \quad (n \geq 0) \quad (3.40)$$

$$kU_n^{(o)} = \frac{\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left\{ \widetilde{B}_m^{n-1} + \widetilde{B}_m^{n+1} \right\}}{\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left\{ \widetilde{f}_m^{n-1} - \widetilde{f}_m^{n+1} \right\}} \quad (n \geq 1) \quad (3.41)$$

と表される．ただし， $\widetilde{A}_m^{-1} = \widetilde{A}_m^1, \widetilde{B}_m^{-1} = -\widetilde{B}_m^1$  である．

## 3.3.3 導体円板上での入射界の表現

次に，入射界に関連する式  $\Pi_x^{(e,o)\ell n}$  について整理する．

式 (A.64) より，円板表面 ( $z = +0$ ) における，入射界のヘルツベクトル式 (3.13) を円筒座標系で表すと，

$$\begin{aligned}\Pi_x^{(i)} &= \Pi_0^{(i)} \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n I_n(t) \cos n(\varphi - \varphi_0) \\ &= \Pi_0^{(i)} \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n I_n(t) (\cos n\varphi_0 \cos n\varphi + \sin n\varphi_0 \sin n\varphi)\end{aligned}\quad (3.42)$$

となる．ただし， $\varphi_0 = \tan^{-1} x_0/y_0$  であり，

$$I_n(t) = \int_0^{\infty} \frac{\xi e^{-h\sqrt{\xi^2 - \gamma^2}}}{\sqrt{\xi^2 - \gamma^2}} J_n(\xi\sqrt{t}) J_n(\xi\sqrt{t_0}) d\xi \quad (3.43)$$

である． $\Pi_x^{(i)(e)}$ ， $\Pi_x^{(i)(o)}$  は，式 (3.24) と (3.43) を比較することで，この  $I_n(t)$  を用いて，

$$\Pi_x^{(i)(e)} = \Pi_0 I_n(t) \cos n\varphi_0 \quad (3.44)$$

$$\Pi_x^{(i)(o)} = \Pi_0 I_n(t) \sin n\varphi_0 \quad (3.45)$$

と表すことができる．

ここで， $0 < t < 1$  において直交完備な関数列  $u_m^n(t)$  で  $I_n(t)$  を展開する．式 (A.21) を  $I_n(t)$  に適用すると，

$$I_n(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \widetilde{I}_n^m t^{n/2} u_m^n(t) \quad (3.46)$$

$$\widetilde{I}_n^m = \frac{(4m + 2n + 1)\Gamma(m + 1)\Gamma(m + n + 1)}{\Gamma(n + m + \frac{1}{2})} \int_0^1 \frac{t^{n/2}}{\sqrt{1-t}} \times u_m^n(t) I_n(t) dt \quad (3.47)$$

となる． $\widetilde{I}_n^m$  は式 (3.43) の  $I_n(t)$  を代入すると，

$$\begin{aligned}\widetilde{I}_n^m &= \frac{(4m + 2n + 1)\Gamma(m + 1)\Gamma(m + n + 1)}{\Gamma(n + \frac{1}{2})} \\ &\times \int_0^1 \frac{t^{n/2}}{\sqrt{1-t}} u_m^n(t) \int_0^{\infty} \frac{\xi e^{-h\sqrt{\xi^2 - \gamma^2}}}{\sqrt{\xi^2 - \gamma^2}} J_n(\xi\sqrt{t}) J_n(\xi\sqrt{t_0}) d\xi dt\end{aligned}\quad (3.48)$$

となる． $\xi$  と  $t$  に関する積分を入れ替え，式 (A.24) の Bessel 関数の展開式を使って  $t$  の積分

を行うと,  $\widetilde{I}_n^m$  は

$$\begin{aligned}
\widetilde{I}_n^m &= \frac{(4m+2n+1)\Gamma(m+1)\Gamma(m+n+1)}{\Gamma(n+m+\frac{1}{2})} \int_0^\infty \frac{\xi e^{-h\sqrt{\xi^2-\gamma^2}}}{\sqrt{\xi^2-\gamma^2}} J_n(\xi\sqrt{t_0}) \\
&\quad \times \int_0^1 \frac{t^{n/2}}{\sqrt{1-t}} \times u_m^n(t) J_n(\xi\sqrt{t}) dt d\xi \\
&= \frac{(4m+2n+1)\Gamma(m+1)\Gamma(m+n+1)}{\Gamma(n+m+\frac{1}{2})} \int_0^\infty \frac{\xi e^{-h\sqrt{\xi^2-\gamma^2}}}{\sqrt{\xi^2-\gamma^2}} J_n(\xi\sqrt{t_0}) \\
&\quad \times \frac{\Gamma(m+\frac{1}{2})\Gamma(n+m+\frac{1}{2})}{\sqrt{2}\Gamma(m+1)\Gamma(n+m+1)} \sqrt{\frac{2}{\xi}} J_{n+2m+\frac{1}{2}}(\xi) d\xi \\
&= (4m+2n+1)\Gamma(m+\frac{1}{2}) \int_0^\infty \frac{\sqrt{\xi} J_n(\xi\sqrt{t_0}) J_{n+2m+\frac{1}{2}}(\xi)}{\sqrt{\xi^2-\gamma^2}} e^{-h\sqrt{\xi^2-\gamma^2}} d\xi \quad (3.49)
\end{aligned}$$

と表すことができる.

この式を式 (3.46) に代入し, 付録 A.5 の  $u_\ell^n(t)$  の直交性を用いると, 入射界の展開係数である式 (3.37) および (3.38) 中の  $\Pi_x^{(e)\ell n}$  は以下ようになる.

$$\begin{aligned}
\Pi_x^{(e)\ell n} &= -\frac{\Gamma(n+\ell+\frac{1}{2})\Gamma(\ell+\frac{1}{2})}{\Gamma(n+\ell+1)\Gamma(\ell+1)} \int_0^1 \frac{t^{n/2}}{\sqrt{1-t}} u_\ell^n(t) \Pi_0 I_n(t) \cos n\varphi_0 dt \\
&= -\frac{\Gamma(n+\ell+\frac{1}{2})\Gamma(\ell+\frac{1}{2})}{\Gamma(n+\ell+1)\Gamma(\ell+1)} \int_0^1 \frac{t^{n/2}}{\sqrt{1-t}} u_\ell^n(t) \Pi_0 \sum_{m=0}^\infty \widetilde{I}_m^n t^{n/2} u_m^n(t) \cos n\varphi_0 dt \\
&= -\frac{\Gamma(n+\ell+\frac{1}{2})\Gamma(\ell+\frac{1}{2})}{\Gamma(n+\ell+1)\Gamma(\ell+1)} \Pi_0 \widetilde{I}_\ell^n \int_0^1 \frac{t^n}{\sqrt{1-t}} u_\ell^n(t) u_\ell^n(t) \cos n\varphi_0 dt \\
&= -\frac{\Gamma(n+\ell+\frac{1}{2})\Gamma(\ell+\frac{1}{2})}{\Gamma(n+\ell+1)\Gamma(\ell+1)} \Pi_0 \widetilde{I}_\ell^n \frac{\Gamma(n+\ell+\frac{1}{2})}{(4\ell+2n+1)\Gamma(\ell+1)\Gamma(n+\ell+1)} \cos n\varphi_0 \\
&= \Pi_0 F_\ell^n \cos n\varphi_0 \quad (3.50)
\end{aligned}$$

ただし,

$$F_\ell^n = \int_0^\infty \frac{\sqrt{\xi} J_n(\xi\sqrt{t_0}) J_{n+2\ell+\frac{1}{2}}(\xi)}{\sqrt{\xi^2-\gamma^2}} e^{-h\sqrt{\xi^2-\gamma^2}} d\xi \quad (3.51)$$

とした.

同様にして,  $\Pi_x^{(o)\ell n}$  は

$$\begin{aligned}
\Pi_x^{(o)\ell n} &= -\frac{\Gamma(n+\ell+\frac{1}{2})\Gamma(\ell+\frac{1}{2})}{\Gamma(n+\ell+1)\Gamma(\ell+1)} \int_0^1 \frac{t^{n/2}}{\sqrt{1-t}} u_\ell^n(t) \Pi_0 \frac{I_n(t)}{a} \sin n\varphi_0 dt \\
&= \Pi_0 F_\ell^n \sin n\varphi_0 \quad (3.52)
\end{aligned}$$

と表される.

## 3.3.4 級数展開

文献 [2] では，波源を中心軸上に限定し， $t_0 = 0$  として式 (3.51) の  $F_\ell^n$  に対応した文献 [2] の式 (24) を得ている．本論文ではこれを一般化し，これまで行われていなかった波源が中心軸上から外れている場合，すなわち  $t_0 \neq 0$  として  $F_\ell^n$  を数値計算可能な級数形式に表現する．

Bessel 関数の積の級数展開 [4]

$$J_\mu(az)J_\nu(bz) = \frac{(az)^\mu(bz)^\nu}{2^{\mu+\nu}\Gamma(\nu+1)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{G_\nu(-\mu-2n, \nu+1; b^2/a^2)}{n!\Gamma(\mu+n+1)} \left(\frac{az}{2}\right)^{2n} \quad (3.53)$$

を式 (3.51) に用いると， $F_\ell^n$  は，

$$F_\ell^n = \frac{t_0^{n/2}}{2^{2n+2\ell+\frac{1}{2}}\Gamma(n+1)} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{G_\nu(-n-2\ell-2\nu-\frac{1}{2}, n+1; t_0)}{2^{2\nu}\nu!\Gamma(n+2\ell+\nu+n+\frac{3}{2})} \int_0^\infty \frac{\xi^{2n+2\ell+2\nu+1}}{\sqrt{\xi^2-\gamma^2}} e^{-h\sqrt{\xi^2-\gamma^2}} d\xi \quad (3.54)$$

と書き換えられる．ただし， $G_\nu(a, b; x)$  は Jacobi の多項式である．式中の無限積分は，以下のように変形できる． $\xi = \zeta\gamma$  と変形し， $\mu = n + \ell + \nu$ ， $\beta = \gamma h$  と置くと，

$$\int_0^\infty \frac{\xi^{2n+2\ell+2\nu+1}}{\sqrt{\xi^2-\gamma^2}} e^{-h\sqrt{\xi^2-\gamma^2}} d\xi = \zeta^{2\mu+1} \cdot I \quad (3.55)$$

と表される． $I$  は， $\sqrt{\zeta^2-1} = j\sqrt{1-\zeta^2}$  と置き，実数部と虚数部に分け，

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\infty \frac{\zeta^{2\mu+1}}{\sqrt{\zeta^2-1}} e^{-\beta\sqrt{\zeta^2-1}} d\zeta \\ &= -j \int_0^1 \frac{\zeta^{2\mu+1}}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-j\beta\sqrt{1-\zeta^2}} d\zeta + \int_1^\infty \frac{\zeta^{2\mu+1}}{\sqrt{\zeta^2-1}} e^{-\beta\sqrt{\zeta^2-1}} d\zeta \end{aligned} \quad (3.56)$$

となる．さらに，第 1 項では  $\sqrt{1-\zeta^2} = s$ ，第 2 項では  $\sqrt{\zeta^2-1} = s$  と変換すると，

$$\begin{aligned} I &= -j \int_0^1 (1-s^2)^\mu e^{-j\beta s} ds + \int_1^\infty (1+s^2)^\mu e^{-\beta s} ds \\ &= \int_1^\infty (1+s^2)^\mu e^{-\beta s} ds - \int_0^1 (1-s^2)^\mu \sin \beta s ds - j \int_0^1 (1-s^2)^\mu \cos \beta s ds \end{aligned} \quad (3.57)$$

となる．ここで，Bessel 関数の積分表示 [5] を用いることにより，

$$\begin{aligned} I &= -\frac{2^{\mu-\frac{1}{2}}\sqrt{\pi}\Gamma(\mu+1)}{\beta^{\mu+\frac{1}{2}}} Y_{\mu+\frac{1}{2}}(\beta) - \frac{1}{2}j \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\mu+1)}{(\beta/2)^{\mu+\frac{1}{2}}} J_{\mu+\frac{1}{2}}(\beta) \\ &= -\frac{j\sqrt{\pi}}{2} \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\mu+1)}{(\beta/2)^{\mu+\frac{1}{2}}} H_{\mu+\frac{1}{2}}^{(2)}(\beta) \end{aligned} \quad (3.58)$$

と変換できる．ただし， $H_\nu^{(2)}(x)$  は第 2 種 Hankel 関数を表す．これを利用して，式 (3.54) は次のように変形できる．

$$\begin{aligned}
F_\ell^n &= \frac{(t_0^{n/2})}{2^{2n+2\ell+\frac{1}{2}}\Gamma(n+1)} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{G_\nu(-n-2\ell-2\nu-\frac{1}{2}, n+1; t_0)}{2^{2\nu}\nu!\Gamma(n+2\ell+\nu+n+\frac{3}{2})} \gamma^{2n+2\ell+2\nu+1} \\
&\quad \times \left( -\frac{j\sqrt{\pi}\Gamma(n+\ell+\nu+1)}{2} \frac{H_{n+\ell+\nu+\frac{1}{2}}^{(2)}(\gamma h)}{(\frac{1}{2}\gamma h)^{n+\ell+\nu+\frac{1}{2}}} \right) \\
&= -j\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{t_0^{n/2}}{\Gamma(n+1)} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{G_\nu(-n-2\ell-2\nu-\frac{1}{2}, n+1; t_0)}{2^{2\nu}\nu!\Gamma(n+2\ell+\nu+n+\frac{3}{2})} \\
&\quad \times \left( \frac{\gamma}{2h} \right)^{n+\ell+\nu+\frac{1}{2}} \Gamma(n+\ell+\nu+1) H_{n+\ell+\nu+\frac{1}{2}}^{(2)}(\gamma h) \tag{3.59}
\end{aligned}$$

ここで，式 (3.59) の実数部は  $h < 1$  において発散する．そのため， $0 < h < 1$  で収束するように式を変形する．

まず，式 (3.59) の実数部

$$\begin{aligned}
\text{Re}F_\ell^n &= -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{t_0^{n/2}}{\Gamma(n+1)} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{G_\nu(-n-2\ell-2\nu-\frac{1}{2}, n+1; t_0)}{2^{2\nu}\nu!\Gamma(n+2\ell+\nu+n+\frac{3}{2})} \\
&\quad \times \left( \frac{\gamma}{2h} \right)^{n+\ell+\nu+\frac{1}{2}} \Gamma(n+\ell+\nu+1) Y_{n+\ell+\nu+\frac{1}{2}}(\gamma h) \\
&= (-1)^{m+n} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{t_0^{n/2}}{n!} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{G_\nu(-n-2\ell-2\nu-\frac{1}{2}, n+1; t_0)}{2^{2\nu}\nu!\Gamma(n+2\ell+\nu+n+\frac{3}{2})} \\
&\quad \times \left( \frac{\gamma}{2h} \right)^{n+\ell+\nu+\frac{1}{2}} \left\{ \Gamma(n+\ell+\nu+1) J_{-(n+\ell+\nu+\frac{1}{2})}(\gamma h) \right\} \tag{3.60}
\end{aligned}$$

を Bessel 関数の級数展開 [6] を用いて，次のように変形する．

$$\begin{aligned}
\text{Re}F_\ell^n &= (-1)^{m+n} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{t_0^{n/2}}{n!} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{G_\nu(-n-2\ell-2\nu-\frac{1}{2}, n+1; t_0)}{2^{2\nu}\nu!\Gamma(n+2\ell+\nu+n+\frac{3}{2})} \left( \frac{\gamma}{2h} \right)^{n+\ell+\nu+\frac{1}{2}} \\
&\quad \times \Gamma(n+\ell+\nu+1) \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p \left( \frac{\gamma h}{2} \right)^{2p-(n+\ell+\nu+\frac{1}{2})}}{p!\Gamma(p-n-\ell-\nu+\frac{1}{2})} \\
&= (-1)^{m+n} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{t_0^{n/2}}{n!} h^{-(2\ell+2n+1)} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!} \left( \frac{\gamma h}{2} \right)^{2p} \\
&\quad \times \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\ell+\nu+1)}{\nu!\Gamma(n+2\ell+\nu+n+\frac{3}{2})} \frac{G_\nu(-n-2\ell-2\nu-\frac{1}{2}, n+1; t_0)}{\Gamma(p-n-\ell-\nu+\frac{1}{2})} h^{-2\nu} \tag{3.61}
\end{aligned}$$

さらに，Jacobi の多項式を，

$$G_k(a, c; x) = 1 + \sum_{\ell=0}^k (-1)^\ell \binom{k}{\ell} \frac{\Gamma(k+a+\ell)\Gamma(c)}{\Gamma(k+a)\Gamma(c+\ell)} x^\ell \tag{3.62}$$

と展開すれば [7] ,

$$\begin{aligned}
 \text{Re}F_\ell^n &= (-1)^{m+n} \sqrt{\frac{\pi}{2}} t_0^{n/2} h^{-(2\ell+2n+1)} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!} \left(\frac{\gamma h}{2}\right)^{2p} \\
 &\times \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\nu} \frac{\Gamma(n+\ell+\nu+1)}{\Gamma(n+2\ell+\nu+n+\frac{3}{2})\Gamma(p-n-\ell-\nu+\frac{1}{2})} h^{-2\nu} \\
 &\times \frac{(-1)^q \Gamma(q-\nu-n-2\ell+\frac{1}{2}) t_0^q}{q! \Gamma(\nu-q+1) \Gamma(-\nu-n-2\ell-\frac{1}{2}) \Gamma(q+n+1)} \quad (3.63)
 \end{aligned}$$

と記述できる．ただし，式 (3.62) の  $\binom{p}{\nu}$  は二項係数で，

$$\binom{k}{\ell} = \frac{k!}{(k-\ell)! \ell!} \quad (3.64)$$

である．さらに  $\nu$  を  $\nu+q$  で置き換えると，

$$\begin{aligned}
 \text{Re}F_\ell^n &= \sqrt{\frac{1}{2\pi}} t_0^{n/2} h^{-(2\ell+2n+1)} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!} \left(\frac{\gamma h}{2}\right)^{2p} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-1)^q t_0^q}{q! \Gamma(q+n+1)} \\
 &\times \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu!} h^{-2\nu-2q} \frac{\Gamma(\nu+q+n+\ell+1) \Gamma(\nu+q-p+n+\ell+\frac{1}{2})}{\Gamma(\nu+n+2\ell+\frac{3}{2})} \quad (3.65)
 \end{aligned}$$

となる．

ここで式 (3.65) の級数の収束性について考察する．このために，gamma 関数の  $p \gg 1$  のときの漸近展開

$$\Gamma(p+\alpha) \simeq \sqrt{2\pi} p^{\alpha-\frac{1}{2}} e^{-p(1-\log p)} \quad (p \gg 1) \quad (3.66)$$

を用いる．

- $p$  に関して

式 (3.65) の総和の順序を入れ替えると，

$$\begin{aligned}
 \text{Re}F_\ell^n &= \sqrt{\frac{1}{2\pi}} t_0^{n/2} h^{-(2\ell+2n+1)} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-1)^q t_0^q}{q! \Gamma(q+n+1)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu!} h^{-2\nu-2q} \Gamma(\nu+q+n+\ell+1) \\
 &\times \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!} \left(\frac{\gamma h}{2}\right)^{2p} \frac{\Gamma(\nu+q-p+n+\ell+\frac{1}{2})}{\Gamma(\nu+n+2\ell+\frac{3}{2})} \quad (3.67)
 \end{aligned}$$

となる．この  $p$  に関する総和の項は

$$\frac{(-1)^p \Gamma(\nu+q-p+n+\ell+\frac{1}{2})}{p!} \left(\frac{\gamma h}{2}\right)^{2p} \simeq \frac{(-1)^{p+\nu+q+n+\ell}}{2\pi} p^{\nu+q+n+\ell-\frac{1}{2}} e^{2p(1-\log p)} \quad (p \gg 1) \quad (3.68)$$

と変形でき，その総和は  $p \gg 1$  で収束する．ただし，上式の変形では公式 [8]

$$\Gamma(-n+\frac{1}{2}) = \frac{(-1)^n \pi}{\Gamma(n+\frac{1}{2})} \quad (3.69)$$

を利用している．

- $q$  に関して

$p$  と同じように総和を入れ換えると,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}F_\ell^n &= \sqrt{\frac{1}{2\pi}} t_0^{n/2} h^{-(2\ell+2n+1)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu!} h^{-2\nu} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!} \left(\frac{\gamma h}{2}\right)^{2p} \frac{1}{\Gamma(\nu+n+2\ell+\frac{3}{2})} \\ &\quad \times \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-1)^q t_0^q}{q! \Gamma(q+n+1)} h^{-2q} \Gamma(\nu+q-p+n+\ell+\frac{1}{2}) \Gamma(\nu+q+n+\ell+1) \end{aligned} \quad (3.70)$$

となる. この  $q$  に関する総和の項は

$$\begin{aligned} &(-1)^q t_0^q \frac{\Gamma(\nu+q+n+\ell+1) \Gamma(\nu+q-p+n+\ell+\frac{1}{2})}{q! \Gamma(q+n+1)} h^{-2q} \\ &\simeq (-1)^q q^{2\nu+n+2\ell-p-\frac{1}{2}} \frac{t_0^q}{h^{2q}} \quad (q \gg 1) \end{aligned} \quad (3.71)$$

と変形でき, その総和は  $h > \sqrt{t_0}$  のときに収束する.

- $\nu$  に関して

同様にして, 式 (3.65) の  $\nu$  に関する総和

$$\begin{aligned} &(-1)^\nu \frac{\Gamma(\nu+q+n+\ell+1) \Gamma(\nu+q-p+n+\ell+\frac{1}{2})}{\nu! \Gamma(q+n+1)} h^{-2\nu} \\ &\simeq (-1)^\nu \nu^{2q+n+2\ell-p-\frac{1}{2}} \frac{1}{h^{2\nu}} \quad (\nu \gg 1) \end{aligned} \quad (3.72)$$

は,  $\frac{1}{h^2} < 1$  のときに収束する.

以上より, 式 (3.65) は,  $h > \sqrt{t_0}$  かつ  $h > 1$  のときに収束する. そこで,  $h < 1$  で収束するように  $q$  および  $\nu$  についての総和を変形する.

まず, 式 (3.65) の  $\nu$  での総和は Gauss の超幾何関数 [9] で表すことができ,

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}F_\ell^n &= \sqrt{\frac{1}{2\pi}} t_0^{n/2} h^{-(2\ell+2n+1)} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!} \left(\frac{\gamma h}{2}\right)^{2p} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-1)^q t_0^q}{q! \Gamma(q+n+1)} \\ &\quad \times \frac{\Gamma(q+n+\ell+1) \Gamma(q-p+n+\ell+\frac{1}{2})}{\Gamma(n+2\ell+\frac{3}{2})} h^{-2q} \\ &\quad \times F\left(q+n+\ell+1, q-p+n+\ell+\frac{1}{2}, n+2\ell+\frac{3}{2}, -\frac{1}{h^2}\right) \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} (-1)^{n+\ell} \frac{h^{-(2\ell+2n+1)}}{\Gamma(n+2\ell+\frac{3}{2})} t_0^{n/2} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!} \left(\frac{\gamma h}{2}\right)^{2p} \\ &\quad \times \sum_{q=0}^{\infty} \frac{\Gamma(q+n+\ell+1)}{q! \Gamma(q+n+1) \Gamma(p-q-n-\ell+\frac{1}{2})} \left(\frac{t_0}{h^2}\right)^q \\ &\quad \times F\left(q+n+\ell+1, q-p+n+\ell+\frac{1}{2}, n+2\ell+\frac{3}{2}, -\frac{1}{h^2}\right) \end{aligned} \quad (3.73)$$

となる．ここで  $p$  および  $q$  の無限の総和の順序を入れ換え， $p \rightarrow p - \nu$ ， $q \rightarrow \nu$  と置き換えると，

$$\begin{aligned}
 ReF_\ell^n &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} (-1)^{n+\ell} \frac{h^{-(2\ell+2n+1)}}{\Gamma(n+2\ell+\frac{3}{2})} t_0^{n/2} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!} \left(\frac{\gamma h}{2}\right)^{2p} \\
 &\times \sum_{\nu=0}^p \binom{p}{\nu} \frac{(-1)^\nu \Gamma(\nu+n+\ell+1)}{\Gamma(\nu+n+1)\Gamma(p-2\nu-n-\ell+\frac{1}{2})} \left(\frac{t_0}{h^2}\right)^\nu \left(\frac{\gamma h}{2}\right)^{-2\nu} \\
 &\times F\left(\nu+n+\ell+1, 2\nu-p+n+\ell+\frac{1}{2}, n+2\ell+\frac{3}{2}, -\frac{1}{h^2}\right) \quad (3.74)
 \end{aligned}$$

とする．さらに，Gauss の超幾何関数を変換する．超幾何関数の公式 [10] より，

$$\begin{aligned}
 &F\left(\nu+n+\ell+1, 2\nu-p+n+\ell+\frac{1}{2}, n+2\ell+\frac{3}{2}, -\frac{1}{h^2}\right) \\
 &= \left(1 + \frac{1}{h^2}\right)^{-(q+n+\ell+1)} \\
 &\quad \times F\left(q+n+\ell+1, n+2\ell+\frac{3}{2} - (q-p+n+\ell+\frac{1}{2}), n+2\ell+\frac{3}{2}, \frac{-\frac{1}{h^2}}{-\frac{1}{h^2}-1}\right) \\
 &= \left(1 + \frac{1}{h^2}\right)^{-(\nu+n+\ell+1)} F\left(\nu+n+\ell+1, p-2\nu+\ell+1, n+2\ell+\frac{3}{2}, \frac{1}{1+h^2}\right) \quad (3.75)
 \end{aligned}$$

と変換できるので，これを (3.74) に代入すると， $ReF_\ell^n$  は，

$$\begin{aligned}
 ReF_\ell^n &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} (-1)^{n+\ell} \frac{(1+h^2)^{-(\ell+n+1)}}{\Gamma(n+2\ell+\frac{3}{2})} t_0^{n/2} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!} \left(\frac{\gamma h}{2}\right)^{2p} \\
 &\times \sum_{\nu=0}^p \binom{p}{\nu} \frac{(-1)^\nu \Gamma(\nu+n+\ell+1)}{\Gamma(\nu+n+1)\Gamma(p-2\nu-n-\ell+\frac{1}{2})} \left(\frac{t_0}{1+h^2}\right)^\nu \left(\frac{\gamma h}{2}\right)^{-2\nu} \\
 &\times F\left(\nu+n+\ell+1, p-2\nu+\ell+1, n+2\ell+\frac{3}{2}, \frac{1}{1+h^2}\right) \quad (3.76)
 \end{aligned}$$

となる．この式の収束性を前述のように調査する．まず，式 (3.76) を超幾何関数を級数展開

し、以下のように変形する．

$$\begin{aligned}
ReF_\ell^n &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} (-1)^{n+\ell} \frac{(1+h^2)^{-(\ell+n+1)}}{\Gamma(n+2\ell+\frac{3}{2})} t_0^{n/2} \\
&\times \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!} \left(\frac{\gamma h}{2}\right)^{2p} \frac{(-1)^\nu \Gamma(\nu+n+\ell+1)}{\nu! \Gamma(\nu+n+1) \Gamma(p-\nu-n-\ell+\frac{1}{2})} \left(\frac{t_0}{1+h^2}\right)^\nu \\
&\times F\left(\nu+n+\ell+1, p-2\nu+\ell+1, n+2\ell+\frac{3}{2}, \frac{1}{1+h^2}\right) \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{2}} (-1)^{n+\ell} \frac{(1+h^2)^{-(\ell+n+1)}}{\Gamma(n+2\ell+\frac{3}{2})} t_0^{n/2} \\
&\times \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!} \left(\frac{\gamma h}{2}\right)^{2p} \frac{\Gamma(\nu+n+\ell+1)}{\nu! \Gamma(\nu+n+1) \Gamma(p-\nu-n-\ell+\frac{1}{2})} \left(\frac{t_0}{1+h^2}\right)^\nu \\
&\times \frac{\Gamma(k-\nu+\ell+\frac{1}{2}) \Gamma(k+\nu-p+n+\ell+\frac{1}{2}) \Gamma(n+2\ell+\frac{3}{2})}{k! \Gamma(\nu-p+n+\ell+\frac{1}{2}) \Gamma(k+n+2\ell+\frac{3}{2})} (1+h^2)^{-k} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} t_0^{n/2} (1+h^2)^{-(\ell+n+1)} \\
&\times \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{p!} \left(\frac{\gamma h}{2}\right)^{2p} \frac{(-1)^\nu \Gamma(\nu+n+\ell+1)}{\nu! \Gamma(\nu+n+1)} \left(\frac{t_0}{1+h^2}\right)^\nu \\
&\times \frac{\Gamma(k-\nu+\ell+\frac{1}{2}) \Gamma(k+\nu-p+n+\ell+\frac{1}{2})}{k! \Gamma(-\nu+\ell+\frac{1}{2}) \Gamma(k+n+2\ell+\frac{3}{2})} (1+h^2)^{-k} \tag{3.77}
\end{aligned}$$

この式を使って、各総和の添字について収束性を判断する．

- $p$  に関して

式 (3.77) 総和の順序を入れ替えて、

$$\begin{aligned}
ReF_\ell^n &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} t_0^{n/2} (1+h^2)^{-(\ell+n+1)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu \Gamma(\nu+n+\ell+1)}{\nu! \Gamma(\nu+n+1)} \left(\frac{t_0}{1+h^2}\right)^\nu \\
&\times \sum_{k=0}^{\infty} (1+h^2)^{-k} \frac{\Gamma(k-\nu+\ell+\frac{1}{2})}{k! \Gamma(-\nu+\ell+\frac{1}{2}) \Gamma(k+n+2\ell+\frac{3}{2})} \\
&\times \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} \left(\frac{\gamma h}{2}\right)^{2p} \Gamma(k+\nu-p+n+\ell+\frac{1}{2}) \tag{3.78}
\end{aligned}$$

となる．この  $p$  に関する総和の項は

$$\frac{1}{p!} \left(\frac{\gamma h}{2}\right)^{2p} \Gamma(k+\nu-p+n+\ell+\frac{1}{2}) = \frac{(-1)^{p-k-\nu-n-\ell}}{2\pi} \left(\frac{\gamma h}{2}\right)^{2p} p^{k+\nu+n+\ell-\frac{1}{2}} e^{2p(1-\log p)} \tag{3.79}$$

と変形でき、その総和は  $p \gg 1$  で収束する．

•  $\nu$  に関して

同様に総和の順序を入れ替えて，

$$\begin{aligned}
 ReF_\ell^n &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} t_0^{n/2} (1+h^2)^{-(\ell+n+1)} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} \left(\frac{\gamma h}{2}\right)^{2p} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! \Gamma(k+n+2\ell+\frac{3}{2})} (1+h^2)^{-k} \\
 &\quad \times \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu \Gamma(\nu+n+\ell+1)}{\nu! \Gamma(\nu+n+1)} \left(\frac{t_0}{1+h^2}\right)^\nu \\
 &\quad \times \frac{\Gamma(k-\nu+\ell+\frac{1}{2}) \Gamma(k+\nu-p+n+\ell+\frac{1}{2})}{\Gamma(-\nu+\ell+\frac{1}{2})}
 \end{aligned} \tag{3.80}$$

となる．この  $\nu$  に関する総和の項は

$$\begin{aligned}
 &\frac{(-1)^\nu \Gamma(\nu+n+\ell+1)}{\nu! \Gamma(\nu+n+1)} \left(\frac{t_0}{1+h^2}\right)^\nu \frac{\Gamma(k-\nu+\ell+\frac{1}{2}) \Gamma(k+\nu-p+n+\ell+\frac{1}{2})}{\Gamma(-\nu+\ell+\frac{1}{2})} (1+h^2) \\
 &= (-1)^{\nu-k} \nu^{2k-p+n+2\ell} \left(\frac{t_0}{1+h^2}\right)^\nu
 \end{aligned} \tag{3.81}$$

と変形でき，その総和は  $\frac{t_0}{1+h^2} < 1$  であれば収束する．

 •  $k$  に関して

同様に総和の順序を入れ替えて，

$$\begin{aligned}
 ReF_\ell^n &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} t_0^{n/2} (1+h^2)^{-(\ell+n+1)} \\
 &\quad \times \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!} \left(\frac{\gamma h}{2}\right)^{2p} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu \Gamma(\nu+n+\ell+1)}{\nu! \Gamma(\nu+n+1)} \left(\frac{t_0}{1+h^2}\right)^\nu \\
 &\quad \times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k-\nu+\ell+\frac{1}{2}) \Gamma(k+\nu-p+n+\ell+\frac{1}{2})}{k! \Gamma(-\nu+\ell+\frac{1}{2}) \Gamma(k+n+2\ell+\frac{3}{2})} (1+h^2)^{-k}
 \end{aligned} \tag{3.82}$$

となる．この  $\nu$  に関する総和の項は

$$\begin{aligned}
 &\frac{\Gamma(k-\nu+\ell+\frac{1}{2}) \Gamma(k+\nu-p+n+\ell+\frac{1}{2})}{k! \Gamma(k+n+2\ell+\frac{3}{2})} (1+h^2)^{-k} \\
 &= k^{-p+\frac{1}{2}} (1+h^2)^{-k}
 \end{aligned} \tag{3.83}$$

と変形でき，その総和の収束条件は  $(1+h^2) > 1$  となり，必ず収束する．

式 (3.81)，(3.83) より，式 (3.76) は  $t_0 - h^2 < 1$  で収束する

### 3.4 級数展開式の特性

ここで，式 (3.76) として得られた  $\text{Re}F_\ell^n$  の特性について検証を行う．

まず，前節で収束性を検討した  $\text{Re}F_\ell^n$  について詳しく調査する．式 (3.76) の  $p$  での総和の各項を，

$$S_p = \frac{(-1)^p}{p!} \left(\frac{\gamma h}{2}\right)^{2p} \sum_{\nu=0}^p \binom{p}{\nu} \frac{(-1)^\nu \Gamma(\nu + n + \ell + 1)}{\Gamma(\nu + n + 1) \Gamma(p - 2\nu - n - \ell + \frac{1}{2})} \\ \times \left(\frac{t_0}{1+h^2}\right)^\nu \left(\frac{\gamma h}{2}\right)^{-2\nu} F\left(\nu + n + \ell + 1, p - 2\nu + \ell + 1, n + 2\ell + \frac{3}{2}, \frac{1}{1+h^2}\right) \quad (3.84)$$

とし， $p$  に対する  $S_p$  の変化について検討する．まず， $n = \ell = 0$  とし， $S_p$  を整理すると，

$$S_p = \frac{(-1)^p}{p!} \left(\frac{\gamma h}{2}\right)^{2p} \sum_{\nu=0}^p \frac{p!}{\nu!(p-\nu)!} \frac{(-1)^\nu \Gamma(\nu + 1)}{\Gamma(\nu + 1) \Gamma(p - 2\nu + \frac{1}{2})} \\ \times \left(\frac{t_0}{1+h^2}\right)^\nu \left(\frac{\gamma h}{2}\right)^{-2\nu} F\left(\nu + 1, p - 2\nu + 1, \frac{3}{2}, \frac{1}{1+h^2}\right) \\ = (-1)^p \sum_{\nu=0}^p \frac{1}{\Gamma(\nu + 1) \Gamma(p - \nu + 1)} \frac{(-1)^\nu}{\Gamma(p - 2\nu + \frac{1}{2})} \\ \times \left(\frac{t_0}{1+h^2}\right)^\nu \left(\frac{\gamma h}{2}\right)^{2p-2\nu} F\left(\nu + 1, p - 2\nu + 1, \frac{3}{2}, \frac{1}{1+h^2}\right) \quad (3.85)$$

となる．この式中の  $F\left(\nu + 1, p - 2\nu + 1, \frac{3}{2}, \frac{1}{1+h^2}\right)$  は  $h$  が大きいときには 1 に近いため， $|S_p|$  に対して大きく寄与しない．そこで，この項は 1 と近似して考えて検討する．

ここでは，以下のように  $p$  の大きさで式 (3.84) を評価する．

- $p$  が小さいとき

$p$  が小さいときには，式 (3.85) の  $p$  と  $\nu$  の差が大きいとき，すなわち  $\nu = 0$  の項が主要な項になる．そこで式 (3.85) を  $F\left(\nu + 1, p - 2\nu + 1, \frac{3}{2}, \frac{1}{1+h^2}\right) \rightarrow 1$ ， $\nu \rightarrow 0$  として式を整理すると，

$$S_p \simeq (-1)^p \frac{1}{\Gamma(p+1)} \frac{1}{\Gamma(p+\frac{1}{2})} \left(\frac{\gamma h}{2}\right)^{2p} \quad (3.86)$$

となる．ここで， $S_p$  と  $S_{p-1}$  の比を計算すると，

$$\frac{S_p}{S_{p-1}} = -\frac{1}{p(p-\frac{1}{2})} \left(\frac{\gamma h}{2}\right)^2 \quad (3.87)$$

となる．このことから， $p$  が  $p^2 - \frac{1}{2}p < \left(\frac{\gamma h}{2}\right)^2$  のとき  $|S_p|$  が  $\left(\frac{\gamma h}{2}\right)$  の指数関数的に増加し， $p^2 - \frac{1}{2}p = \left(\frac{\gamma h}{2}\right)^2$  のときに最大値になることがわかる．

•  $p$  が大きいとき

$p$  が大きいとき,  $\Gamma(\nu + 1)$  が大きくなるため,  $\nu = p$  の項が主要項となる. そこで  $p$  が小さいときと同様に式 (3.85) を  $F(\nu + 1, p - 2\nu + 1, \frac{3}{2}, \frac{1}{1+h^2}) \rightarrow 1, \nu \rightarrow p$  として式を整理すると,

$$S_p \simeq (-1)^p \frac{1}{\Gamma(p+1)} \frac{1}{\Gamma(-p+\frac{1}{2})} \left( \frac{t_0}{1+h^2} \right)^p \quad (3.88)$$

となる. ここで,  $S_p$  と  $S_{p-1}$  の比を計算すると,

$$\frac{S_p}{S_{p-1}} = \frac{1}{p(-p+\frac{1}{2})} \left( \frac{t_0}{1+h^2} \right) \quad (3.89)$$

となる. 今回  $t_0 = 1.0$  であるので  $(\frac{t_0}{1+h^2}) < 1$  であり, 結果として  $p$  が大きいときには  $(\frac{t_0}{1+h^2})$  の指数関数的に減少していく.

このことは  $n \neq 0$  および  $\ell \neq 0$  のときにも成り立つ. 以上により  $|S_p|$  は  $p$  が小さいときには増加していき, 大きな最大値に達した後, 減少していくという振る舞いをするのがわかる.

この検討結果を数値計算により確認する. なお, ここでは, 第 2 章で導入した多倍長精度数値計算法を用いて計算を行っている. 式 (3.84) を計算した結果を図 3.2 に示す. 図では  $h = z_0/a$  をパラメータとし,  $a/\lambda = 2.0, t_0 = 1.0, n = \ell = 0$  でデータ長 256[bit] のときの  $|S_p|$  の値について示したものである. ただし, 横軸は  $p$ , 縦軸は  $S_p$  の絶対値を対数で表している. 図を見ると,  $p$  が小さいときにはほぼ指数関数的に  $|S_p|$  が増加し, いずれ最大値となる. またその最大値は, 例えば  $h = 2.0$  のとき  $p = 14$  であり, 先に検討した最大値の値  $p^2 - \frac{1}{2}p = (\frac{\gamma h}{2})^2$  から得られる  $p \simeq 12.5$  とほぼ同じである<sup>1</sup>. さらに,  $p$  が大きくなると,  $|S_p|$  は指数関数的に減少し, ここでも検討した結果と一致している.

また図より,  $h$  が大きくなる, すなわち波源が円板から遠ざかると,  $|S_p|$  の最大値も大きくなるのがわかる. さらに最大値となる  $p$  の値も大きくなっており, その原因は  $p^2 - \frac{1}{2}p = (\frac{\gamma h}{2})^2$  の  $h$  が増加することで  $p$  が増加するからである. このことより,  $S_p$  を数値計算する際には,  $|S_p|$  が一旦大きくなった後,  $|S_p|$  が十分小さくなったことを確認して打ち切る必要があり,  $h$  が大きいときには総和の打ち切りを行う  $p$  の値も十分大きくする必要がある.

次に, 式 (3.76) の  $p$  による総和を  $m$  で打ち切った

$$V_m = \sum_{p=0}^m S_p. \quad (3.90)$$

を計算した. 図 3.3 に, 図 3.2 と同じ条件で数値計算した場合の  $V_m$  の値を示す. ただし, 横軸は  $m$ , 縦軸は  $V_m$  の絶対値  $|V_m|$  を対数で表している. この図より,  $h$  が大きくなると,  $|V_m|$

<sup>1</sup>図では  $p = 14$  近辺で最大値のように見えるが, 式 (3.86) の値は  $p = 12$  で  $3.21 \times 10^9$ ,  $p = 13$  で  $3.67 \times 10^9$ ,  $p = 14$  で  $3.56 \times 10^9$  であるので,  $p \simeq 12.5$  の見積りは妥当である

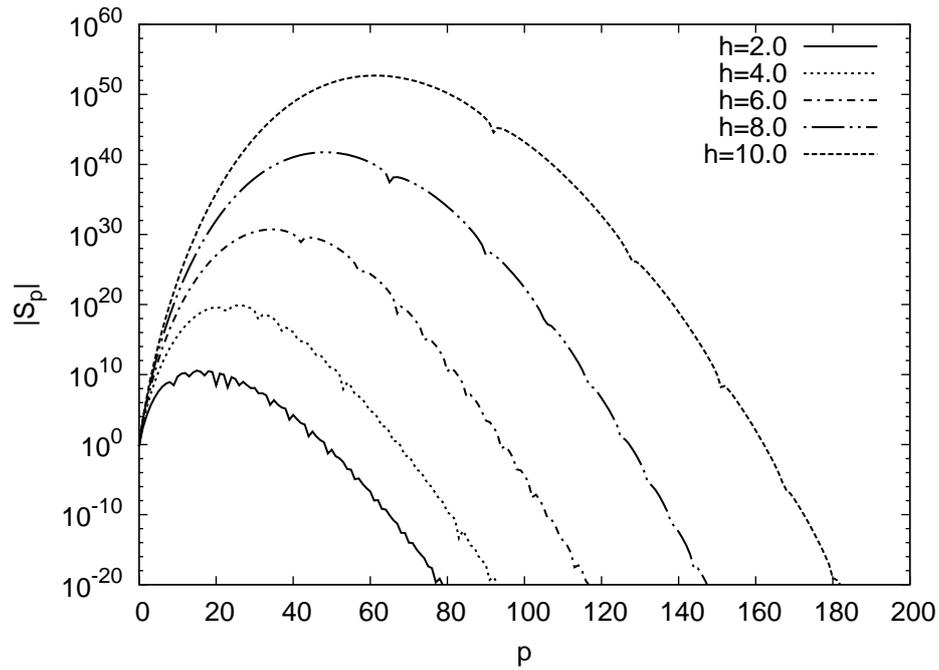


図 3.2:  $p$  に対する  $|S_p|$  の値 ( $a/\lambda = 2.0$ ,  $t_0 = 1.0$ ,  $n = \ell = 0$ )

が収束する  $m$  の値を大きく取る必要のあることがわかる。したがって、 $\text{Re}F_\ell^n$  の数値計算において、 $|V_m|$  はこの特性を考慮して計算を打ち切らなければならない。また、例えば  $h = 4.0$  のときの  $|V_m|$  の最大値は収束値（約  $10^{-1}$ ）の  $10^{22}$  倍となっている。このことより、 $|V_m|$  の計算には 10 進で 22 桁（約 74[bit]）以上のデータ長が必要であることがわかる。また  $h$  が増加すると、数値計算に必要なデータ長は大きくなっていくことから、その精度を保つためには、多倍長精度数値計算法が有効であると判断できる。

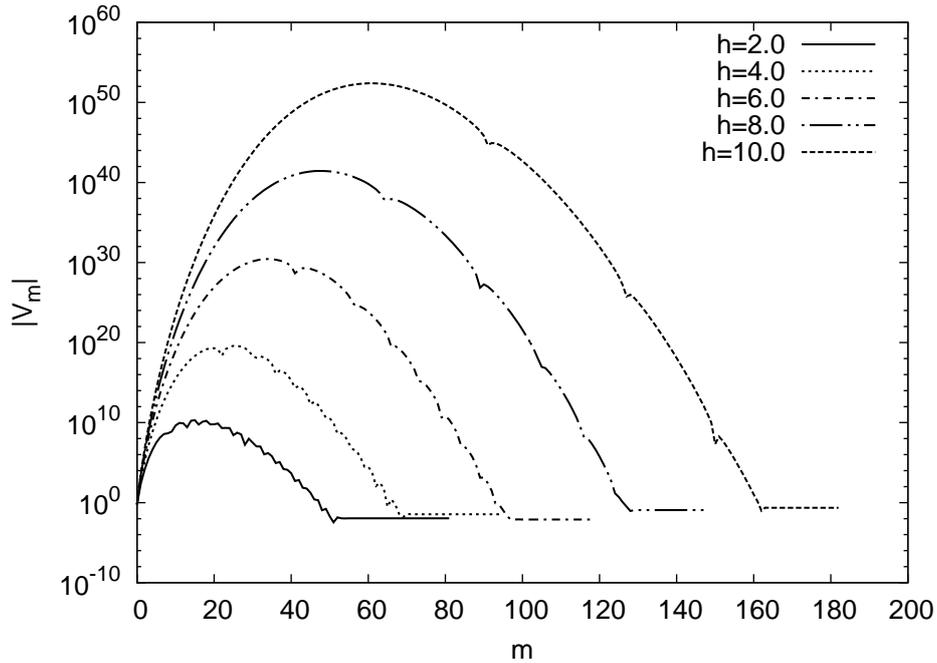


図 3.3:  $V_m$  の収束性 ( $a/\lambda = 2.0, t_0 = 1.0, n = \ell = 0$ )

次に,  $F_\ell^n$  の特性について調査する. 図 3.4 から 3.6 に  $h = 2.0$  での  $F_\ell^n$  の値を示す. 各図において, 横軸は  $\ell$  を, 縦軸は  $F_\ell^n$  の絶対値を表している. また,  $a/\lambda$  は 2.0, 5.0, 8.0 と変化させた. 図より, いずれの図においても,  $n = 0$  のときは項数  $\ell$  を多く取る必要があることがわかる. また,  $a/\lambda = 2.0$  のときと比較して, 5.0 の場合は  $\ell$  が小さいとき  $|F_\ell^n|$  は  $10^{-2}$  付近で変化し,  $\ell$  が大きくなると, 減少していく. さらに値が減少し始める  $\ell$  の値は,  $a/\lambda$  が大きくなるにしたがって大きくなる.

次に, 図 3.7 から 3.9 に  $h = 5.0$  に対する結果を示す.  $h = 2.0$  のときと比較し,  $a/\lambda$  が同じ場合には  $|F_\ell^n|$  の値が減少しない  $\ell$  の範囲が狭く, また減少し初めてからの  $|F_\ell^n|$  の減少の割合が多くなっている. このことから,  $h$  が大きい方が  $|F_\ell^n|$  の収束が速いことがわかる.

最後に,  $F_\ell^n$  の計算に必要な項数  $\ell$  を調査した. 図 3.4 から 3.9 に示した通り,  $n = 0$  のとき,  $F_\ell^n$  は最も大きい値を持つ. そこで, ここでは  $n = 0$  とし,  $a/\lambda$  をパラメータとして,  $h$  に対して  $F_\ell^n$  が  $10^{-7}$  になる  $\ell$  の値を図 3.10 に示す. この結果からも,  $h$  が大きくなるにしたがって収束に必要な項数  $\ell$  が少なくなる, すなわち小さい  $\ell$  で  $F_\ell^n$  が計算できることがわかる.

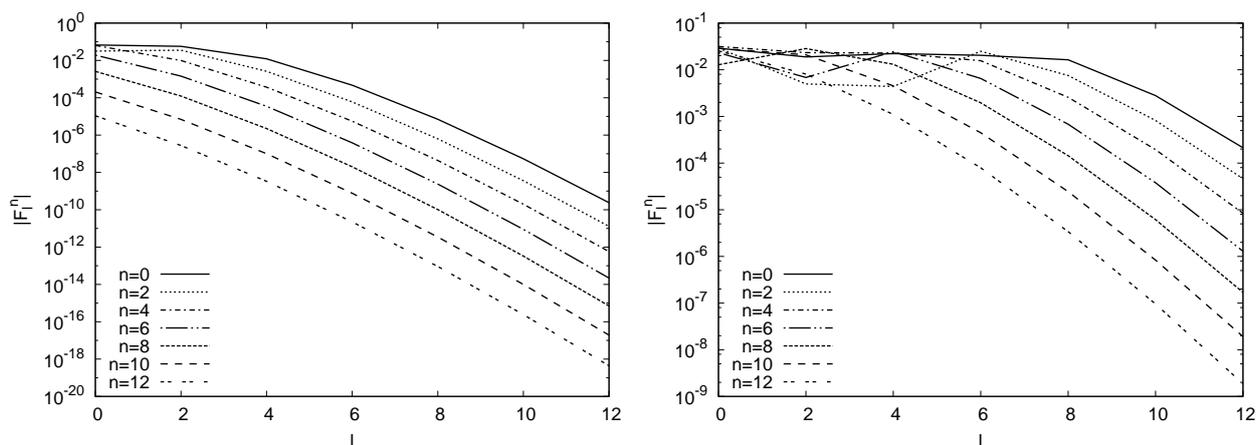


図 3.4:  $\ell$  に対する  $|F_\ell^n|$  の値 ( $a/\lambda = 2.0, h = 2.0$ )      図 3.5:  $\ell$  に対する  $|F_\ell^n|$  の値 ( $a/\lambda = 5.0, h = 2.0$ )

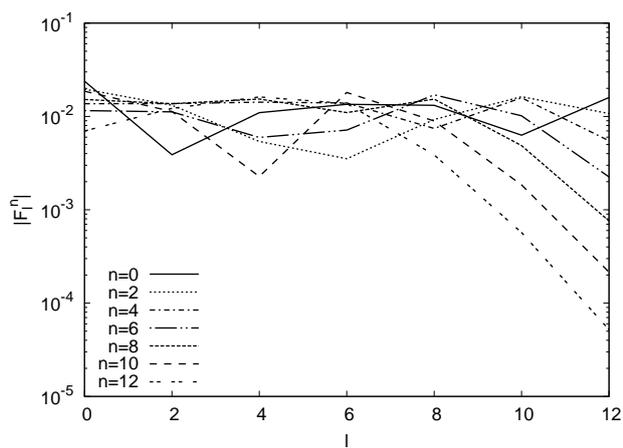


図 3.6:  $\ell$  に対する  $|F_\ell^n|$  の値 ( $a/\lambda = 8.0, h = 2.0$ )

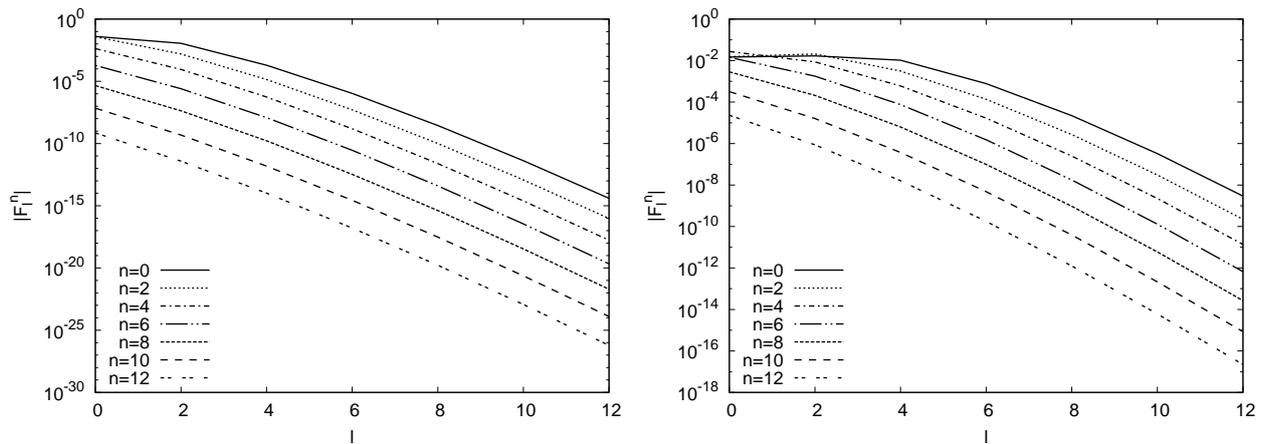


図 3.7:  $l$  に対する  $|F_\ell^n|$  の値 ( $a/\lambda = 2.0, h = 5.0$ )      図 3.8:  $l$  に対する  $|F_\ell^n|$  の値 ( $a/\lambda = 5.0, h = 5.0$ )

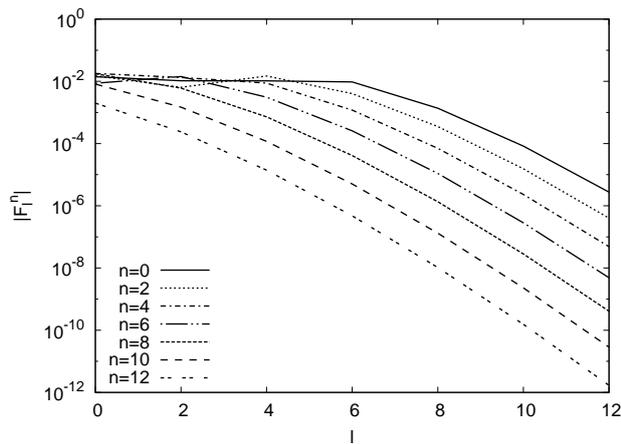
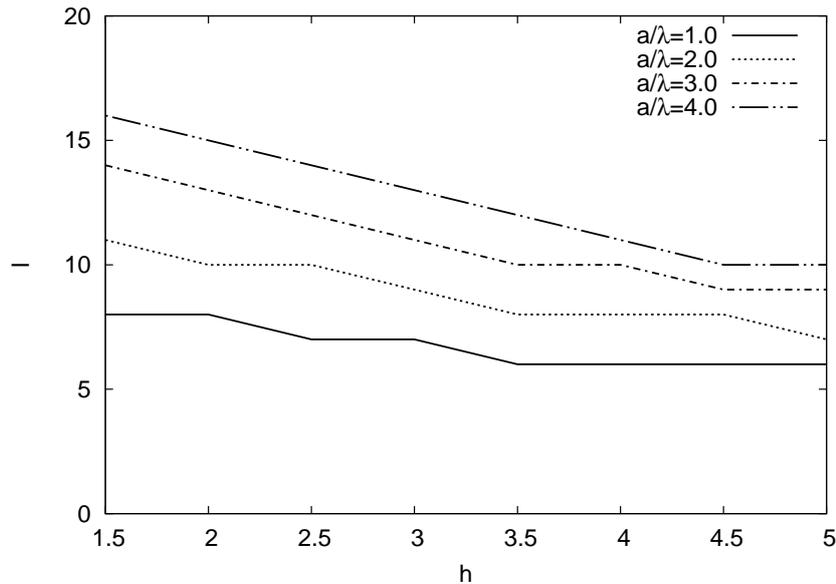


図 3.9:  $l$  に対する  $|F_\ell^n|$  の値 ( $a/\lambda = 8.0, h = 5.0$ )

図 3.10: 各  $h$  に対する,  $l$  の値

## 3.5 数値計算

ここでは, 電流分布計算とその特性について議論する. また別法との比較を行い, 妥当性を検証する.

### 3.5.1 波源が中心軸上にある場合の電流分布

図 3.11 に, 本手法での計算を検証するため, 文献 [2] の計算結果と同じパラメータの電流分布 ( $z = +0$  の電流) を計算し, 比較した結果を示す. 図において, 「rigorous」は本手法による結果, 「Inawashiro」は文献 [2] の, Fig.4(a) より値を読み取りプロットしたものである. 両者を比較すると, ほぼ同じとなっており, 本手法の計算が妥当であることがわかる.

次に, 図 3.12 および 3.13 に,  $a/\lambda = 4.0, 5.0$  での,  $h$  に対する電流分布を示す. 図において, 横軸は  $x/a$ , 縦軸は Inawashiro [2] の結果と同様に, 規格化した電流の  $x$  成分  $|J_x / \{(\epsilon/\mu)^{1/2} k^2 \Pi_0 h^{-1}\}|$  を示す. 平面波での結果では  $a/\lambda$  と同じ数の振動をしていたが, 水平微小ダイポールの場合,  $h = 0.5$  では  $a/\lambda + 2.5$  の数で振動しており, さらに  $h$  が大きくなるにしたがって, 振動数が少なくなっている. 波源が円板に近い場合には振動は相対的に小さいが, 波源を高くすることにより, その振幅は大きくなっていく.

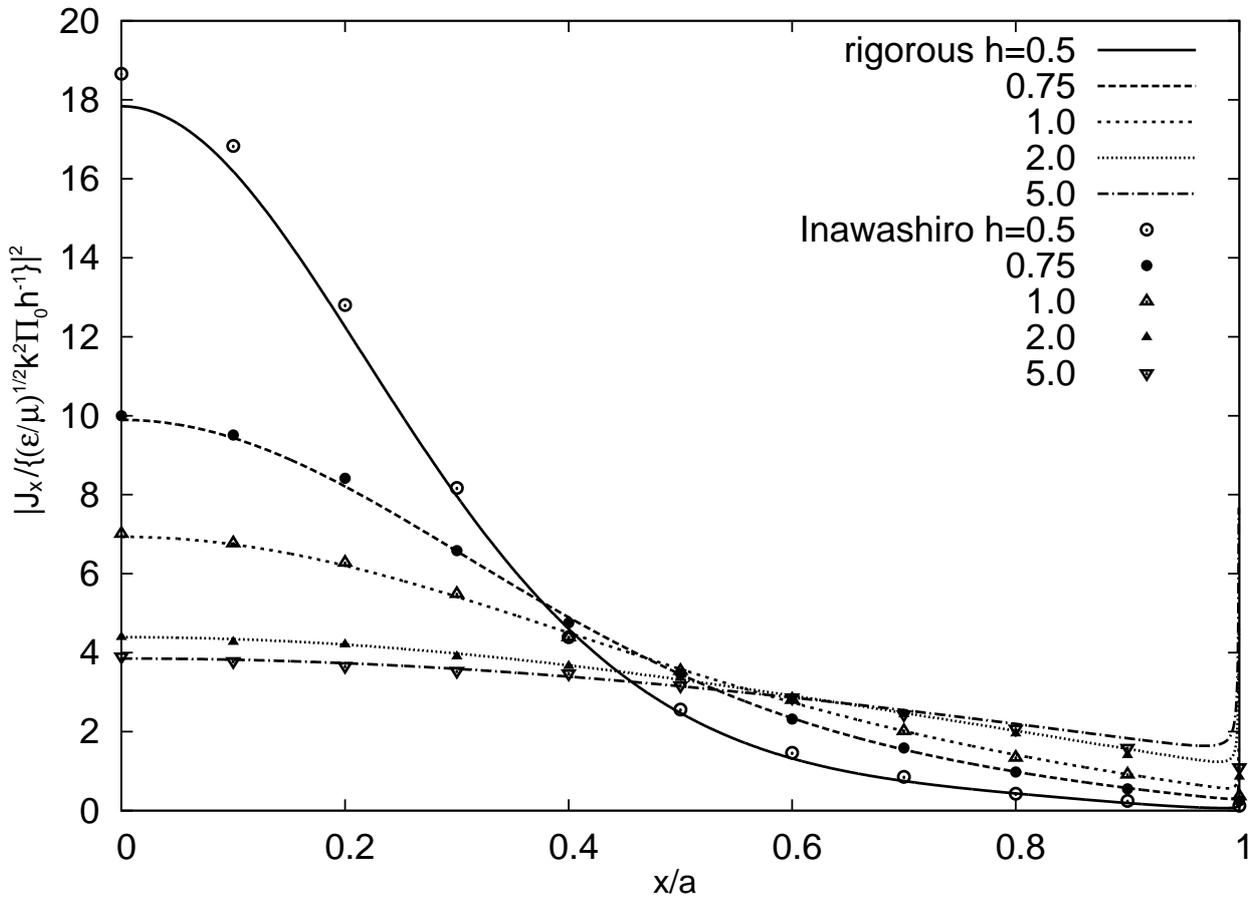


図 3.11: 文献 [2] 図 4(a) との比較のための電流分布

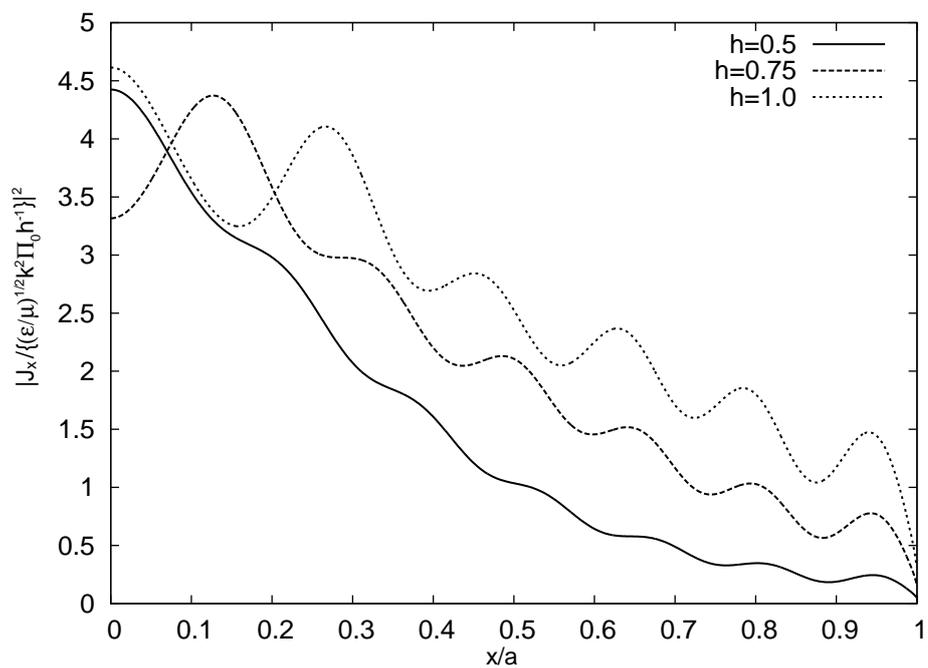


図 3.12: 波源が中心軸上にある場合の電流分布 ( $a/\lambda = 4.0$ )

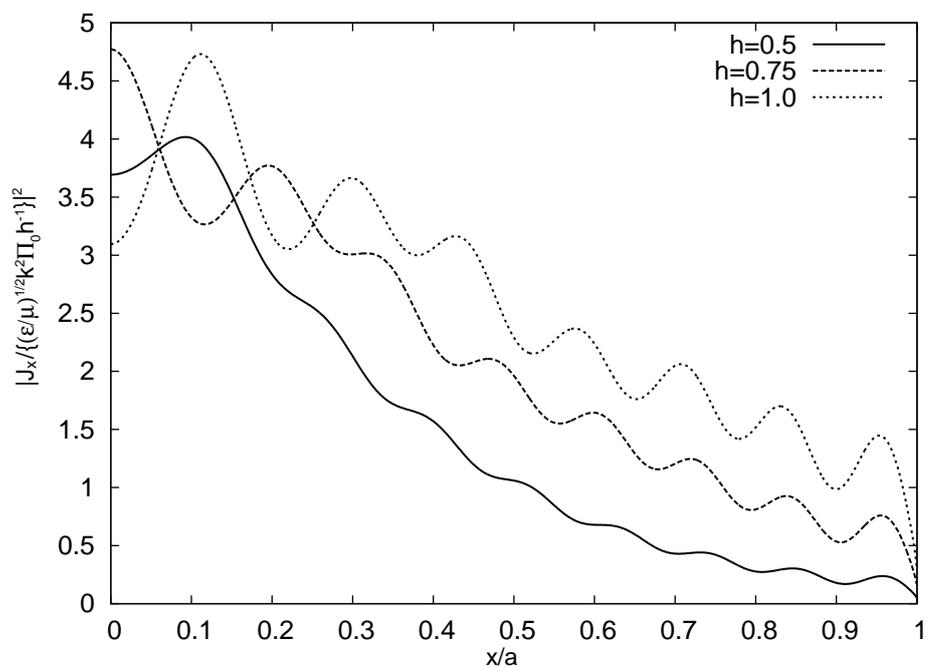


図 3.13: 波源が中心軸上にある場合の電流分布 ( $a/\lambda = 5.0$ )

### 3.5.2 波源が中心軸上から外れた場合の電流分布

図 3.14 に、 $h = 2.0, t_0 = 1.0$  のときの円板表面 ( $z = +0$ ) の電流分布を示す。図では  $a/\lambda$  をパラメータとし、横軸は円板中心からの観測点までの距離  $x/a$ 、縦軸は  $x = a$  の入射界が一定になるように  $h$  を掛けて規格化した電流  $|h \times J_x / \{(\epsilon/\mu)^{1/2} k^2 \Pi_0 h^{-1}\}|$  を示す。 $a/\lambda$  が 1.0, 3.0, 5.0 と増加すると、振動の数が増加することがわかる。

図.3.15 に、 $(x_0/a)^2 = t_0$  をパラメータとして、 $a/\lambda = 2.0, h = 2.0$  のときの電流分布を示す。中心軸上に波源がある場合、すなわち  $t_0 = 0.0$  の場合は電流が  $z$  軸に対して対称になるが、波源が中心から端に行くにしたがって、 $x/a = 1.0$  付近の電流が増え、反対側の電流が減ることがわかる。

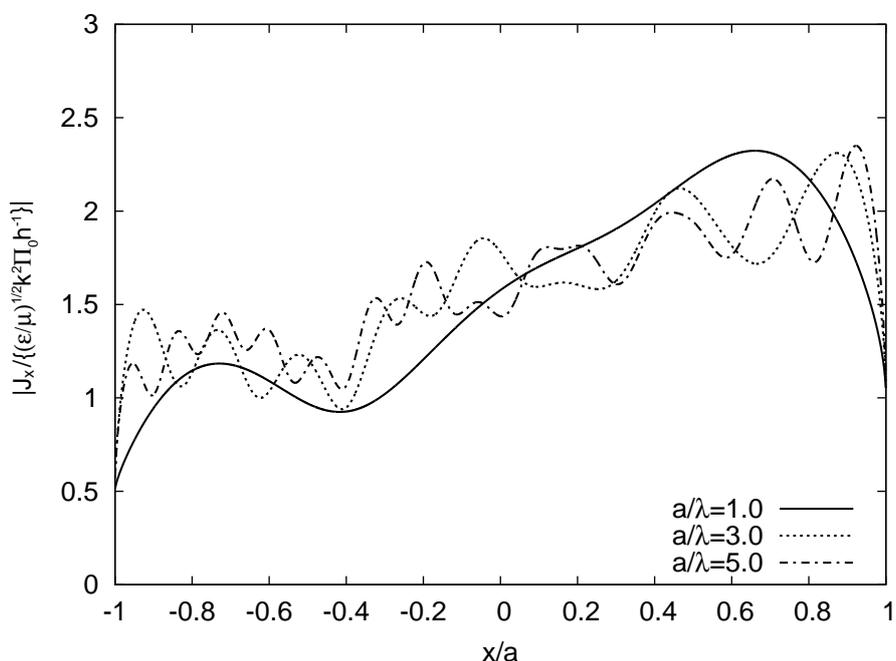


図 3.14: 波源が中心軸上から外れた場合の電流分布 ( $x$  軸上の  $J_x$ ,  $h = 2.0, t_0 = (x_0/a)^2 = 1.0$ , 円板の大きさを变化)

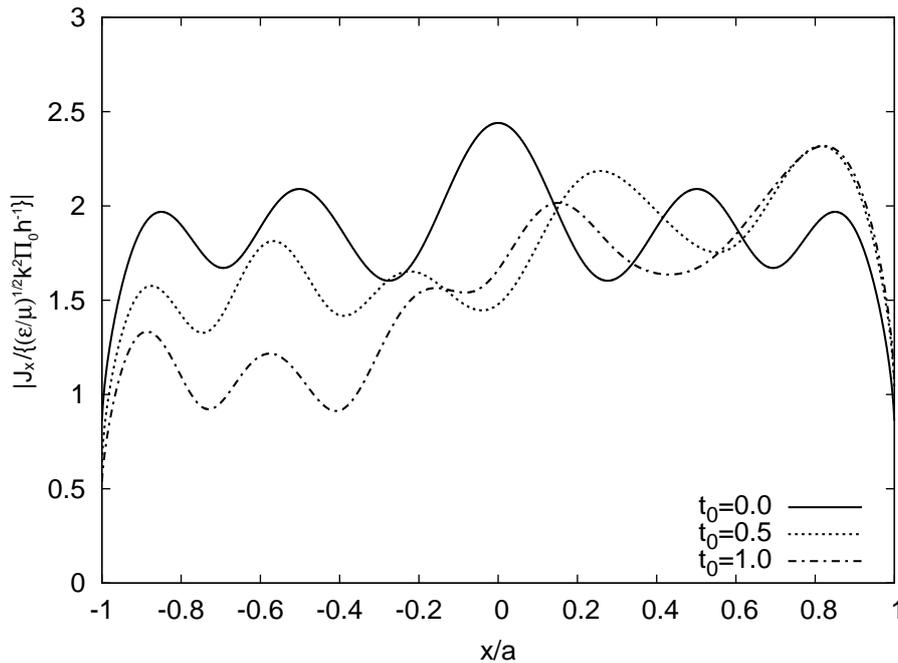


図 3.15: 波源が中心軸上から外れた場合の電流分布 ( $x$  軸上の  $J_x$ ,  $a/\lambda = 2.0$ ,  $h = 2.0$ , 波源の位置を変化)

図 3.16, 3.17 に,  $a/\lambda = 2.0$ ,  $t_0 = 1.0$  での電流分布を示す. ただし,  $h$  をパラメータとし, 波源の位置は  $x_0 = a$ ,  $y_0 = 0.0$  である. また,  $h = \infty$  は平面波入射を表す. さらに, 図 3.16 は  $x$  軸に沿った電流分布, 図 3.17 では  $y$  軸に沿った電流分布を表している. 両図とも,  $h$  が増加するにしたがって, 電流分布は平面波入射の電流分布に近づいていく. 特に図 3.16 の  $h = 9.0$  の場合, 波源から  $(x, y, z) = (a, 0, 0)$  までと, 波源から  $(x, y, z) = (-a, 0, 0)$  までの距離の差が約  $0.4\lambda$  と小さいため,  $x$  軸上の入射波の位相が緩やかに変化しており, 平面波の結果に近づいてきていることがわかる. また, 図 3.17 では, 電流の方向とエッジが平行なために円板端部で発散している. さらに, 波源が  $x$  軸方向を向いており,  $x-z$  平面に置かれ,  $y$  軸に対して対称であるため, 電流分布も対称となっている.

次に, 図 3.18, 3.19 に, 図 3.16, 3.17 とパラメータは同じであるが, 波源を  $x_0 = 0.0$ ,  $y_0 = a$  に移動させた場合の結果を示す. また, 図 3.18 は  $y$  軸上の電流分布, 図 3.19 は  $x$  軸上の電流分布を表している. 図 3.18 では,  $y/a = 1.0$  付近で  $|h \times J_y / \{(\epsilon/\mu)^{1/2} k^2 \Pi_0 h^{-1}\}|$  は  $h$  によらずほぼ同じ値を示している. これに対して,  $h$  の増加にともなって,  $y/a = -1.0$  付近で  $|h \times J_y / \{(\epsilon/\mu)^{1/2} k^2 \Pi_0 h^{-1}\}|$  は小さくなっている. 次に, 図 3.19 では, 波源に対して観測方向が対称のために, 電流分布も対称となっている.

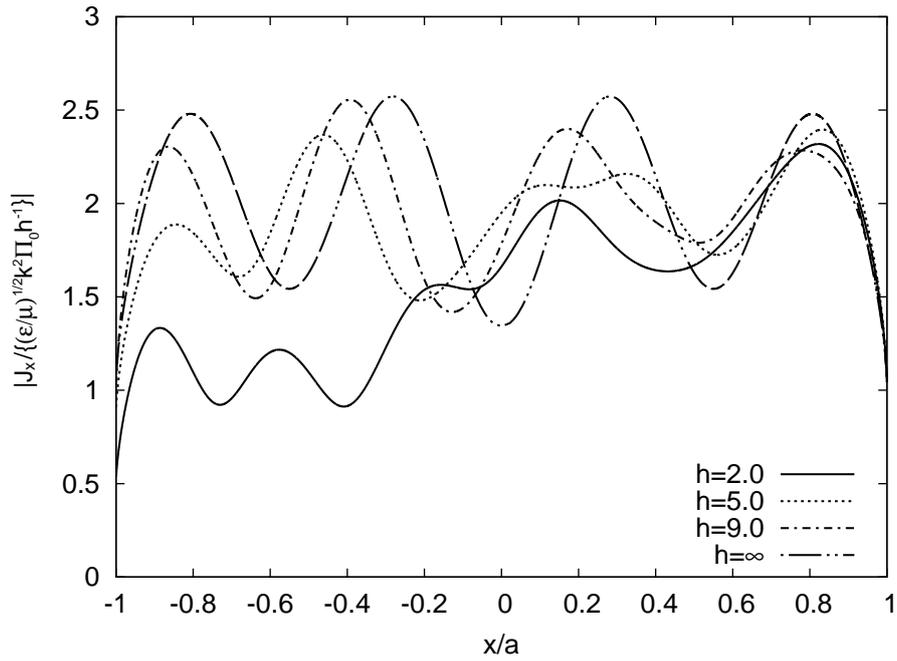


図 3.16: 波源が中心軸上から外れた場合の電流分布 ( $x$  軸上の  $J_x$ ,  $a/\lambda = 2.0$ ,  $t_0 = (x_0/a)^2 = 1.0$ ,  $y_0 = 0.0$ , 波源の高さを変化)

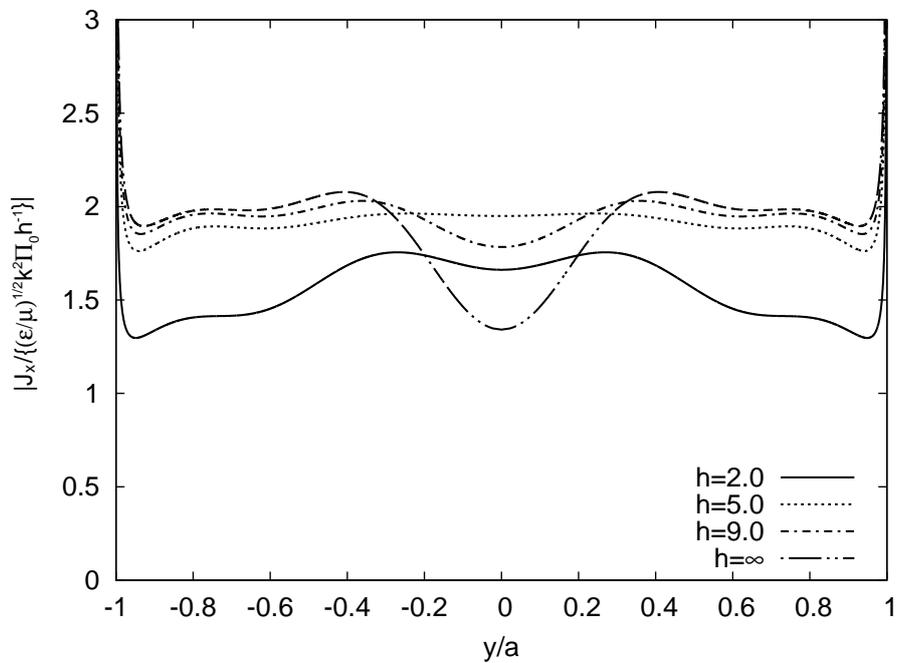


図 3.17: 波源が中心軸上から外れた場合の電流分布 ( $y$  軸上の  $J_x$ ,  $a/\lambda = 2.0$ ,  $t_0 = (x_0/a)^2 = 1.0$ ,  $y_0 = 0.0$ , 波源の高さを変化)

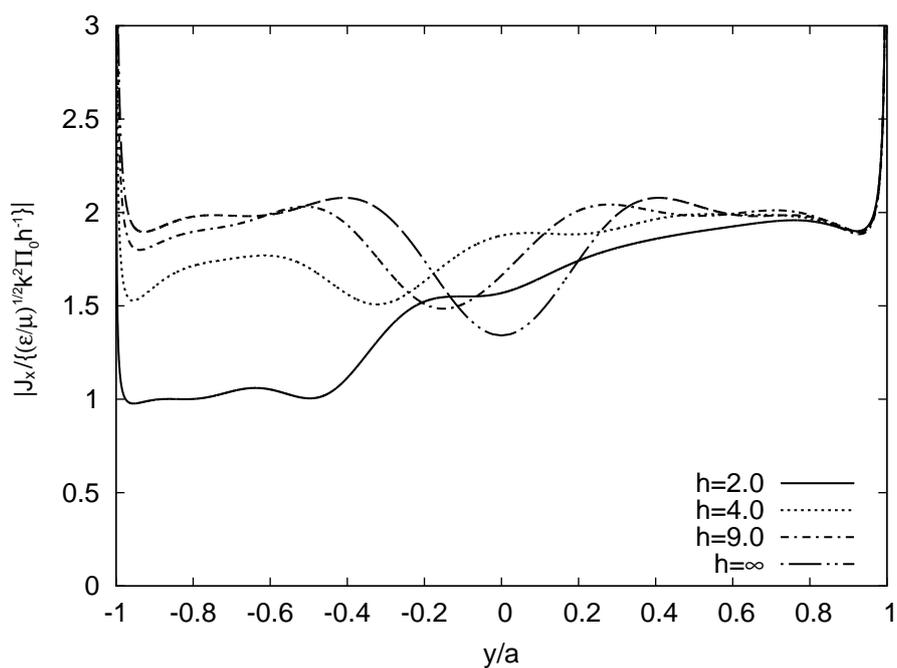


図 3.18: 波源が中心軸上から外れた場合の電流分布 ( $y$  軸上の  $J_x$ ,  $a/\lambda = 2.0$ ,  $t_0 = (y_0/a)^2 = 1.0$ ,  $x_0 = 0.0$ , 波源の高さを変化)

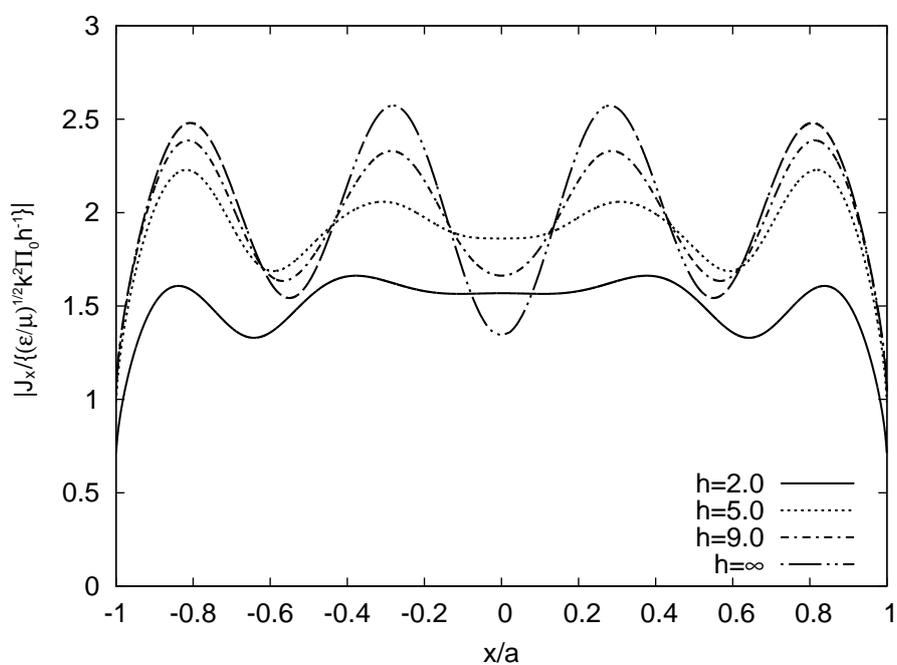


図 3.19: 波源が中心軸上から外れた場合の電流分布 ( $x$  軸上の  $J_x$ ,  $a/\lambda = 2.0$ ,  $t_0 = (y_0/a)^2 = 1.0$ ,  $x_0 = 0.0$ , 波源の高さを変化)

### 3.5.3 別法との比較

ここでは、別法で計算した結果と比較して、本手法での計算の妥当性を検証する。

図 3.20 に  $a/\lambda = 2.0$ ,  $z_0/a = h = 0.5$ ,  $t_0 = (x_0/a)^2 = 1.0$ ,  $y_0 = 0$  のときの円板表面 ( $z = +0$ ) での電流分布を示す。また、図中の「rigorous」は本手法を、「PO」は物理光学近似界を表す。図より、波源に近い  $x_0/a = 1.0$  付近の振幅が大きく、反対側で小さくなる。また PO との比較により、本手法による結果は PO に回折界が加わっているような結果となっている。さらに振幅は波源から観測点までの距離の 2 乗に反比例で減衰している。

次に、図 3.21 に、 $a/\lambda = 5.0$  での電流分布を示す。図 3.20 との比較により、円板の大きさが大きくなると、回折界との干渉による振動が顕著に現れている。

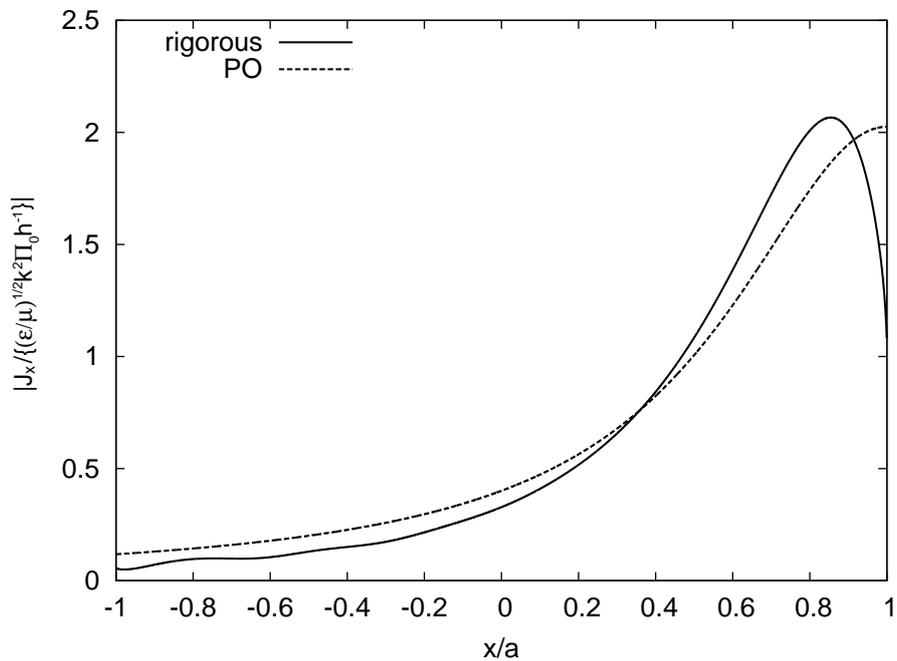


図 3.20: 物理光学近似界と本手法での電流分布 ( $x$  軸上の  $J_x$ ,  $a/\lambda = 2.0$ ,  $h = 0.5$ ,  $t_0 = (x_0/a)^2 = 1.0$ )

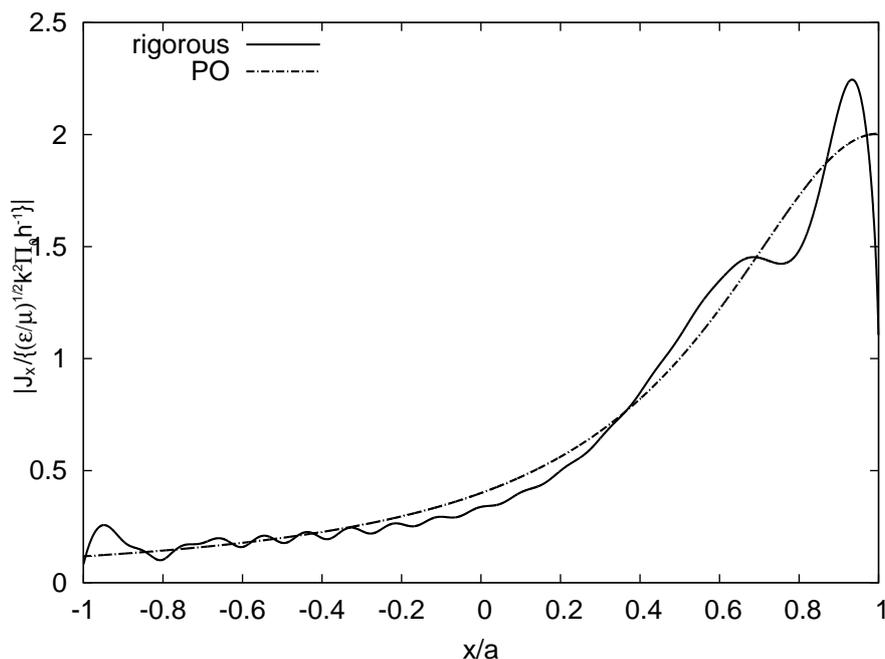


図 3.21: 物理光学近似界と本手法での電流分布 ( $x$  軸上の  $J_x$ ,  $a/\lambda = 5.0$ ,  $h = 0.5$ ,  $t_0 = (x_0/a)^2 = 1.0$ )

さらに、電流の振動が物理光学近似界と回折界との干渉であることを確認するために、高さを  $h = 1.0$  と大きくした場合の結果を図 3.22 に示す。「PO+diff.」は、物理光学近似界と  $x = \pm a$  および  $y = z = 0$  での回折界 [11] (ただし、多重回折界は含まない) を足したものを示した。電流の変化を見ると、 $x/a = 0.8$  付近で最大値となり、 $x$  が減少し波源からの距離が離れるにしたがって値が小さくなっているが、振動が顕著になっている。

本手法と PO+diff. を比較すると、波源に近い側でよく一致している。また反対側 ( $x < 0$ ) は、振動は異なるが周期は一致している。このように、PO のみと比べてより精度の高い高周波近似である、回折界を考慮することで両者はほぼ一致しており、本手法が妥当であると確認できる。

## 3.6 むすび

本章では、水平方向に偏波した電氣的微小ダイポールの場合の解析方法を検討し、波長と比較して大きな導体円板での数値計算を行い、その特性について議論した。以下、本章をまとめる。

- まず、これまで行われていなかった波源が任意の位置にある場合についての級数展開表現を定式化した。その際、収束性の問題も考慮し、条件はあるが、円板の半径に対する波源の高さに依らない定式化を実現した。また、この級数展開式の数値計算にお

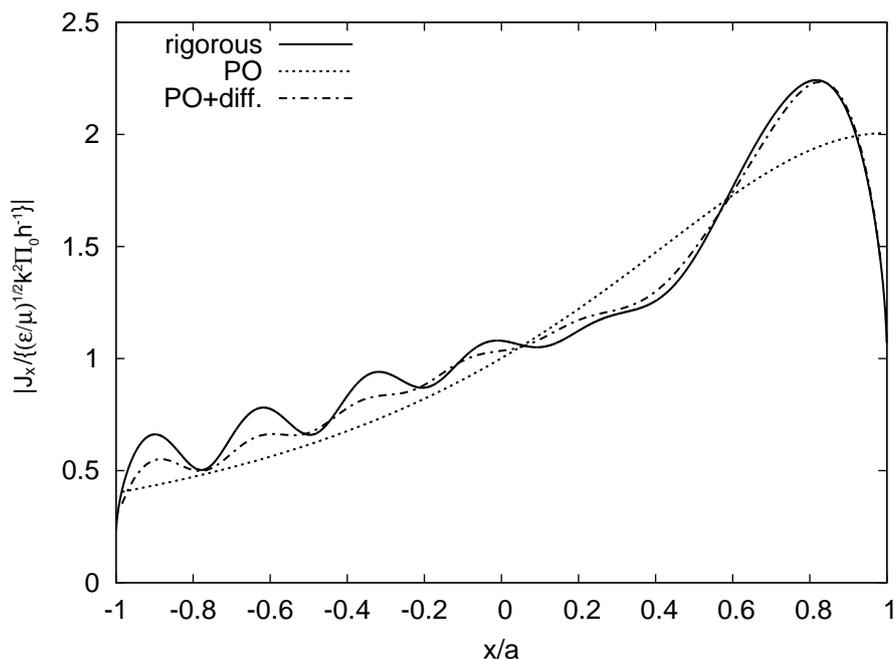


図 3.22: 物理光学近似界および等価端部電流法と本手法での電流分布 ( $x$  軸上の  $J_x$ ,  $a/\lambda = 2.0$ ,  $h = 1.0$ ,  $t_0 = (x_0/a)^2 = 1.0$ )

いても精度の問題が発生したため，その原因を探った．その結果，級数式の値が一時的に大きな値となるため大きなデータ長が必要であり，その精度を保つために，多倍長精度数値計算が有効であることを示した．

- 次に，級数展開式の計算に必要な項数についての特性を調査し，円板の大きさや波源の高さに対する項数の指標を示した．
- これらの結果を踏まえて，電流分布を計算した．まず波源が中心軸上にある場合について，Inawashiro の結果と比較した．さらに，これまで計算されていなかった波長と比較して大きな円板の場合についての電流分布計算を行い，特性を検討した．
- さらに，波源が中心軸上から外れた場合の電流分布を計算した．円板の大きさ，波源の高さ，波源の位置を変化させ，その特性を議論した．また，波源を円板から徐々に遠ざけることによって，平面波での結果に近づいていくことから，本手法の妥当性を確認できた．
- 最後に，物理光学近似界および等価端部電流法の結果と比較し，本手法による電流分布の妥当性を確認できた．

## 参考文献

- [1] Y. Nomura, and S. Katsura, “Diffraction of electromagnetic waves by circular plate and circular hole,” J. Physical Society of Japan, vol.10, no.4, pp.285-304, Apr 1955.
- [2] S. Inawashiro, “Diffraction of electromagnetic waves from an electric dipole by a conducting circular disc,” J. Physical Society of Japan, vol.18, no.2, pp.273-287, Feb. 1963.
- [3] K. Hongo, A.D.U. Jafri, and Q.A. Naqvi, “Scattering of electromagnetic spherical wave by a perfectly conducting disk,” Progress In Electromagnetics Research, vol.129, pp.315-343, 2012.
- [4] 森口繁一，宇田川銑久，一松信，岩波数学公式 III，p.149，岩波書店，1960.
- [5] 文献 [4] の pp.180–182.
- [6] 文献 [4] の p.145.
- [7] 文献 [4] の p.95.
- [8] 文献 [4] の p.2.
- [9] 文献 [4] の p.58.
- [10] 文献 [4] の p.59.
- [11] E. Yamashita, Analysis Methods of Electromagnetic Wave Problems, Artech House, 1990.



# 第4章 垂直微小ダイポールを波源とする 完全導体円板による散乱

## 4.1 はじめに

前章では水平方向を向いた微小ダイポールを波源とする場合の解析を行った．本章では，この解析方法を発展させ，垂直方向に偏波した電氣的微小ダイポールを波源とする完全導体円板による散乱界を厳密に解析する．ここでは，境界条件の下で得られる非斉次微分方程式の解を散乱界と整合することで展開係数を決定している．

近年，Balaban らはここで扱う問題に対して，Coupled Dual Integral Equations(CDIEs)を用いた方法を提案している．しかし，その表現式は積分形式に止まっている [1, 2]．また，Hongo らは Kobayashi Potential を用いて問題を扱っている．しかし，波源の位置に関する解析的な表現が具体的に示されていない．さらに，数値計算例は1波長程度までと小さい円板に対する遠方散乱界に限られている [3]．

そこで，まず波源と円板との距離が円板半径より遠い場合に収束する級数表現式を導出した後，その距離が近い場合に収束する定式化も行う．数値計算例では，別法との比較が容易な場合として中心軸上に波源を固定し，0.5 から 2.0 波長，さらに大きい円板の場合として 5.0 波長での電流分布を求め，比較検討を行い，本手法の妥当性を述べる．

## 4.2 問題の設定

図 4.1 のように， $z = 0$  の  $x$ - $y$  平面に原点を中心とした半径  $a$  の非常に薄い完全導体円板が置かれており，さらに  $z$  軸方向を向き，円板に対して垂直な電氣的微小ダイポール波源（以下，垂直微小ダイポールと呼ぶ） $Id\ell$  が  $(x_0, 0, z_0)$  に置かれた場合の電磁界分布を求める．ここでは，電界  $E$  および磁界  $H$  を入射界  $E^{(i)}$ ,  $H^{(i)}$  と散乱界  $E^{(s)}$ ,  $H^{(s)}$  に分けて，

$$E = E^{(i)} + E^{(s)} \quad (4.1)$$

$$H = H^{(i)} + H^{(s)} \quad (4.2)$$

とし，ダイポール波源からの電磁界を入射波としたときの散乱界を求めることにする．

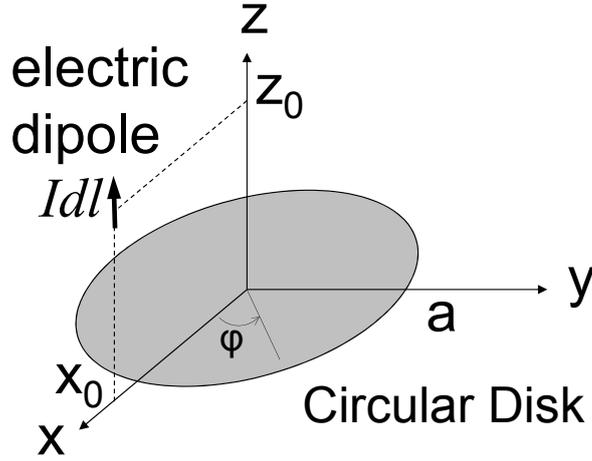


図 4.1: 導体円板の座標系

入射界の電氣的ヘルツベクトルを  $\Pi^{(i)}$ ，散乱界の電氣的ヘルツベクトルを  $\Pi^{(s)}$  とすると，界全体の電氣的ヘルツベクトル  $\Pi$  は，

$$\Pi = \Pi^{(i)} + \Pi^{(s)} \quad (4.3)$$

と表すことができる．

このヘルツベクトルを用いることで，式 (A.1)，(A.2) より，電界及び磁界は次のように表すことができる．

$$\mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \Pi) + k^2 \Pi \quad (4.4)$$

$$\mathbf{H} = \frac{jk}{\eta} \nabla \times \Pi \quad (4.5)$$

ここでヘルツベクトル  $\Pi$  は，Helmholtz 方程式

$$\nabla^2 \Pi + k^2 \Pi = 0 \quad (4.6)$$

を満足し，さらに電界の  $x, y$  成分  $E_x, E_y$  および磁界の  $z$  成分  $H_z$  に対する境界条件

$$E_x = E_x^{(i)} + E_x^{(s)} = 0 \quad (4.7)$$

$$E_y = E_y^{(i)} + E_y^{(s)} = 0 \quad (4.8)$$

$$H_z = H_z^{(i)} + H_z^{(s)} = 0 \quad (z = 0, \sqrt{x^2 + y^2} < a) \quad (4.9)$$

と，付録 A.2 式 (A.6)，(A.8) より，磁界の  $H_\varphi, H_\theta$  成分に対する端点条件

$$H_\varphi = O(\delta^{\frac{1}{2}}) \quad (4.10)$$

$$H_\theta = O(\delta^{-\frac{1}{2}}) \quad (\delta = \sqrt{(a - \sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2} \rightarrow 0) \quad (4.11)$$

を満足する．

### 4.3 解析

平面波入射に対する第2章および水平微小ダイポール波源に対する第3章では、波動方程式の解を円板上で波源からの界を打ち消す項と端点条件を満足させるための補正項に分割した。ここでは円板上での境界条件から展開係数の決定条件を導出する。

#### 4.3.1 ヘルツベクトルによる入射界と散乱界の表現

座標  $(x_0, 0, z_0)$  に置かれ、 $z$  軸方向を向いた電氣的微小ダイポールからの放射界  $\Pi^{(i)}$  は、波源が  $z$  成分のみで、

$$\mathbf{\Pi}^{(i)} = (0, 0, \Pi_z^{(i)}) \quad (4.12)$$

$$\Pi_z^{(i)} = a\Pi_0 \frac{e^{-jkR}}{R}, \quad \Pi_0 = \frac{\eta Idl}{4\pi jka} \quad (4.13)$$

$$R = \sqrt{(x-x_0)^2 + y^2 + (z-z_0)^2} \quad (4.14)$$

と表される。ここで、

$$x_0 \geq 0, \quad z_0 > 0$$

と制限しても一般性を失うことはないので、以降これを用いて解析する。

また、導体円板上の誘導電流は  $z$  成分を持たないので、これまでと同様に、散乱界も  $x$  および  $y$  成分のみを持つ電氣的ヘルツベクトルを用いて表すことができる。

$$\mathbf{\Pi}^{(s)} = (\Pi_x^{(s)}, \Pi_y^{(s)}, 0) \quad (4.15)$$

円板は  $x$ - $y$  面内で回転対称であり、 $z$  方向を向いた波源は  $x$ - $z$  平面内にあることから、 $\Pi_x^{(s)}$  および  $\Pi_y^{(s)}$  は角度  $\varphi$  に関してそれぞれ偶関数および奇関数となり、散乱界のヘルツベクトル  $\mathbf{\Pi}^{(s)}$  は円筒座標系を用いて、

$$\Pi_x^{(s)} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_n S_m^n(r, z) P_{x_m}^n \cos n\varphi \quad (4.16)$$

$$\Pi_y^{(s)} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_n S_m^n(r, z) P_{y_m}^n \sin n\varphi \quad (4.17)$$

$$\Pi_z^{(s)} = 0 \quad (4.18)$$

と展開できる。ただし、 $P_{x_m}^n, P_{y_m}^n$  は展開係数であり、 $S_m^n(r, z)$  は第2章式(2.21)と同様で、文献[4]で示されている波動方程式の固有関数であり、導体円板表面を除いて、導関数も含めて連続な性質を持っている。また、 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 、 $\varphi = \tan^{-1}(y/x)$  であり、式中の  $\epsilon_n$  は、

$$\epsilon_n = \begin{cases} 1 & (n=0) \\ 2 & (n \neq 0) \end{cases}$$

である。

### 4.3.2 導体円板上での入射界の表現

円板上での境界条件から展開係数の決定条件を導出するため、まずここでは、円板上における垂直微小ダイポール波源の入射界の表現を導出する。

このとき  $\Pi_z^{(i)}$  を円筒座標系で表現し、さらにフーリエ級数に展開して書き換える。ここで、付録 A.12 の式 (A.64) を  $\varphi_0 = \tan^{-1} \frac{x_0}{y_0} = 0$  として利用すると、

$$\begin{aligned}\Pi_z^{(i)} &= \Pi_0 \int_0^\infty \frac{\xi e^{-h\sqrt{\xi^2-\gamma^2}}}{\sqrt{\xi^2-\gamma^2}} J_0\left(\frac{r}{a}\xi\right) d\xi \\ &= \Pi_0 \sum_{n=0}^\infty \epsilon_n \cos n\varphi \int_0^\infty \frac{\xi e^{-h\sqrt{\xi^2-\gamma^2}}}{\sqrt{\xi^2-\gamma^2}} J_n(\xi\sqrt{t}) J_n(\xi\sqrt{t_0}) d\xi\end{aligned}\quad (4.19)$$

と表すことができる。ただし、

$$h = \frac{z_0}{a} > 0, \quad t_0 = \frac{x_0^2}{a^2}, \quad t = \frac{r^2}{a^2}$$

として表現している。

### 4.3.3 境界条件から得られる導体円板上でのヘルツベクトル

円板上 ( $z = 0$ ) での電界の接線成分および磁界の法線成分に対する境界条件、式 (4.7)-(4.9) に式 (4.4), (4.5), (4.12), (4.15) を代入し、整理すると、

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Pi^{(s)}_x}{\partial x} + \frac{\partial \Pi^{(s)}_y}{\partial y} \right) + k^2 \Pi^{(s)}_x + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \Pi^{(i)}_z}{\partial z} \Big|_{z=\pm 0} \right) = 0 \quad (4.20)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \Pi^{(s)}_x}{\partial x} + \frac{\partial \Pi^{(s)}_y}{\partial y} \right) + k^2 \Pi^{(s)}_y + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \Pi^{(i)}_z}{\partial z} \Big|_{z=\pm 0} \right) = 0 \quad (4.21)$$

$$\frac{\partial \Pi^{(s)}_y}{\partial x} - \frac{\partial \Pi^{(s)}_x}{\partial y} = 0 \quad (4.22)$$

が得られる。ここで、式 (4.22) から任意のスカラー関数  $U(x, y)$  を用いて、

$$\Pi^{(s)}(x, y, 0) = \nabla_t U(x, y) \quad (4.23)$$

と表すことができる。ただし、 $\nabla_t = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$  は 2 次元の微分演算子である。式 (4.20), (4.21) に式 (4.23) を代入して整理すると、微分方程式

$$\frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial y^2} + k^2 U(x, y) = - \frac{\partial \Pi_z^{(i)}}{\partial z} \Big|_{z=0} + C \quad (4.24)$$

が得られる。ここで  $C$  は任意の定数である。式 (4.24) に式 (4.19) を代入して整理し、さらに円筒座標系に変換した後、 $\varphi$  に関する対称性を考慮すると、 $r = 0$  で有界なこの非斉次線形微分方程式の解は付録 A.13 の式 (A.75) より、

$$U(r, \varphi) = \sum_{n=0}^\infty \epsilon_n U_n(r) \cos n\varphi \quad (4.25)$$

と表される．ただし，

$$U_n(r) = A_n J_n(kr) + a \Pi_0 \int_0^\infty \frac{\xi e^{-\frac{z_0}{a} \sqrt{\xi^2 - \gamma^2}}}{\xi^2 - \gamma^2} J_n(\xi \sqrt{t}) J_n(\xi \sqrt{t_0}) d\xi \quad (4.26)$$

である．ここで，定数  $C$  は導関数が零となりヘルツベクトルに影響しないので除いている．さらに，波数  $k$  にはわずかな損失を仮定して，

$$k = k_r - j k_i, \quad (0 < k_i \ll |k|)$$

とし，被積分関数中の極  $\xi = \gamma (= ka)$  は実軸の僅かに下方向にあるとしておく ( $\text{Im}[\gamma] < 0$ )．

#### 4.3.4 導体円板上での界の整合

ここで，式 (4.23) を円筒座標系で表すと，

$$\Pi_x^{(s)}(r, \varphi) = \frac{\partial U(r, \varphi)}{\partial r} \cos \varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial U(r, \varphi)}{\partial \varphi} \sin \varphi \quad (4.27)$$

$$\Pi_y^{(s)}(r, \varphi) = \frac{\partial U(r, \varphi)}{\partial r} \sin \varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial U(r, \varphi)}{\partial \varphi} \cos \varphi \quad (4.28)$$

となる．これに式 (4.25) を代入すると，

$$\begin{aligned} \Pi_x^{(s)}(r, \varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \left\{ U'_n \cos n\varphi \cos \varphi + \frac{n}{r} U_n \sin n\varphi \sin \varphi \right\} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \left[ U'_n \{ \cos(n-1)\varphi + \cos(n+1)\varphi \} + \frac{n}{r} U_n \{ \cos(n-1)\varphi - \cos(n+1)\varphi \} \right] \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \left[ \left\{ U'_n + \frac{n}{r} U_n \right\} \cos(n-1)\varphi + \left\{ U'_n - \frac{n}{r} U_n \right\} \cos(n+1)\varphi \right] \\ &= \left\{ U'_1 + \frac{1}{r} U_1 \right\} + \left\{ U'_0 + U'_2 + \frac{2}{r} U_2 \right\} \cos \varphi + \left\{ U'_1 - \frac{1}{r} U_1 + U'_3 + \frac{3}{r} U_3 \right\} \cos 2\varphi + \dots \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \left\{ U'_{n-1} - \frac{n-1}{r} U_{n-1} + U'_{n+1} + \frac{n+1}{r} U_{n+1} \right\} \cos n\varphi \quad (4.29) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Pi_y^{(s)}(r, \varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \left\{ U'_n \cos n\varphi \sin \varphi - \frac{n}{r} U_n \sin n\varphi \cos \varphi \right\} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[ U'_n \{ -\sin(n-1)\varphi + \sin(n+1)\varphi \} - \frac{n}{r} U_n \{ \sin(n-1)\varphi + \sin(n+1)\varphi \} \right] \\ &= \left\{ U'_0 - U'_2 - \frac{2}{r} U_2 \right\} \sin \varphi + \left\{ U'_1 - \frac{1}{r} U_1 - U'_3 - \frac{3}{r} U_3 \right\} \sin 2\varphi \\ &\quad + \left\{ U'_2 - \frac{2}{r} U_2 - U'_4 - \frac{4}{r} U_4 \right\} \sin 3\varphi + \dots \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n \left\{ U'_{n-1} - \frac{n-1}{r} U_{n-1} - U'_{n+1} - \frac{n+1}{r} U_{n+1} \right\} \sin n\varphi \quad (4.30) \end{aligned}$$

となる．ただし  $U_n$  は  $U_n(r)$  を表し， $U'_n$  は  $U_n(r)$  の導関数を表す．

式 (4.29)，(4.30) に式 (4.26) の  $U_n(r)$  を代入して  $\Pi_x^{(s)}(r, \varphi)$ ， $\Pi_y^{(s)}(r, \varphi)$  を求める．式 (4.26) は  $U_n(r)$  について線形であるため，右辺を第 1 項と第 2 項に分けて計算する．まず式 (4.26) の右辺の第 1 項  $A_n J_n(kr) (= A_n J_n(\gamma\sqrt{t}))$  を式 (4.29) および (4.30) に代入すると，

$$\begin{aligned} \Pi_x^{(s)1}(r, \varphi) &= \frac{k}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \left[ A_{n-1} \left\{ J'_{n-1}(\gamma\sqrt{t}) - \frac{n-1}{\gamma\sqrt{t}} J_{n-1}(\gamma\sqrt{t}) \right\} \right. \\ &\quad \left. + A_{n+1} \left\{ J'_{n+1}(\gamma\sqrt{t}) + \frac{n+1}{\gamma\sqrt{t}} J_{n+1}(\gamma\sqrt{t}) \right\} \right] \cos n\varphi \\ &= \frac{k}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \{ A_{n+1} - A_{n-1} \} J_n(\gamma\sqrt{t}) \cos n\varphi \end{aligned} \quad (4.31)$$

$$\begin{aligned} \Pi_y^{(s)1}(r, \varphi) &= \frac{k}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n \left[ A_{n-1} \left\{ J'_{n-1}(\gamma\sqrt{t}) - \frac{n-1}{\gamma\sqrt{t}} J_{n-1}(\gamma\sqrt{t}) \right\} \right. \\ &\quad \left. - A_{n+1} \left\{ J'_{n+1}(\gamma\sqrt{t}) + \frac{n+1}{\gamma\sqrt{t}} J_{n+1}(\gamma\sqrt{t}) \right\} \right] \cos n\varphi \\ &= -\frac{k}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n \{ A_{n+1} + A_{n-1} \} J_n(\gamma\sqrt{t}) \sin n\varphi \end{aligned} \quad (4.32)$$

となる．ただし， $A_{-1} = -A_1$  である．

同様にして，式 (4.26) の右辺の第 2 項を式 (4.29) および (4.30) に代入すると，

$$\begin{aligned} \Pi_x^{(s)2}(r, \varphi) &= \frac{\Pi_0}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \int_0^{\infty} \frac{\xi^2 e^{-h\sqrt{\xi^2 - \gamma^2}}}{\xi^2 - \gamma^2} \{ J_{n+1}(\xi\sqrt{t_0}) - J_{n-1}(\xi\sqrt{t_0}) \} J_n(\xi\sqrt{t}) d\xi \cos n\varphi \\ &= \Pi_0 \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \int_0^{\infty} \frac{\xi^2 e^{-h\sqrt{\xi^2 - \gamma^2}}}{\xi^2 - \gamma^2} \left\{ -\frac{n}{\xi\sqrt{t_0}} J_n(\xi\sqrt{t_0}) + J_{n+1}(\xi\sqrt{t_0}) \right\} J_n(\xi\sqrt{t}) d\xi \cos n\varphi \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned} \Pi_y^{(s)2}(r, \varphi) &= -\frac{\Pi_0}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \int_0^{\infty} \frac{\xi^2 e^{-h\sqrt{\xi^2 - \gamma^2}}}{\xi^2 - \gamma^2} \{ J_{n+1}(\xi\sqrt{t_0}) + J_{n-1}(\xi\sqrt{t_0}) \} J_n(\xi\sqrt{t}) d\xi \sin n\varphi \\ &= -\frac{n}{\sqrt{t_0}} \Pi_0 \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \int_0^{\infty} \frac{\xi e^{-h\sqrt{\xi^2 - \gamma^2}}}{\xi^2 - \gamma^2} J_n(\xi\sqrt{t_0}) J_n(\xi\sqrt{t}) d\xi \sin n\varphi \end{aligned} \quad (4.34)$$

となる．式 (4.31)–(4.34) より，式 (4.29)，(4.30) の  $\Pi_x^{(s)}(r, \varphi)$  および  $\Pi_y^{(s)}(r, \varphi)$  は次のように

表現できる .

$$\begin{aligned}
\Pi_x^{(s)}(r, \varphi) &= \Pi_x^{(s)1}(r, \varphi) + \Pi_x^{(s)2}(r, \varphi) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \left[ \frac{\gamma}{2a} (A_{n+1} - A_{n-1}) J_n(\gamma\sqrt{t}) \right. \\
&\quad \left. + \Pi_0 \int_0^{\infty} \frac{\xi^2 e^{-h\sqrt{\xi^2 - \gamma^2}}}{\xi^2 - \gamma^2} \left\{ -\frac{n}{\xi\sqrt{t_0}} J_n(\xi\sqrt{t_0}) + J_{n+1}(\xi\sqrt{t_0}) \right\} J_n(\xi\sqrt{t}) d\xi \right] \cos n\varphi
\end{aligned} \tag{4.35}$$

$$\begin{aligned}
\Pi_y^{(s)}(r, \varphi) &= \Pi_y^{(s)1}(r, \varphi) + \Pi_y^{(s)2}(r, \varphi) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \left[ -\frac{\gamma}{2a} (A_{n+1} + A_{n-1}) J_n(\gamma\sqrt{t}) \right. \\
&\quad \left. - \frac{n}{\sqrt{t_0}} \Pi_0 \int_0^{\infty} \frac{\xi e^{-h\sqrt{\xi^2 - \gamma^2}}}{\xi^2 - \gamma^2} J_n(\xi\sqrt{t_0}) J_n(\xi\sqrt{t}) d\xi \right] \sin n\varphi
\end{aligned} \tag{4.36}$$

さらに, 導出した式 (4.35), (4.36) と,  $z = 0, r < a$  での散乱界, 式 (4.16), (4.17) を用いて整合すると,

$$\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{\infty} P_{xm}^n S_m^n(r, 0) &= \frac{\gamma}{2a} (A_{n+1} - A_{n-1}) J_n(\gamma\sqrt{t}) \\
&\quad + \Pi_0 \int_0^{\infty} \frac{\xi^2 e^{-h\sqrt{\xi^2 - \gamma^2}}}{\xi^2 - \gamma^2} \left\{ -\frac{n}{\xi\sqrt{t_0}} J_n(\xi\sqrt{t_0}) + J_{n+1}(\xi\sqrt{t_0}) \right\} J_n(\xi\sqrt{t}) d\xi
\end{aligned} \tag{4.37}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{m=0}^{\infty} P_{ym}^n S_m^n(r, 0) &= -\frac{\gamma}{2a} (A_{n+1} + A_{n-1}) J_n(\gamma\sqrt{t}) \\
&\quad - \frac{n}{\sqrt{t_0}} \Pi_0 \int_0^{\infty} \frac{\xi e^{-h\sqrt{\xi^2 - \gamma^2}}}{\xi^2 - \gamma^2} J_n(\xi\sqrt{t_0}) J_n(\xi\sqrt{t}) d\xi \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)
\end{aligned} \tag{4.38}$$

となる . この両辺に,

$$\frac{\Gamma(n + \ell + 1)\Gamma(\ell + 1)}{\Gamma(n + \ell + \frac{1}{2})\Gamma(\ell + \frac{1}{2})} \frac{t^{n/2}}{\sqrt{1-t}} \times u_\ell^n(t) \tag{4.39}$$

を掛け,  $0 < t < 1$  で積分し, 整理すると, 2.3.3 と同様にして,

$$\sum_{m=0}^{\infty} G_{\ell,m}^n P_{xm}^n = \frac{\gamma}{2a} (A_{n+1} - A_{n-1}) f_\ell^n + F_{x\ell}^n \tag{4.40}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} G_{\ell,m}^n P_{ym}^n = -\frac{\gamma}{2a} (A_{n+1} + A_{n-1}) f_\ell^n + F_{y\ell}^n \tag{4.41}$$

となる . ここで, 連立方程式の係数  $G_{\ell,m}^n, f_\ell^n$  は, 2.3.5 と同様に, 式 (A.39), (A.38), (A.39)

および (A.40) より

$$G_{\ell,m}^n = g_1(n+m+\ell, |m-\ell|) - jg_2(n+m+\ell, |m-\ell|) \quad (4.42)$$

$$g_1(p, q) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{k=q}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\Gamma(p-k+\frac{1}{2})\Gamma(2k+1) \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{2k}}{\Gamma(\frac{1}{2}-k)\Gamma(p+k+\frac{3}{2})\Gamma(k+q+1)\Gamma(k-q+1)} \quad (4.43)$$

$$g_2(p, q) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\Gamma(p+k+1)\Gamma(2p+2k+2) \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{2p+2k+1}}{\Gamma(2p+k+2)\Gamma(p+k+q+\frac{3}{2})} \frac{1}{\Gamma(p+k-q+\frac{3}{2})\Gamma(p+k+\frac{3}{2})} \quad (4.44)$$

$$f_{\ell}^n = \frac{\Gamma(\ell+\frac{1}{2})\Gamma(n+\ell+\frac{1}{2})}{\sqrt{2}\Gamma(\ell+1)\Gamma(n+\ell+1)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\nu} \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{n+2\ell+2\nu}}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\nu+n+2\ell+\frac{3}{2})} \quad (4.45)$$

を得ることができる。

さらに

$$F_{x\ell}^n = \frac{\Gamma(n+\ell+1)\Gamma(\ell+1)}{\Gamma(n+\ell+\frac{1}{2})\Gamma(\ell+\frac{1}{2})} \Pi_0 \int_0^{\infty} \frac{\xi^2 e^{-h\sqrt{\xi^2-\gamma^2}}}{\xi^2-\gamma^2} \left\{ -\frac{n}{\xi\sqrt{t_0}} J_n(\xi\sqrt{t_0}) + J_{n+1}(\xi\sqrt{t_0}) \right\} \\ \times \left\{ \int_0^1 \frac{t^{n/2} J_n(\xi\sqrt{t})}{\sqrt{1-t}} \times u_{\ell}^n(t) dt \right\} d\xi \quad (4.46)$$

$$F_{y\ell}^n = -\frac{\Gamma(n+\ell+1)\Gamma(\ell+1)}{\Gamma(n+\ell+\frac{1}{2})\Gamma(\ell+\frac{1}{2})} \frac{n}{\sqrt{t_0}} \Pi_0 \int_0^{\infty} \frac{\xi e^{-h\sqrt{\xi^2-\gamma^2}}}{\xi^2-\gamma^2} J_n(\xi\sqrt{t_0}) \\ \times \left\{ \int_0^1 \frac{t^{n/2} J_n(\xi\sqrt{t})}{\sqrt{1-t}} \times u_{\ell}^n(t) dt \right\} d\xi \quad (4.47)$$

であり,  $t$  での積分は式 (A.35) を代入して,

$$F_{x\ell}^n = \Pi_0 \int_0^{\infty} \frac{\xi^{3/2} e^{-h\sqrt{\xi^2-\gamma^2}}}{\xi^2-\gamma^2} \left\{ -\frac{n}{\xi\sqrt{t_0}} J_n(\xi\sqrt{t_0}) + J_{n+1}(\xi\sqrt{t_0}) \right\} J_{n+2\ell+\frac{1}{2}}(\xi) d\xi \quad (4.48)$$

$$F_{y\ell}^n = -\frac{n}{\sqrt{t_0}} \Pi_0 \int_0^{\infty} \frac{\xi^{1/2} e^{-h\sqrt{\xi^2-\gamma^2}}}{\xi^2-\gamma^2} J_n(\xi\sqrt{t_0}) J_{n+2\ell+\frac{1}{2}}(\xi) d\xi \quad (4.49)$$

と表現できる。

$$F_{1\ell}^n = \frac{n\Pi_0}{\sqrt{t_0}} \int_0^{\infty} \frac{\xi^{1/2} e^{-h\sqrt{\xi^2-\gamma^2}}}{\xi^2-\gamma^2} J_{n+2\ell+\frac{1}{2}}(\xi) J_n(\xi\sqrt{t_0}) d\xi \quad (4.50)$$

$$F_{2\ell}^n = \Pi_0 \int_0^{\infty} \frac{\xi^{3/2} e^{-h\sqrt{\xi^2-\gamma^2}}}{\xi^2-\gamma^2} J_{n+2\ell+\frac{1}{2}}(\xi) J_{n+1}(\xi\sqrt{t_0}) d\xi \quad (4.51)$$

と置くと, 式 (4.46), (4.47) の  $F_{x\ell}^n$  および  $F_{y\ell}^n$  は,

$$F_{x\ell}^n = -F_{1\ell}^n + F_{2\ell}^n \quad (4.52)$$

$$F_{y\ell}^n = -F_{1\ell}^n \quad (4.53)$$

と表すことができる。

展開係数  $P_{x_m}^n, P_{y_m}^n$  は式 (4.40), (4.41) の無限連立 1 次方程式を解くことで得られる .

$$\begin{aligned} [P_{x_m}^n] &= [G_{\ell,m}^n]^{-1} \left\{ \frac{\gamma}{2a} (A_{n+1} - A_{n-1}) [f_\ell^n] + [F_{x_\ell}^n] \right\} \\ &= \frac{\gamma}{2a} (A_{n+1} - A_{n-1}) [\widetilde{f_m^n}] + [\widetilde{F_{x_m}^n}] \end{aligned} \quad (4.54)$$

$$\begin{aligned} [P_{y_m}^n] &= [G_{\ell,m}^n]^{-1} \left\{ -\frac{\gamma}{2a} (A_{n+1} + A_{n-1}) [f_\ell^n] + [F_{y_\ell}^n] \right\} \\ &= -\frac{\gamma}{2a} (A_{n+1} + A_{n-1}) [\widetilde{f_m^n}] + [\widetilde{F_{y_m}^n}] \end{aligned} \quad (4.55)$$

ただし ,

$$[\widetilde{F_{x_m}^n}] = [G_{\ell,m}^n]^{-1} [F_{x_\ell}^n] \quad (4.56)$$

$$[\widetilde{F_{y_m}^n}] = [G_{\ell,m}^n]^{-1} [F_{y_\ell}^n] \quad (4.57)$$

であり ,  $[\widetilde{f_m^n}]$  は 2.3.3 の式 (2.69) と同様である .

#### 4.3.5 端点条件による補助係数の決定

次に端点条件を利用して  $A_n$  を決定する .

磁界のヘルツベクトル式 (4.5) より , 円板の円周方向の磁界成分  $H_\varphi^{(s)}$  は ,

$$\begin{aligned} H_\varphi^{(s)} &= -H_x^{(s)} \sin \varphi + H_y^{(s)} \cos \varphi \\ &= j\omega\varepsilon \frac{\partial}{\partial z} (\Pi_y^{(s)} \sin \varphi + \Pi_x^{(s)} \cos \varphi) \\ &= j\omega\varepsilon \frac{\partial \Pi_r^{(s)}}{\partial z} \end{aligned} \quad (4.58)$$

と表される . ただし , 散乱界のヘルツベクトルの  $r$  成分  $\Pi_r^{(s)}$  は ,

$$\Pi_r^{(s)} = \Pi_x^{(s)} \cos \varphi + \Pi_y^{(s)} \sin \varphi \quad (4.59)$$

である . ここで ,  $\Pi_x^{(s)}, \Pi_y^{(s)}$  を ,  $\varphi$  に関する対称性を考慮しながらフーリエ級数展開すると ,

$$\Pi_x^{(s)} = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \Pi_{x_n}^{(s)(e)} \cos n\varphi \quad (4.60)$$

$$\Pi_y^{(s)} = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \Pi_{y_n}^{(s)(o)} \sin n\varphi \quad (4.61)$$

となる . これら式と , 式 (4.16) , (4.17) より ,

$$\Pi_{x_n}^{(s)(e)} = \sum_{m=0}^{\infty} P_{x_m}^n S_m^n(r, z) \quad (4.62)$$

$$\Pi_{y_n}^{(s)(o)} = \sum_{m=0}^{\infty} P_{y_m}^n S_m^n(r, z) \quad (4.63)$$

が得られる．すると，式 (A.27) のベクトルの円筒座標表現およびフーリエ級数展開 (A.33) を使って，

$$\Pi_r^{(s)} = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \left\{ \left( \Pi_x^{(s)(e)} + \Pi_x^{(s)(e)} - \Pi_y^{(s)(o)} + \Pi_y^{(s)(o)} \right) \cos n\varphi \right\} \quad (4.64)$$

が得られる．ただし，

$$\Pi_{x,y_0}^{(s)(o)} = 0, \quad \Pi_x^{(s)(e)} = \Pi_x^{(s)(e)}, \quad \Pi_y^{(s)(o)} = -\Pi_y^{(s)(o)}$$

である．ここで， $H_\varphi$  のフーリエ級数展開

$$H_\varphi^{(s)} = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \left\{ H_{\varphi_n}^{(e)} \cos n\varphi + H_{\varphi_n}^{(o)} \sin n\varphi \right\} \quad (4.65)$$

と式 (4.58) より，式 (4.62)，(4.63) を利用すると，式 (4.65) の  $H_{\varphi_n}^{(e)}$  は，

$$H_{\varphi_n}^{(e)} = j\omega\epsilon \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ P_{x_m}^{n-1} S_m^{n-1}(r, z) + P_{x_m}^{n+1} S_m^{n+1}(r, z) - P_{y_m}^{n-1} S_m^{n-1}(r, z) + P_{y_m}^{n+1} S_m^{n+1}(r, z) \right\} \quad (4.66)$$

と表される．円板の端部近傍 ( $z = \pm 0$ ,  $r = a - \delta$  ( $0 < \delta \ll a$ )) では，式 (A.43) より，

$$\frac{\partial S_m^n(r, z)}{\partial z} \simeq \mp \frac{(-1)^m}{\sqrt{\pi a}} \delta^{-\frac{1}{2}}, \quad (\delta = a - r \rightarrow 0, z = \pm 0) \quad (4.67)$$

であるから，式 (4.66) に式 (4.67) を代入すると，

$$H_{\varphi_n}^{(e)} \simeq \mp \frac{j\omega\epsilon}{2\sqrt{\pi a}} \delta^{-\frac{1}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left\{ P_{x_m}^{n-1} + P_{x_m}^{n+1} - P_{y_m}^{n-1} + P_{y_m}^{n+1} \right\} \quad (4.68)$$

である．ただし，

$$P_{x_m}^{-1} = P_{x_m}^1, \quad P_{y_m}^{-1} = -P_{y_m}^1$$

である．端点条件式 (4.11) より式 (4.68) はエッジ近傍で有界でなければならない．したがって，式 (4.68) は，

$$\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left\{ P_{x_m}^{n-1} + P_{x_m}^{n+1} - P_{y_m}^{n-1} + P_{y_m}^{n+1} \right\} = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.69)$$

を満足する必要がある．式 (4.69) に式 (4.54)，(4.55) の各ベクトルの要素を代入すると，

$$\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left\{ \frac{\gamma}{2a} (A_n - A_{n-2}) \widetilde{f_m^{n-1}} + \widetilde{F_{x_m}^{n-1}} + \frac{\gamma}{2a} (A_{n+2} - A_n) \widetilde{f_m^{n+1}} + \widetilde{F_{x_m}^{n+1}} \right. \\ \left. + \frac{\gamma}{2a} (A_n + A_{n-2}) \widetilde{f_m^{n-1}} - \widetilde{F_{y_m}^{n-1}} - \frac{\gamma}{2a} (A_{n+2} + A_n) \widetilde{f_m^{n+1}} + \widetilde{F_{y_m}^{n+1}} \right\} = 0 \quad (4.70)$$

となる．さらに整理すると，

$$\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left\{ \frac{\gamma}{2a} A_n \widetilde{f_m^{n-1}} + \widetilde{F_{x_m}^{n-1}} - \frac{\gamma}{2a} A_n \widetilde{f_m^{n+1}} + \widetilde{F_{x_m}^{n+1}} \right. \\ \left. + \frac{\gamma}{2a} A_n \widetilde{f_m^{n-1}} - \widetilde{F_{y_m}^{n-1}} - \frac{\gamma}{2a} A_n \widetilde{f_m^{n+1}} + \widetilde{F_{y_m}^{n+1}} \right\} = 0 \quad (4.71)$$

となり，したがって  $A_n$  は，

$$A_n = - \frac{\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left\{ \widetilde{F_{x_m}^{n-1}} + \widetilde{F_{x_m}^{n+1}} - \widetilde{F_{y_m}^{n-1}} + \widetilde{F_{y_m}^{n+1}} \right\}}{\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left\{ \frac{\gamma}{a} \widetilde{f_m^{n-1}} - \frac{\gamma}{a} \widetilde{f_m^{n+1}} \right\}} \quad (4.72)$$

と求まる．

#### 4.3.6 級数展開

ここでは，数値計算のために  $F_{1\ell}^n$  および  $F_{2\ell}^n$  を級数展開する．

式 (4.50)，(4.51) は，Bessel 関数の積を級数展開 [5]，

$$J_n(\xi\sqrt{t_0})J_{n+2\ell+\frac{1}{2}}(\xi) \\ = \frac{1}{n!} \left( \frac{\xi\sqrt{t_0}}{2} \right)^n \left( \frac{\xi}{2} \right)^{n+2\ell+\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{G_k(-n-2\ell-2k-\frac{1}{2}, n+1; t_0)}{k!\Gamma(n+2\ell+\frac{3}{2})} \left( \frac{\xi}{2} \right)^k \\ = \frac{t_0^{n/2}}{n!} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{G_k(-n-2\ell-2k-\frac{1}{2}, n+1; t_0)}{2^{2n+2\ell+2k+\frac{1}{2}} k!\Gamma(n+2\ell+\frac{3}{2})} \xi^{2n+2\ell+2k+\frac{1}{2}} \quad (4.73)$$

を利用し，さらに積分と総和を入れ換えることで次のように変形できる．

$$F_{1\ell}^n = \begin{cases} \frac{t_0^{(n-1)/2}}{(n-1)!} \Pi_0 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{G_k(-n-2\ell-2k-\frac{1}{2}, n+1; t_0)}{2^{2n+2\ell+2k+\frac{1}{2}} k!\Gamma(n+2\ell+k+\frac{3}{2})} I_{n+\ell+k} & (n > 0) \\ 0 & (n = 0) \end{cases} \quad (4.74)$$

$$F_{2\ell}^n = \frac{t_0^{(n+1)/2}}{(n+1)!} \Pi_0 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{G_k(-n-2\ell-2k-\frac{1}{2}, n+2; t_0)}{2^{2n+2\ell+2k+\frac{3}{2}} k!\Gamma(n+2\ell+k+\frac{3}{2})} I_{n+\ell+k+1} \quad (4.75)$$

ただし，

$$I_q = \int_0^{\infty} \frac{\xi^{2q+1}}{\xi^2 - \gamma^2} e^{-h\sqrt{\xi^2 - \gamma^2}} d\xi \quad (4.76)$$

である．式 (4.76) は，

$$\begin{aligned}
 I_q &= \gamma^{2q} \int_0^\infty \frac{\xi}{\xi^2 - \gamma^2} e^{-h\sqrt{\xi^2 - \gamma^2}} d\xi + \int_0^\infty \frac{\xi^{2q} - \gamma^{2q}}{\xi^2 - \gamma^2} \xi e^{-h\sqrt{\xi^2 - \gamma^2}} d\xi \\
 &= \gamma^{2q} I_0 + \sum_{p=0}^{q-1} \gamma^{2(q-p-1)} \int_0^\infty \xi^{2p+1} e^{-h\sqrt{\xi^2 - \gamma^2}} d\xi \\
 &= \gamma^{2q} I_0 + \sum_{p=0}^{q-1} \gamma^{2(q-p-1)} \tilde{I}_p
 \end{aligned} \tag{4.77}$$

と表される．

$I_0$  は積分路を複素  $\xi$  平面の正の虚軸に沿った 0 から  $+j\infty$  への経路に変更できて，

$$u = -j\sqrt{\xi^2 - \gamma^2} \tag{4.78}$$

と変数変換する．

$$u \, du = -\xi d\xi \tag{4.79}$$

であるから，

$$\begin{aligned}
 I_0 &= \int_\gamma^{j\infty} \frac{\xi e^{-jh\sqrt{\xi^2 - \gamma^2}}}{\xi^2 - \gamma^2} du \\
 &= \int_0^\infty \frac{e^{-j\gamma hu}}{u} du \\
 &= -\text{Ci}(\gamma h) - j \left\{ \frac{\pi}{2} - \text{Si}(\gamma h) \right\}
 \end{aligned} \tag{4.80}$$

と変形できる．ただし， $\text{Ci}(x)$  および  $\text{Si}(x)$  はそれぞれ余弦積分関数，正弦積分関数を表す．

次に， $\tilde{I}_p$  は，式 (A.36) と同様にすると，実数部と虚数部に分けて，

$$\tilde{I}_p = \int_0^\gamma \xi^{2p+1} e^{-jh\sqrt{\gamma^2 - \xi^2}} d\xi + \int_\gamma^\infty \xi^{2p+1} e^{-h\sqrt{\xi^2 - \gamma^2}} d\xi \tag{4.81}$$

とする．ここで，式 (4.77) の第 1 項を  $\tilde{I}_p^{(1)}$  と置き， $t = \sqrt{\gamma^2 - \xi^2}$  と変換するとフーリエ変換 [6] により，

$$\begin{aligned}
 \tilde{I}_p^{(1)} &= \int_0^\gamma t(\gamma^2 - t^2)^p e^{-jht} dt \\
 &= j \frac{\partial}{\partial h} \int_0^\gamma (\gamma^2 - t^2)^p e^{-jht} dt \\
 &= \frac{\gamma^{2(p+1)}}{2(p+1)} \left[ 1 - \sqrt{\pi}(p+1)! \left( \frac{\gamma h}{2} \right)^{-p-\frac{1}{2}} \{ j J_{p+3/2}(\gamma h) + \mathbf{H}_{p+3/2}(\gamma h) \} \right]
 \end{aligned} \tag{4.82}$$

と変形できる．ただし， $\mathbf{H}_n(x)$  は struve 関数を表す．また第2項を  $\tilde{I}_p^{(2)}$  と置き， $t = \sqrt{\xi^2 - \gamma^2}$  と変換すると Laplace 変換 [6] により，

$$\begin{aligned}\tilde{I}_p^{(2)} &= \int_0^\infty t(\gamma^2 + t^2)^p e^{-ht} dt \\ &= -\frac{\partial}{\partial h} \int_0^\infty (\gamma^2 + t^2)^p e^{-ht} dt \\ &= -\frac{\gamma^{2(p+1)}}{2(p+1)} \left[ 1 + \sqrt{\pi}(p+1)! \left(\frac{\gamma h}{2}\right)^{-p-\frac{1}{2}} \{Y_{p+3/2}(\gamma h) - \mathbf{H}_{p+3/2}(\gamma h)\} \right]\end{aligned}\quad (4.83)$$

と変形できる．したがって，式 (4.82) および (4.83) より， $\tilde{I}_p$  は，

$$\tilde{I}_p = -\frac{j\sqrt{\pi}}{2} p! \gamma^{2(p+1)} \left(\frac{\gamma h}{2}\right)^{-p-\frac{1}{2}} H_{p+\frac{3}{2}}^{(2)}(\gamma h) \quad (4.84)$$

と表される．

よって，式 (4.80) および (4.84) を式 (4.77) に代入すると，式 (4.76) の  $I_q$  は，

$$I_q = -\gamma^{2q} \left[ \left\{ \text{Ci}(\gamma h) + j \left(\frac{\pi}{2} - \text{Si}(\gamma h)\right) \right\} + \frac{j\sqrt{\pi}}{2} \sum_{p=0}^{q-1} p! \left(\frac{\gamma h}{2}\right)^{-p-\frac{1}{2}} H_{p+\frac{3}{2}}^{(2)}(\gamma h) \right] \quad (4.85)$$

と整理される．

この式 (4.85) を利用すると，式 (4.74) および (4.75) は，

$$F_{1\ell}^n = F_{1\ell}^{(1)n} + F_{1\ell}^{(2)n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (4.86)$$

と分割することができる．ただし，

$$\begin{aligned}F_{1\ell}^{(1)n} &= -\frac{t_0^{(n-1)/2}}{\sqrt{2}(n-1)!} \Pi_0 \left\{ \text{Ci}(\gamma h) + j \left(\frac{\pi}{2} - \text{Si}(\gamma h)\right) \right\} \\ &\quad \times \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{G_k(-n-2\ell-2k-\frac{1}{2}, n+1; t_0)}{k! \Gamma(n+2\ell+k+\frac{3}{2})} \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{2(n+\ell+k)}\end{aligned}\quad (4.87)$$

$$\begin{aligned}F_{1\ell}^{(2)n} &= -\frac{j}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{t_0^{(n-1)/2}}{(n-1)!} \Pi_0 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{G_k(-n-2\ell-2k-\frac{1}{2}, n+1; t_0)}{k! \Gamma(n+2\ell+k+\frac{3}{2})} \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{2(n+\ell+k)} \\ &\quad \times \sum_{p=0}^{n+\ell+k-1} p! \left(\frac{\gamma h}{2}\right)^{-p-\frac{1}{2}} H_{p+\frac{3}{2}}^{(2)}(\gamma h) \\ &= -\frac{j}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{t_0^{(n-1)/2}}{(n-1)!} \Pi_0 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{G_k(-n-2\ell-2k-\frac{1}{2}, n+1; t_0)}{k! \Gamma(n+2\ell+k+\frac{3}{2})} \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{2(n+\ell+k)} \\ &\quad \times \sum_{p=0}^{n+\ell+k-1} p! \left(\frac{\gamma h}{2}\right)^{-p-\frac{1}{2}} (J_{p+3/2}(\gamma h) - jY_{p+3/2}(\gamma h))\end{aligned}\quad (4.88)$$

であり,  $Y_\nu(x)$  は Neumann 関数である. ここで式 (4.88) の実数部は Neumann 関数を含むため,  $h < 1$  で収束しない. そこで, この実数部  $\text{Re}F_{1\ell}^{(2)n}$  を  $h < 1$  の場合に収束するように変形する.

まず, 式 (4.88) の実数部  $\text{Re}F_{1\ell}^{(2)n}$  を変形する. 式 (4.88) の実数部に対して, Jacobi の多項式を級数展開し, さらに総和の位置を移動し, 整理すると,

$$\begin{aligned}
 \text{Re}F_{1\ell}^{(2)n} &= -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{t_0^{(n-1)/2}}{(n-1)!}\Pi_0\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{G_k(-n-2\ell-2k-\frac{1}{2},n+1;t_0)}{k!\Gamma(n+2\ell+k+\frac{3}{2})}\left(\frac{\gamma}{2}\right)^{2(n+\ell+k)} \\
 &\quad \times\sum_{p=0}^{n+\ell+k-1}p!\left(\frac{\gamma h}{2}\right)^{-p-\frac{1}{2}}Y_{p+3/2}(\gamma h) \\
 &= -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{t_0^{(n-1)/2}}{(n-1)!}\Pi_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\left(\frac{\gamma}{2}\right)^{2(n+\ell+k)}}{k!\Gamma(n+2\ell+k+\frac{3}{2})} \\
 &\quad \times\sum_{s=0}^k(-1)^s\binom{k}{s}\frac{\Gamma(-n-2\ell-k-\frac{1}{2}+s)\Gamma(n+1)}{\Gamma(-n-2\ell-k-\frac{1}{2})\Gamma(n+1+s)}t_0^s \\
 &\quad \times\sum_{p=0}^{n+\ell+k-1}p!\left(\frac{\gamma h}{2}\right)^{-p-\frac{1}{2}}Y_{p+3/2}(\gamma h) \\
 &= -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{t_0^{(n-1)/2}}{(n-1)!}\Pi_0\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=0}^k\frac{(-1)^k\left(\frac{\gamma}{2}\right)^{2(n+\ell+k)}}{k!\Gamma(n+2\ell+k+\frac{3}{2})} \\
 &\quad \times(-1)^s\binom{k}{s}\frac{\Gamma(-n-2\ell-k-\frac{1}{2}+s)\Gamma(n+1)}{\Gamma(-n-2\ell-k-\frac{1}{2})\Gamma(n+1+s)}t_0^s \\
 &\quad \times\sum_{p=0}^{n+\ell+k-1}p!\left(\frac{\gamma h}{2}\right)^{-p-\frac{1}{2}}Y_{p+3/2}(\gamma h) \\
 &= -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}nt_0^{(n-1)/2}\Pi_0\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=0}^k\frac{(-1)^kt_0^s}{s!(k-s)!\Gamma(n+2\ell+k-s+\frac{3}{2})\Gamma(n+1+s)}\left(\frac{\gamma}{2}\right)^{2(n+\ell+k)} \\
 &\quad \times\sum_{p=0}^{n+\ell+k-1}p!\left(\frac{\gamma h}{2}\right)^{-p-\frac{1}{2}}Y_{p+3/2}(\gamma h)
 \end{aligned} \tag{4.90}$$

を得る. さらに,  $s = s'$ ,  $k = k' + s'$  と変換し, 整理すると,

$$\begin{aligned}
 \text{Re}F_{1\ell}^{(2)n} &= -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}n\Pi_0\sum_{s'=0}^{\infty}\frac{(-1)^{s'}t_0^{s'+(n-1)/2}}{s'!\Gamma(n+s'+1)}\sum_{k'=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k'}\left(\frac{\gamma}{2}\right)^{2(\nu+k')}}{k'!\Gamma(\mu+k'+\frac{3}{2})}\sum_{p=0}^{\nu+k'-1}p!\left(\frac{\gamma h}{2}\right)^{-p-\frac{1}{2}}Y_{p+3/2}(\gamma h) \\
 &= -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}n\Pi_0\sum_{s'=0}^{\infty}\frac{(-1)^{s'}t_0^{s'+(n-1)/2}}{s'!\Gamma(n+s'+1)}T_{n+2\ell,n+\ell+s'}
 \end{aligned} \tag{4.91}$$

が得られる. ただし,

$$T_{\mu,\nu} = \sum_{k'=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k'}\left(\frac{\gamma}{2}\right)^{2(\nu+k')}}{k'!\Gamma(\mu+k'+\frac{3}{2})}\sum_{p=0}^{\nu+k'-1}p!\left(\frac{\gamma h}{2}\right)^{-p-\frac{1}{2}}Y_{p+3/2}(\gamma h) \tag{4.92}$$

である.

$F_2^{(2)n}$  に対しても同様にして，式 (4.75) より，

$$F_{2\ell}^n = F_{2\ell}^{(1)n} + F_{2\ell}^{(2)n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (4.93)$$

$$\begin{aligned} F_{2\ell}^{(1)n} &= -\frac{\sqrt{2}t_0^{(n+1)/2}}{(n+1)!} \Pi_0 \left\{ \text{Ci}(\gamma h) + j \left( \frac{\pi}{2} - \text{Si}(\gamma h) \right) \right\} \\ &\times \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{G_k(-n-2\ell-2k-\frac{1}{2}, n+2; t_0)}{k! \Gamma(n+2\ell+k+\frac{3}{2})} \left( \frac{\gamma}{2} \right)^{2(n+\ell+k+1)} \end{aligned} \quad (4.94)$$

$$\begin{aligned} F_{2\ell}^{(2)n} &= -j \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{t_0^{(n+1)/2}}{(n+1)!} \Pi_0 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{G_k(-n-2\ell-2k-\frac{1}{2}, n+2; t_0)}{k! \Gamma(n+2\ell+k+\frac{3}{2})} \left( \frac{\gamma}{2} \right)^{2(n+\ell+k+1)} \\ &\times \sum_{p=0}^{n+\ell+k} p! \left( \frac{\gamma h}{2} \right)^{-p-\frac{1}{2}} H_{p+3/2}^{(2)}(\gamma h) \\ &= -j \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{t_0^{(n+1)/2}}{(n+1)!} \Pi_0 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{G_k(-n-2\ell-2k-\frac{1}{2}, n+2; t_0)}{k! \Gamma(n+2\ell+k+\frac{3}{2})} \left( \frac{\gamma}{2} \right)^{2(n+\ell+k+1)} \\ &\times \sum_{p=0}^{n+\ell+k} p! \left( \frac{\gamma h}{2} \right)^{-p-\frac{1}{2}} (J_{p+3/2}(\gamma h) - j Y_{p+3/2}(\gamma h)) \end{aligned} \quad (4.95)$$

と分割できる．式 (4.95) の実数部は，式 (4.92) を用いて式 (4.91) と同様にして，

$$\text{Re} F_{2\ell}^{(2)n} = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \Pi_0 \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s t_0^{s+(n+1)/2}}{s! \Gamma(n+s+2)} T_{n+2\ell, n+\ell+s+1} \quad (4.96)$$

と表される．

式 (4.92) 中の Neumann 関数を級数展開して， $T_{\mu, \nu}$  は次のように書き換えることができる．

$$\begin{aligned} T_{\mu, \nu} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left( \frac{\gamma}{2} \right)^{2(\nu+k)}}{k! \Gamma(\mu+k+\frac{3}{2})} \sum_{p=0}^{\nu+k-1} (-1)^p p! \left( \frac{\gamma h}{2} \right)^{-p-\frac{1}{2}} J_{-p-\frac{3}{2}}(\gamma h) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left( \frac{\gamma}{2} \right)^{2(\nu+k)}}{k! \Gamma(\mu+k+\frac{3}{2})} \sum_{p=0}^{\nu+k-1} (-1)^p p! \left( \frac{\gamma h}{2} \right)^{-p-\frac{1}{2}} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-1)^q \left( \frac{\gamma h}{2} \right)^{2q-p-\frac{3}{2}}}{q! \Gamma(q-p-\frac{1}{2})} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left( \frac{\gamma}{2} \right)^{2(\nu+k)}}{k! \Gamma(\mu+k+\frac{3}{2})} \sum_{p=0}^{\nu+k-1} (-1)^p p! \left( \frac{\gamma h}{2} \right)^{-2(p+1)} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-1)^q \left( \frac{\gamma h}{2} \right)^{2q}}{q! \Gamma(q-p-\frac{1}{2})} \end{aligned} \quad (4.97)$$

さらに，総和の順序を交換して，整理すると，

$$\begin{aligned} T_{\mu, \nu} &= \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-1)^q \left( \frac{\gamma h}{2} \right)^{2q}}{q!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left( \frac{\gamma}{2} \right)^{2(\nu+k)}}{k! \Gamma(\mu+k+\frac{3}{2})} \sum_{p=0}^{\nu+k-1} \frac{(-1)^p p! \left( \frac{\gamma h}{2} \right)^{-2(p+1)}}{\Gamma(q-p-\frac{1}{2})} \\ &= -\frac{1}{\pi} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{\left( \frac{\gamma h}{2} \right)^{2q}}{q!} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\nu+k-1} \frac{p! \Gamma(p-q+\frac{3}{2})}{k! \Gamma(\mu+k+\frac{3}{2})} (-1)^k \left( \frac{\gamma}{2} \right)^{2(\nu+k)} \left( \frac{\gamma h}{2} \right)^{-2(p+1)} \end{aligned} \quad (4.98)$$

が得られる．ここで， $k = p' + k' - \nu + 1$ ， $p = p'$  と置き換え， $k'$ ， $p'$  についての総和に変換

し、整理すると、

$$\begin{aligned}
 T_{\mu,\nu} &= -\frac{1}{\pi} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(\frac{\gamma h}{2})^{2q}}{q!} \sum_{k'=0}^{\infty} \sum_{p'=0}^{\infty} \frac{\Gamma(p'+1)\Gamma(p'-q+\frac{3}{2})(-1)^{p'}}{\Gamma(p'+k'-\nu+2)\Gamma(p'+k'-\nu+\mu+\frac{5}{2})} \\
 &\quad \times (-1)^{p'+k'-\nu+1} \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{2(p'+k'+1)} \left(\frac{\gamma h}{2}\right)^{2(p'+1)} \\
 &= -\frac{1}{\pi} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(\frac{\gamma h}{2})^{2q}}{q!} \sum_{k'=0}^{\infty} \sum_{p'=0}^{\infty} (-1)^{k'-\nu+1} \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{2k'} \frac{\Gamma(p'+1)\Gamma(p'-q+\frac{3}{2})(-1)^{p'} h^{-2(p'+1)}}{\Gamma(p'+k'-\nu+2)\Gamma(p'+k'-\nu+\mu+\frac{5}{2})}
 \end{aligned} \tag{4.99}$$

が得られる。ただし、 $k'$ 、 $p'$  については、 $k'+q' < \nu-1$  の場合を除いた総和を取るものとする。上式を整理すると、

$$\begin{aligned}
 T_{\mu,\nu} &= -\frac{1}{\pi} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(\frac{\gamma h}{2})^{2q}}{q!} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k-\nu+1} \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{2k} \\
 &\quad \times \sum_{p=\max(0,\nu-k-1)}^{\infty} \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+k-\nu+2)} \frac{\Gamma(p-q+\frac{3}{2})(-1)^p h^{-2(p+1)}}{\Gamma(p+k-\nu+\mu+\frac{5}{2})}
 \end{aligned} \tag{4.100}$$

となる。ただし、 $\max(a,b)$  は  $a$  と  $b$  のうち、大きい方を取ることを表す。

ここで、式 (4.100) の発散する総和部分を

$$S = \sum_{p=\max(0,\nu-k-1)}^{\infty} \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(p+k-\nu+2)} \frac{\Gamma(p-q+\frac{3}{2})(-1)^p h^{-2(p+1)}}{\Gamma(p+k-\nu+\mu+\frac{5}{2})} \tag{4.101}$$

と置き、この総和を複素積分で表現すると、

$$\begin{aligned}
 S &= -\frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{\Gamma(w+1)}{\Gamma(w+k-\nu+2)} \frac{\Gamma(w-q+\frac{3}{2})}{\Gamma(w+k-\nu+\mu+\frac{5}{2})} \frac{\pi h^{-2(w+1)}}{\sin \pi w} dw \\
 &= -\frac{1}{2j} \int_{-j\infty}^{+j\infty} \frac{\Gamma(w+1)}{\Gamma(w+k-\nu+2)} \frac{\Gamma(w-q+\frac{3}{2})}{\Gamma(w+k-\nu+\mu+\frac{5}{2})} \frac{h^{-2(w+1)}}{\sin \pi w} dw
 \end{aligned} \tag{4.102}$$

と表すことができる。このとき、複素  $w$  平面における積分路  $C$  は、 $\Gamma(w+1)$  及び  $\Gamma(w-q+\frac{3}{2})$  の極である  $w = -1, -2, -3, \dots$  及び  $w = q - \frac{3}{2}, q - \frac{5}{2}, q - \frac{7}{2}, \dots$  が左半平面に来るように取り、また、 $w = 0, 1, 2, \dots$  は右半平面に来るように取る。さらに、積分路を右半平面で閉じることによって、式 (4.100) が得られる。

解析接続により、 $h < 1$  で収束する級数表現に変更する。このとき、式 (4.102) の積分路は複素  $w$  平面の右半平面で閉じることができ、 $S$  は以下の特異点の留数和で表される。

- $\nu > k$  の場合の  $w = -1, -2, -3, \dots$  での 1 位の極

$$\begin{aligned}
S^{(1)} &= \sum_{p=0}^{\infty} \operatorname{Re} S_{w \rightarrow -p-1} \\
&= -\pi \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\Gamma(w+1)\Gamma(w-q+\frac{3}{2})h^{-2(w+1)}}{\Gamma(w+k-\nu+2)\Gamma(w+k-\nu+\mu+\frac{5}{2})} \frac{w+p+1}{\sin \pi w} \Bigg|_{w \rightarrow -p-1} \quad (4.103)
\end{aligned}$$

gamma 関数の reflection formula を用いて ,

$$\begin{aligned}
S^{(1)} &= -\pi \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+\nu+1}\Gamma(-w-k+\nu-1)}{\Gamma(-w)} \frac{(-1)^{\nu+\mu+k+q+1}\Gamma(-w-k+\nu-\mu-\frac{3}{2})}{\Gamma(-w+q-\frac{1}{2})} \\
&\quad \times \frac{w+p+1}{\sin \pi w} \Bigg|_{w \rightarrow -p-1} h^{2p} \\
&= -\pi \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^{p+\nu+q}\Gamma(p-k+\nu)\Gamma(p-k+\nu-\mu-\frac{1}{2})}{p!\Gamma(p+q+\frac{1}{2})} h^{2p} \\
&= (-1)^{\nu+q} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{\Gamma(p-k+\nu)\Gamma(p-k+\nu-\mu-\frac{1}{2})}{p!\Gamma(p+q+\frac{1}{2})} (-1)^p h^{2p} \\
&= \frac{(-1)^{\mu+q}\Gamma(\nu-k)\Gamma(\nu-\mu-k-\frac{1}{2})}{\Gamma(q+\frac{1}{2})} F(\nu-k, \nu-\mu-k-\frac{1}{2}, q+\frac{1}{2}; -h^2) \quad (4.104)
\end{aligned}$$

- $\nu \leq k$  の場合の  $w = -1, -2, -3, \dots, \nu-k-1$  での  $2\Gamma(w+1)/\Gamma(w+k-\nu+2)$  と  $1/\sin n\pi$  による重なった極

$$\frac{\Gamma(w+1)}{\sin \pi w} = -\frac{\pi}{\Gamma(-w) \sin^2 \pi w} \quad (4.105)$$

であるから,

$$\begin{aligned}
 S^{(2)} &= -\frac{1}{2j} \sum_{p=0}^{k-\nu} \oint_{w=-p-1}^{k-\nu} \frac{\Gamma(w+1)\Gamma(w-q+\frac{3}{2})}{\Gamma(w+k-\nu+2)\Gamma(w+k-\nu+\mu+\frac{5}{2})} \frac{h^{-2(w+1)}}{\sin \pi w} dw \\
 &= \frac{\pi}{2j} \sum_{p=0}^{k-\nu} \oint_{w=-p-1}^{k-\nu} \frac{\Gamma(w-q+\frac{3}{2})h^{-2(w+1)}}{\Gamma(w+k-\nu+2)\Gamma(-w)\Gamma(w+k-\nu+\mu+\frac{5}{2})} \frac{1}{\sin^2 \pi w} dw \\
 &= \sum_{p=0}^{k-\nu} \lim_{w \rightarrow -p-1} \left\{ \frac{\partial}{\partial w} \frac{\Gamma(w-q+\frac{3}{2})h^{-2(w+1)}}{\Gamma(w+k-\nu+2)\Gamma(-w)\Gamma(w+k-\nu+\mu+\frac{5}{2})} \right\} \\
 &\quad \times \left( \frac{(w+p+1)\pi}{\sin \pi w} \right)^2 \\
 &= \sum_{p=0}^{k-\nu} \lim_{w \rightarrow -p-1} \frac{\Gamma(w-q+\frac{3}{2})h^{-2(w+1)}}{\Gamma(w+k-\nu+2)\Gamma(-w)\Gamma(w+k-\nu+\mu+\frac{5}{2})} \\
 &\quad \times \left\{ -2 \log h + \psi(w-q+\frac{3}{2}) - \psi(w+k-\nu+2) \right. \\
 &\quad \left. + \psi(-w) - \psi\left(w+k-\nu-\mu+\frac{5}{2}\right) \right\} \\
 &= \sum_{p=0}^{k-\nu} \frac{\Gamma(-p-q+\frac{1}{2})}{\Gamma(-p+k-\nu+1)\Gamma(p+1)} \frac{h^{-2p}}{\Gamma(-p+k-\nu+\mu+\frac{3}{2})} \\
 &\quad \times \left\{ -2 \log h + \psi(-p-q+\frac{1}{2}) - \psi(-p+k-\nu+1) \right. \\
 &\quad \left. + \psi(p+1) - \psi\left(-p+k-\nu+\mu+\frac{3}{2}\right) \right\} \tag{4.106}
 \end{aligned}$$

•  $\nu \leq k$  の場合の  $w = \nu - k - 2, \nu - k - 3, \nu - k - 4, \dots$  での 1 位の極

$$\begin{aligned}
 S^{(3)} &= \sum_{p=k-\nu+1}^{\infty} \frac{(-1)^{\mu+q}\Gamma(p+k-\nu)\Gamma(p-k+\nu-\mu-\frac{1}{2})}{\Gamma(p+q+\frac{1}{2})} (-1)^p h^{2p} \\
 &= -\sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\mu+\nu+k+q+p}}{\Gamma(p+k-\nu+2)} \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(p-\mu+\frac{1}{2})}{\Gamma(p+k+q-\nu+\frac{3}{2})} h^{2(p+k-\nu+1)} \tag{4.107}
 \end{aligned}$$

- $q + k + \mu - \nu + 1 > 0$  の場合の  $w = q - \frac{3}{2}, q - \frac{5}{2}, q - \frac{7}{2}, \dots, \nu - \mu - k - \frac{3}{2}$  での 1 位の極

$$\begin{aligned}
S^{(4)} &= -\frac{1}{2j} \sum_{p=0}^{\mu-\nu+q+k} \oint_{w=q-p-\frac{3}{2}} \frac{\Gamma(w+1)\Gamma(w-q+\frac{3}{2})}{\Gamma(w+k-\nu+2)\Gamma(w+k-\nu+\mu+\frac{5}{2})} \frac{h^{-2(w+1)}}{\sin \pi w} dw \\
&= -\frac{1}{2j} \sum_{p=0}^{\mu-\nu+q+k} \oint_{w=q-p-\frac{3}{2}} \frac{\Gamma(w+1)}{\Gamma(w+k-\nu+2)\Gamma(w+k-\nu+\mu+\frac{5}{2})} \frac{h^{-2(w+1)}}{\sin \pi w} \\
&\quad \times \frac{\pi}{\Gamma(-w+q-\frac{1}{2}) \cos \pi(w-q+1)} dw \\
&= (-1)^{q+1} \pi \sum_{p=0}^{\mu-\nu+q+k} \frac{h^{-(2q-2p-1)}}{p!} \frac{1}{\Gamma(q-p+k+\mu-\nu+1)} \frac{\Gamma(q-p-\frac{1}{2})}{\Gamma(q-p+k-\nu+\frac{1}{2})}
\end{aligned} \tag{4.108}$$

ここで,  $F(a, b, c; x)$  は Gauss の超幾何関数,  $\psi(x)$  は polygamma 関数を表す. 以上より

$$S = S^{(1)} + S^{(2)} + S^{(3)} + S^{(4)} \tag{4.109}$$

となる.

式 (4.104)–(4.109) を式 (4.100) に代入して整理すると,  $h < 1$  で収束する次式が得られる.

$$T_{\mu,\nu} = T_{\mu,\nu}^{(1)} + T_{\mu,\nu}^{(2)} + T_{\mu,\nu}^{(3)} + T_{\mu,\nu}^{(4)} \tag{4.110}$$

$$\begin{aligned}
T_{\mu,\nu}^{(1)} &= \frac{(-1)^\nu}{\pi} \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\nu-1} (-1)^k \frac{1}{q!} \left(\frac{\gamma h}{2}\right)^{2q} \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{2k} S^{(1)} \\
&= \frac{(-1)^\nu}{\pi} \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\nu-1} (-1)^k \frac{1}{q!} \left(\frac{\gamma h}{2}\right)^{2q} \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{2k} \frac{(-1)^{\mu+q} \Gamma(\nu-k) \Gamma(\nu-\mu-k-\frac{1}{2})}{\Gamma(q+\frac{1}{2})} \\
&\quad \times F\left(\nu-k, \nu-\mu-k-\frac{1}{2}, q+\frac{1}{2}; -h^2\right) \\
&= \frac{(-1)^{\mu+\nu}}{\pi} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-1)^q \left(\frac{\gamma h}{2}\right)^{2q}}{q! \Gamma(q+\frac{1}{2})} \sum_{k=0}^{\nu-1} \Gamma(\nu-k) \Gamma(\nu-\mu-k-\frac{1}{2}) (-1)^k \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{2k} \\
&\quad \times F\left(\nu-k, \nu-\mu-k-\frac{1}{2}, q+\frac{1}{2}; -h^2\right) \\
&= -\sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-1)^q \left(\frac{\gamma h}{2}\right)^{2q}}{q! \Gamma(q+\frac{1}{2})} \sum_{k=0}^{\nu-1} \frac{\Gamma(\nu-k)}{\Gamma(\mu-\nu+k+\frac{3}{2})} \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{2k} F\left(\nu-k, \nu-\mu-k-\frac{1}{2}, q+\frac{1}{2}; -h^2\right)
\end{aligned} \tag{4.111}$$

同様にして，

$$\begin{aligned}
 T_{\mu,\nu}^{(2)} &= \frac{(-1)^\nu}{\pi} \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{k=\nu}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{q!} \left(\frac{\gamma h}{2}\right)^{2q} \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{2k} S^{(2)} \\
 &= \frac{(-1)^\nu}{\pi} \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{k=\nu}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{q!} \left(\frac{\gamma h}{2}\right)^{2q} \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{2k} \\
 &\quad \times \sum_{p=0}^{k-\nu} \frac{\Gamma(-p-q+\frac{1}{2})}{\Gamma(-p+k-\nu+1)\Gamma(p+1)} \frac{h^{2p}}{\Gamma(-p+k-\nu+\mu+\frac{3}{2})} \\
 &\quad \times \left\{ -2 \log h + \psi(p+q+\frac{1}{2}) - \psi(-p+k-\nu+1) \right. \\
 &\quad \quad \left. + \psi(p+1) - \psi\left(-p+k-\nu+\mu+\frac{3}{2}\right) \right\} \\
 &= \frac{1}{\pi} \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{q!} \left(\frac{\gamma h}{2}\right)^{2q} \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{2(k+\nu)} \\
 &\quad \times \sum_{p=0}^k \frac{\pi(-1)^{p+q}}{\Gamma(-p+k+1)\Gamma(p+1)\Gamma(p+q+\frac{1}{2})} \frac{h^{2p}}{\Gamma(-p+k+\mu+\frac{3}{2})} \\
 &\quad \times \left\{ -2 \log h + \psi(p+q+\frac{1}{2}) - \psi(-p+k+1) \right. \\
 &\quad \quad \left. + \psi(p+1) - \psi\left(-p+k+\mu+\frac{3}{2}\right) \right\} \\
 &= \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^{k+q} \frac{1}{q!} \left(\frac{\gamma h}{2}\right)^{2q} \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{2(k+p+\nu)} \\
 &\quad \times \frac{1}{\Gamma(k+1)\Gamma(p+1)\Gamma(p+q+\frac{1}{2})} \frac{h^{2p}}{\Gamma(k+\mu+\frac{3}{2})} \\
 &\quad \times \left\{ -2 \log h + \psi(p+q+\frac{1}{2}) - \psi(k+1) + \psi(p+1) - \psi\left(k+\mu+\frac{3}{2}\right) \right\} \\
 &= \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^{k+q} \left(\frac{\gamma h}{2}\right)^{2(p+q)} \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{2(k+\nu)} \\
 &\quad \times \frac{1}{k!q!p!\Gamma(p+q+\frac{1}{2})} \frac{h^{2p}}{\Gamma(k+\mu+\frac{3}{2})} \\
 &\quad \times \left\{ -2 \log h + \psi(p+q+\frac{1}{2}) - \psi(k+1) + \psi(p+1) - \psi\left(k+\mu+\frac{3}{2}\right) \right\}
 \end{aligned} \tag{4.112}$$

ここで，公式

$$\begin{aligned}
 \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-1)^q f(p+q)}{p!q!} &= \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^p \frac{(-1)^q f(p)}{(p-q)!q!} \\
 &= \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^p f(p) \{1 + (-1)\}^p \\
 &= f(0)
 \end{aligned} \tag{4.113}$$

を利用すると，

$$\begin{aligned}
 T_{\mu,\nu}^{(2)} &= \frac{1}{\pi} \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^{k+q} \left(\frac{\gamma h}{2}\right)^{2(p+q)} \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{2(k+\nu)} \frac{1}{k!q!p!\Gamma(p+q+\frac{1}{2})} \frac{h^{2p}}{\Gamma(k+\mu+\frac{3}{2})} \psi(p+1) \\
 &\quad + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+q} \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{2(k+\nu)} \frac{1}{k!\Gamma(\frac{1}{2})} \frac{h^{2p}}{\Gamma(k+\mu+\frac{3}{2})} \\
 &\quad \times \left\{ -2 \log h + \psi\left(\frac{1}{2}\right) - \psi(k+1) - \psi\left(k+\mu+\frac{3}{2}\right) \right\} \\
 &= \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{2\nu-\mu-\frac{1}{2}} J_{\mu+\frac{1}{2}}(\gamma) \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{\gamma h}{2}\right)^{p+\frac{1}{2}} \frac{\psi(p+1)}{\Gamma(p+1)} J_{p-\frac{1}{2}}(\gamma h) \\
 &\quad - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{2(k+\nu)}}{k!\Gamma(k+\mu+\frac{3}{2})} \left\{ \psi(k+1) + \psi\left(k+\mu+\frac{3}{2}\right) \right\} \\
 &\quad - \frac{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^{2\nu-\mu-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} \{2 \log 2h + C\} J_{\mu+\frac{1}{2}}(\gamma)
 \end{aligned} \tag{4.114}$$

となる．ここで  $C$  は Euler 定数を表す．さらに  $T_{\mu,\nu}^{(3)}$ ,  $T_{\mu,\nu}^{(4)}$  は，

$$\begin{aligned}
 T_{\mu,\nu}^{(3)} &= \frac{(-1)^\nu}{\pi} \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{k=\nu}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{q!} \left(\frac{\gamma h}{2}\right)^{2q} \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{2k} S^{(3)} \\
 &= -\frac{(-1)^\nu}{\pi} \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{k=\nu}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{\gamma h}{2}\right)^{2q}}{q!} \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{2k} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\mu+\nu+k+q+p} \Gamma(p+1) \Gamma(p-\mu+\frac{1}{2})}{\Gamma(p+k-\nu+2) \Gamma(p+k+q-\nu+\frac{3}{2})} h^{2(p+k-\nu+1)} \\
 &= -\frac{(-1)^\mu}{\pi} \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{2\nu} h^2 \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-1)^q \left(\frac{\gamma h}{2}\right)^{2q}}{q!} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{2k} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p \Gamma(p+1) \Gamma(p-\mu+\frac{1}{2})}{\Gamma(p+k+2) \Gamma(p+k+q+\frac{3}{2})} h^{2(p+k)} \\
 &= -\frac{(-1)^\mu}{\pi} \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{2\nu} h^2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\gamma h}{2}\right)^{2k} \sum_{q=0}^k \frac{(-1)^q}{q!} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p \Gamma(p+1) \Gamma(p-\mu+\frac{1}{2})}{\Gamma(p+k-q+2) \Gamma(p+k+\frac{3}{2})} h^{2p} \\
 &= -\frac{(-1)^\mu}{\pi} \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{2\nu} h^2 \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\gamma h}{2}\right)^{2k} \sum_{q=0}^k \frac{(-1)^q}{q!} \frac{\Gamma(-\mu+\frac{1}{2})}{\Gamma(k-q+2) \Gamma(k+\frac{3}{2})} h^{2p} \\
 &\quad \times {}_3F_2\left(1, 1, -\mu+\frac{1}{2}, k-q+2, k+\frac{3}{2}; -h^2\right) \\
 &= -\frac{\left(\frac{\gamma}{2}\right)^{2\nu} h^2}{\Gamma(\mu+\frac{1}{2})} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{\gamma h}{2}\right)^{2k}}{\Gamma(k+\frac{3}{2})} \sum_{q=0}^k \frac{(-1)^q}{q! \Gamma(k-q+2)} {}_3F_2\left(1, 1, -\mu+\frac{1}{2}, k-q+2, k+\frac{3}{2}; -h^2\right)
 \end{aligned} \tag{4.115}$$

$$\begin{aligned}
 T_{\mu,\nu}^{(4)} &= \frac{(-1)^\nu}{\pi} \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{q!} \left(\frac{\gamma h}{2}\right)^{2q} \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{2k} S^{(4)} \\
 &= \frac{(-1)^\nu}{\pi} \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{q!} \left(\frac{\gamma h}{2}\right)^{2q} \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{2k} (-1)^{q+1} \\
 &\quad \times \sum_{p=0}^{\mu-\nu+q+k} \frac{h^{-(2q-2p-1)}}{p!} \frac{1}{\Gamma(q-p+k+\mu-\nu+1) \Gamma(q-p+k-\nu+\frac{1}{2})} \\
 &= (-1)^{\nu+1} \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\mu-\nu+q+k} \frac{(-1)^{k+q}}{q!} \left(\frac{\gamma h}{2}\right)^{2q} \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{2k} \\
 &\quad \times \frac{\Gamma(q-p-\frac{1}{2}) h^{-2q+2p+1}}{p! \Gamma(q-p+k-\nu+\frac{1}{2}) \Gamma(q-p+k+\mu-\nu+1)} \\
 &= (-1)^{\nu+1} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{q=0}^k \sum_{p=0}^{\mu-\nu+k} \frac{(-1)^k}{q!} \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{2k} h^{2p+1} \frac{\Gamma(q-p-\frac{1}{2})}{p! \Gamma(k-p-\nu+\frac{1}{2}) \Gamma(k+\mu-\nu-p+1)} \\
 &= h \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k-\nu+1} \frac{1}{q!} \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{2k} \sum_{p=0}^{\mu-\nu+k} \frac{\Gamma(q-p-\frac{1}{2}) h^{2p}}{p! \Gamma(k-p-\nu+\frac{1}{2}) \Gamma(k+\mu-\nu-p+1)} \\
 &= h \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^q}{q!} \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{2k} \sum_{p=0}^{\mu-\nu+k} \frac{\Gamma(p-k+\nu+\frac{1}{2}) h^{2p}}{p! \Gamma(p-q+\frac{3}{2}) \Gamma(\mu-\nu+k-p+1)} \\
 &= h \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{q=0}^k \frac{(-1)^q}{q!} \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{2k} \frac{\Gamma(\nu-k+\frac{1}{2})}{\Gamma(\mu-\nu+k+1) \Gamma(\frac{3}{2}-q)} F\left(\nu-k+\frac{1}{2}, \nu-\mu-k, \frac{3}{2}-q; -h^2\right)
 \end{aligned} \tag{4.116}$$

と表される。ただし、 ${}_3F_2(a, b, c, d, e; x)$  は一般化された超幾何関数を表す。式 (4.110)–(4.116) を用いることで、 $h < 1$  で収束する  $\text{Re}F_{1\ell}^n$ 、 $\text{Re}F_{2\ell}^n$  の表現式が得られる。

### 4.3.7 級数展開式の特異性

まず、前項で定式化した  $h < 1.0$  のときの式 (4.96) を適用した  $F_\ell$  の  $\ell$  に対する変化を調査する。なお、計算には、多倍長精度数値計算法を用いている。図 4.2 から 4.4 に、 $t_0 = 0.0$ 、 $n = 1$  とした  $F_\ell$  の絶対値  $|F_\ell^1|$  を示す。横軸は  $\ell$ 、縦軸は  $F_\ell^1$  の絶対値を表す。また図では、 $h$  をパラメータとして、 $a/\lambda = 1.0, 3.0, 5.0$  と変化させた。図 4.2 では、 $F_\ell^1$  は  $\ell$  にしたがって指数関数的に減少する。また図 4.3 では、 $|F_\ell^1|$  は  $10^1$  から  $10^{-2}$  の間で変化し、その後、指数関数的に減少する。さらに図 4.4 のように  $a/\lambda$  が大きくなると、指数関数的に減少し始める  $\ell$  の値が大きくなる。よって、 $a/\lambda$  が大きくなるにしたがって、より多くの項数が必要になることがわかる。

次に、式 (4.87)、(4.88) を用いた  $h > 1.0$  のときの  $|F_\ell|$  の  $\ell$  に対する変化を調査した。図 4.5 から 4.7 に、それぞれ  $a/\lambda = 1.0, 3.0, 5.0$  に対する、 $h$  をパラメータとして 1.5、2.0、3.0、5.0 と変化させた場合の結果を示す。図 4.5 より、 $\ell = 0$  から  $|F_\ell^1|$  が指数関数的に減少する。 $h < 1.0$  のときと同様に、 $h$  が小さい程  $|F_\ell|$  の収束が遅い。また、 $a/\lambda$  が大きくなった場合の傾向も  $h < 1.0$  と同様である。さらに、 $a/\lambda$  が同じ値の図 4.2 と図 4.5 で比較すると、 $h < 1.0$  のときと比べて、 $h$  が大きくなるにつれて、減少が始まる  $\ell$  は小さくなっている。したがって、波源が円板に近い場合の方が、遠い場合と比べて項数が多く必要であり、収束が遅くなる傾向があることがわかる。

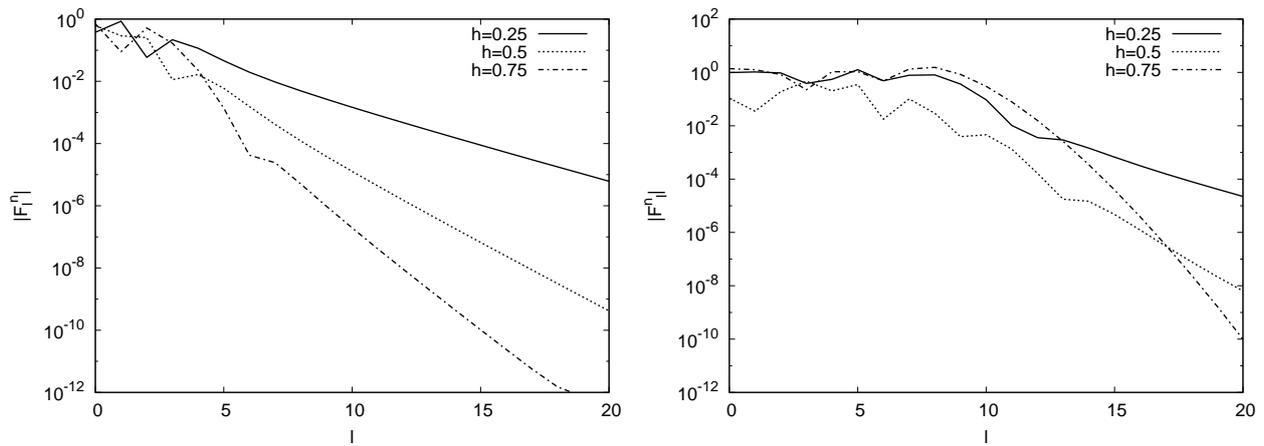


図 4.2:  $l$  に対する  $|F_\ell^n|$  の値 ( $a/\lambda = 1.0, h < 1.0$ )      図 4.3:  $l$  に対する  $|F_\ell^n|$  の値 ( $a/\lambda = 3.0, h < 1.0$ )

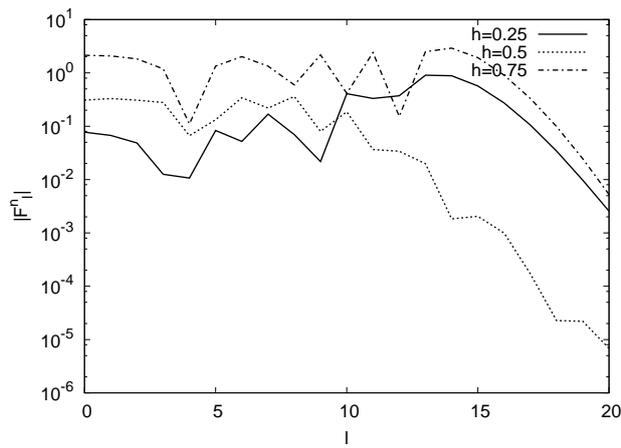


図 4.4:  $l$  に対する  $|F_\ell^n|$  の値 ( $a/\lambda = 5.0, h < 1.0$ )

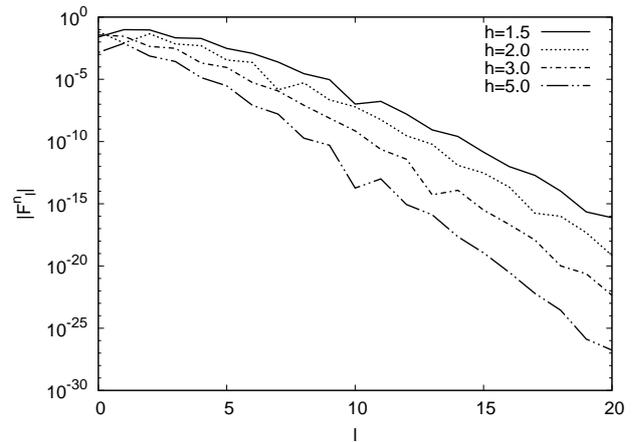
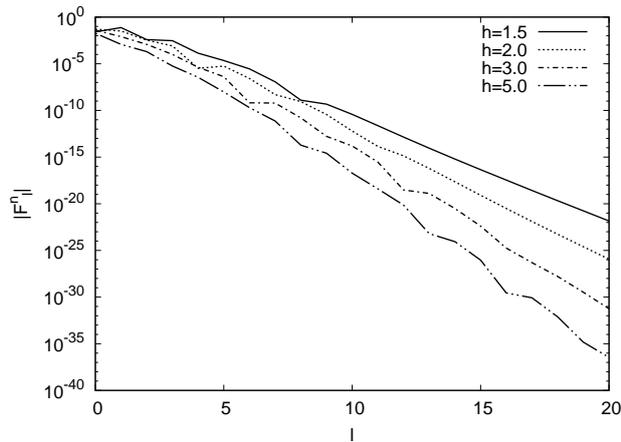


図 4.5:  $l$  に対する  $|F_\ell^n|$  の値 ( $a/\lambda = 1.0, h > 1.0$ )

図 4.6:  $l$  に対する  $|F_\ell^n|$  の値 ( $a/\lambda = 3.0, h > 1.0$ )

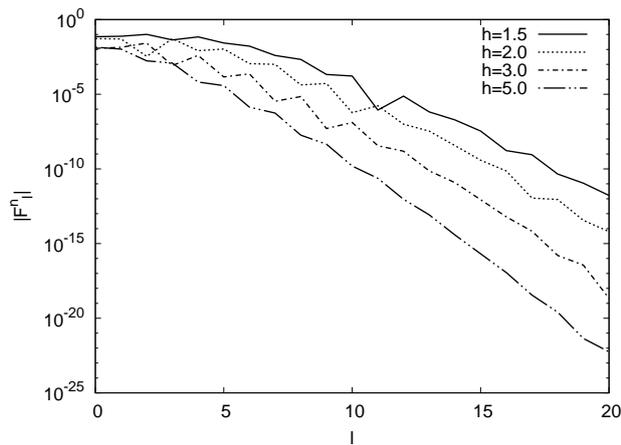


図 4.7:  $l$  に対する  $|F_\ell^n|$  の値 ( $a/\lambda = 5.0, h > 1.0$ )

最後に、展開係数計算のもととなっている  $F_\ell$  に対する収束性を調査した。図 4.8 は、 $h$  に対して、 $F_\ell$  が収束に必要な  $\ell$  の値を調べた結果である。図では  $a/\lambda$  をパラメータとし、横軸は  $h$ 、縦軸は  $F_\ell$  が  $10^{-7}$  になったときの  $\ell$  を示す。この結果より、どの  $a/\lambda$  でも  $h$  が大きくなるにしたがって、 $\ell$  が小さくなっていく。特に、 $h = 0.25$  のときは  $\ell$  が 30 程度であるが、 $h = 0.75$  までは急激に下がり、それ以降は  $h = 4.0$  程度までは緩やかに下がっていく。その後  $\ell$  は一定値に収束していく。これは、波源が円板に近い場合は波源からの影響が大きく、その変化が急激なために  $\ell$  が多く必要であるが、 $h$  が大きくなるにつれて影響が小さく、少ない  $\ell$  で収束するためと考えられる。

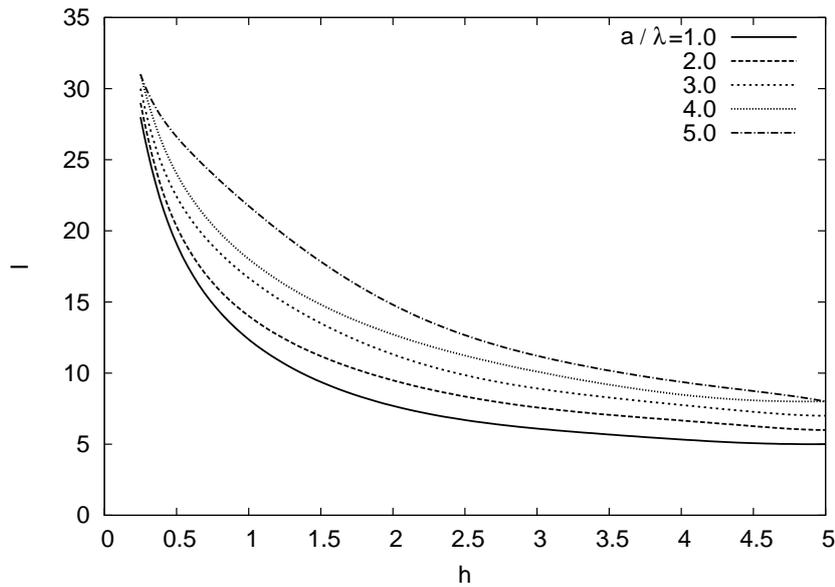


図 4.8:  $h$  に対する、収束に必要な  $\ell$  の値

#### 4.4 展開係数の計算精度に対する検討

ここで、電流分布計算に際し、展開係数と多倍長精度数値計算の精度との関係について調査する。図 4.9 に、 $t_0 = 0.0$ 、 $n = 1$  として、式 (4.54) の展開係数  $P_{x_m}^1$  の計算に必要なデータ長と、円板の大きさの関係を調査した結果を示す。図では、横軸は多倍長精度数値計算において設定したデータ長を表し、64[bit] 単位で変化させた。また縦軸は、収束基準を  $10^{-7}$  として、 $P_{x_m}^1$  が収束基準を満たす円板の半径  $a/\lambda$  の範囲を棒グラフで表している。データ長が少ない場合、桁落ちが生じ  $P_{x_m}^1$  が十分小さくならないため、収束基準を設け、 $m$  を増加していく過程で、 $P_{x_m}^1$  が収束基準以下となった場合に計算が収束したと判断する。なお、 $h = 0.5$  のとき、この収束基準では 64[bit] の場合、計算が収束しない。図より、 $h = 0.5$ 、 $2.0$  とともに、 $a/\lambda$  にほぼ比例して計算に必要なデータ長が大きくなるのがわかる。

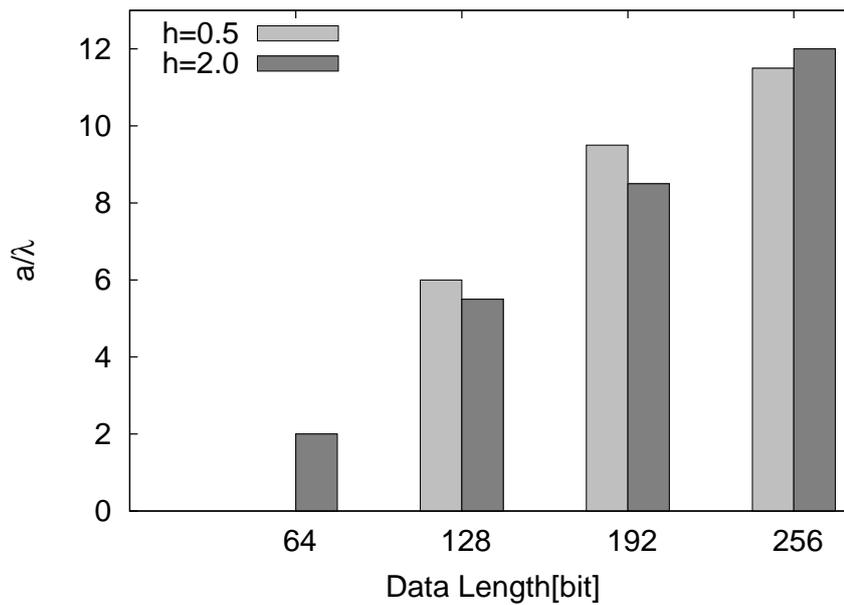


図 4.9: 各データ長での計算可能な  $a/\lambda$  の範囲

## 4.5 数値計算

本節では、別法との比較が可能な場合として図 4.1 の波源を  $(0, 0, z_0)$  と中心軸上に固定する。この場合、 $t_0 = 0.0$  であるため、式 (4.50), (4.51) の  $F_{x\ell}^1, F_{y\ell}^1$  以外は 0 となる。このことと式 (4.72) より、 $A_{n\pm 1}$  も  $A_0$  以外全て 0 となる。その結果、展開係数は  $P_{x_m}^1$  を除いて他は全て 0 となり、さらに、 $P_{x_m}^1 = P_{y_m}^1$  となる。

### 4.5.1 波源が中心軸上にある場合の電流分布

波源の高さ  $h = 2.0$  での電流分布を図 4.10 に示す。図において、横軸は半径で規格化した中心軸からの距離  $x/a$  を表し、縦軸は波源の強度、半径および高さで規格化した、 $z = +0$  における  $x$  軸上の電流の振幅  $|hJ_x / \{kId\ell / 4\pi a\}|$  を表している。図より、 $a/\lambda$  が増加すると、振動の数が増加していくことがわかる。

次に、円板の半径を  $a/\lambda = 1.0$  と一定にして、 $h$  をパラメータとした場合の電流分布を図 4.11 に示す。図より、 $h$  が小さい、すなわち波源が円板に近い場合には中心軸付近に最大値が来るが、 $h$  が大きい、すなわち波源が遠い場合には円板の端部付近に最大値が来る。

さらに、円板の半径を  $a/\lambda = 5.0$  と大きくして、 $h$  をパラメータとした場合の電流分布を図 4.12 に示す。図より、 $h$  が小さい、すなわち波源が円板に近い場合には振動の数が  $a/\lambda = 5.0$  より多く存在するが、波源が遠くなるにしたがって、振動の数は少なくなっていく。

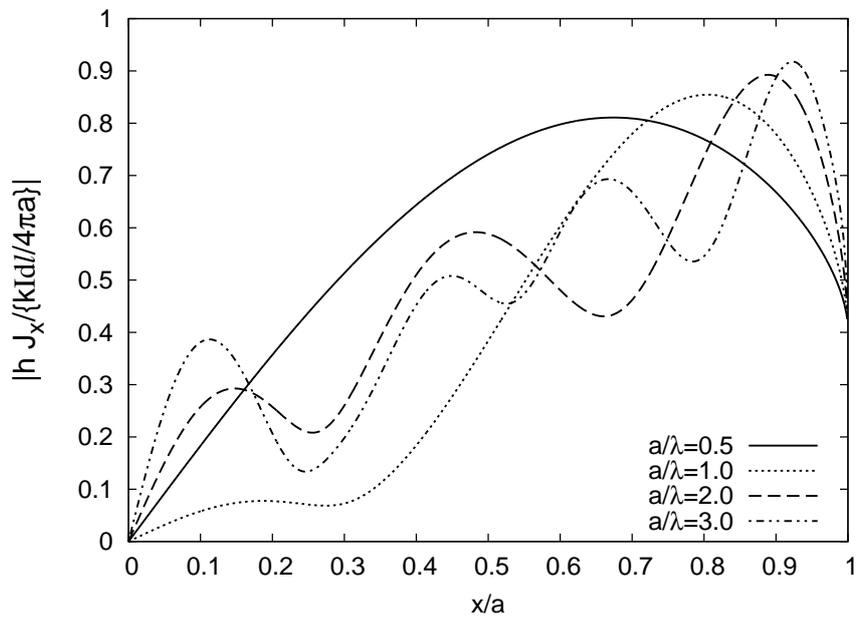


図 4.10:  $a/\lambda$  をパラメータとする電流分布 ( $h = 2.0$ )

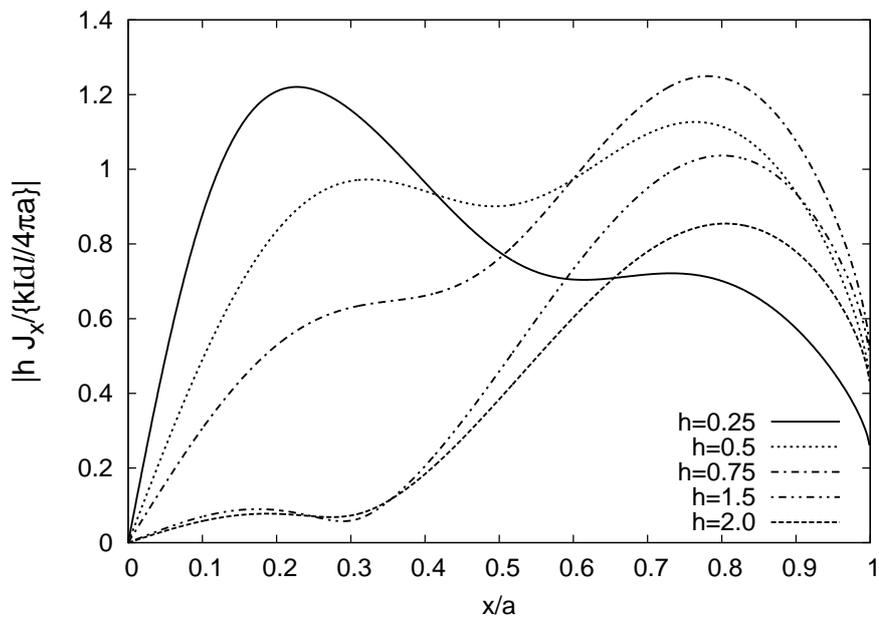


図 4.11:  $h$  をパラメータとする電流分布 ( $a/\lambda = 1.0$ )

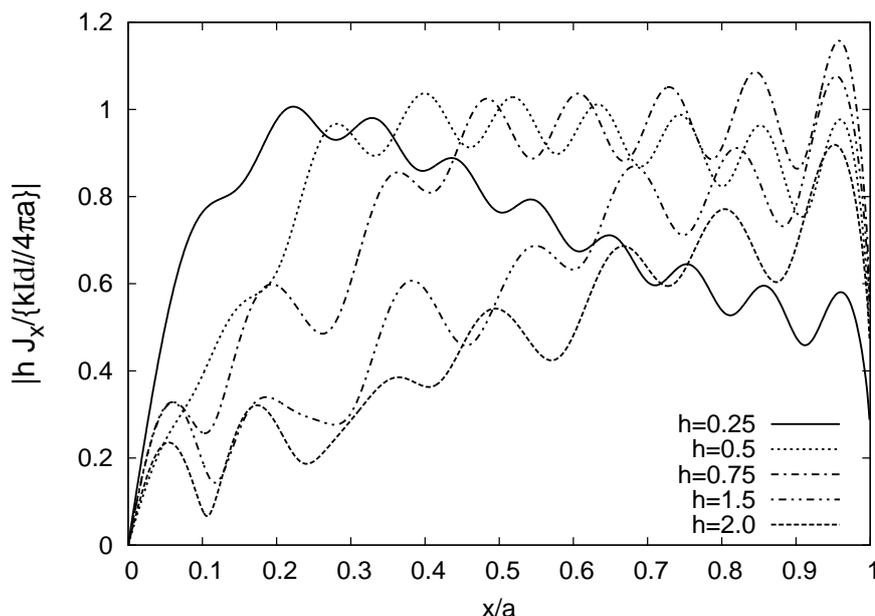


図 4.12:  $h$  をパラメータとする電流分布 ( $a/\lambda = 5.0$ )

#### 4.5.2 別法との比較

ここでは、FD-TD 法および物理光学近似界と本手法との比較を行う。

図 4.10 と同じパラメータで計算した結果を図 4.13 に示す。図中の「RIG.」は本方法による電流を、「PO」は物理光学近似界を、「FD-TD」は FD-TD 法による電流を表す。ただし「FD-TD」は、無限平板に対する計算値が理論値と一致するよう波源の振幅を規格化し、円板上の電流分布を計算したものである。また、対称性により  $x-z$  平面内の 2 次元の FD-TD とし、その分割幅は  $\lambda/64$  としている。図より、本手法と FD-TD 法がよく一致していることが読み取れる。また物理光学近似界との比較により、本手法での結果は物理光学近似界での結果に回折界が入っているような結果となっていることがわかる。

次に、図 4.11 と同じパラメータで計算した結果を図 4.14 に示す。図より、広い範囲の  $h$  で本手法と FD-TD 法が一致していることが確認できる。

最後に円板の半径を  $a/\lambda = 5.0$  にして、図 4.14 と同様に  $h$  をパラメータとした場合の電流分布を図 4.15 に示す。図より、電流分布は物理光学近似界に端部からの回折界を含むような結果となっていることが確認できる。

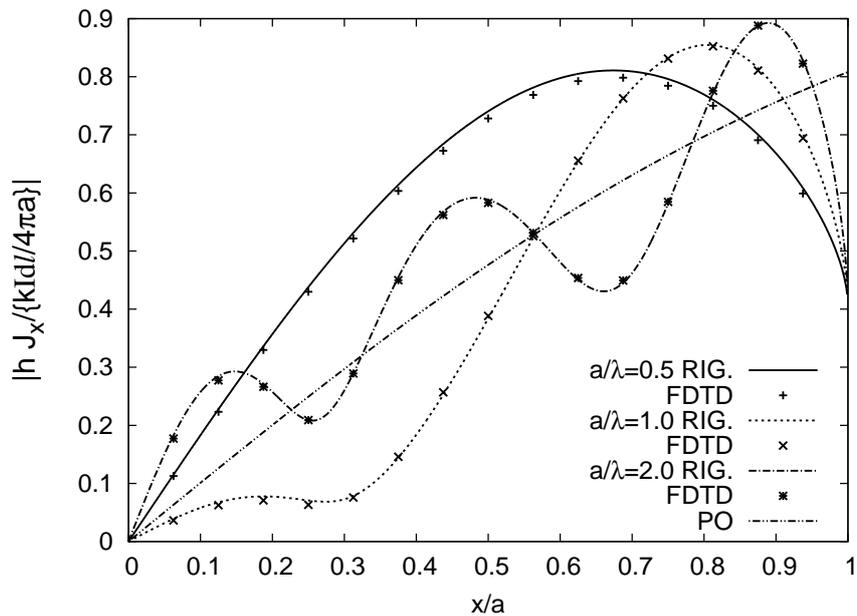


図 4.13: FD-TD 法との比較 ( $h = 2.0$ , FD-TD 分割幅: $\lambda/64$ )

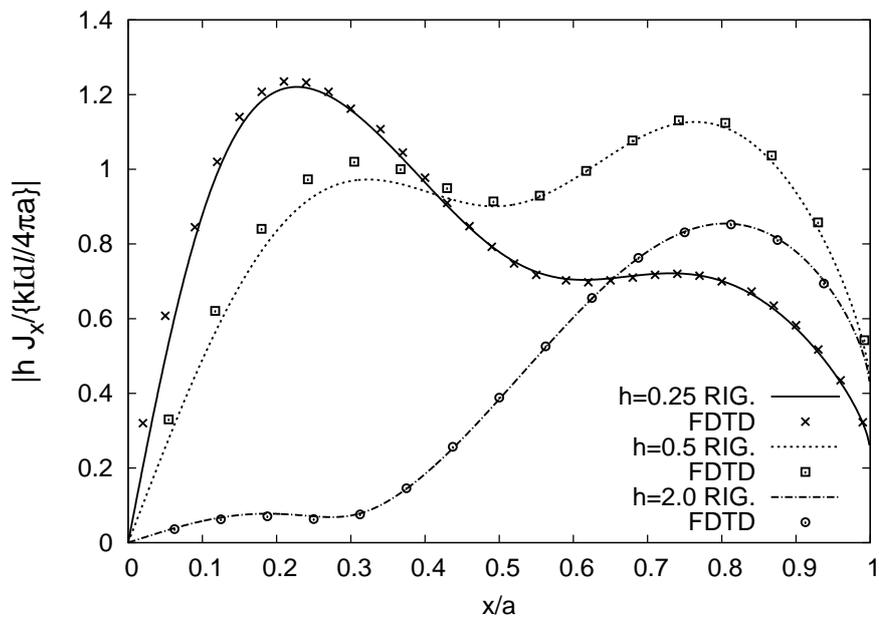


図 4.14: FD-TD 法との比較 ( $a/\lambda = 1.0$ , FD-TD 分割幅: $\lambda/64$ )

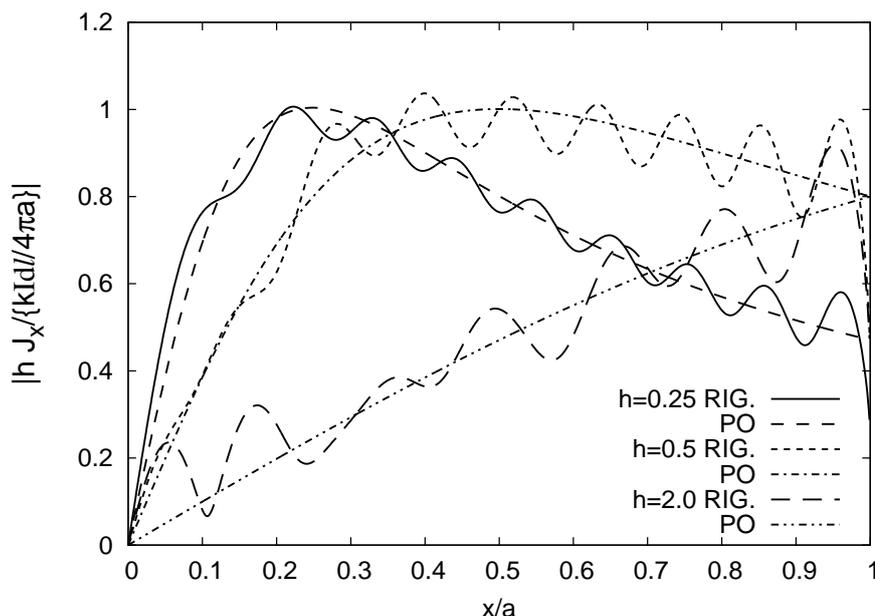


図 4.15: 物理光学近似界との比較 ( $a/\lambda = 5.0$ )

## 4.6 むすび

本章では，Nomura と Katsura および Inawashiro の解析方法を発展させて，垂直方向に偏波した電氣的微小ダイポールを波源とする完全導体円板による散乱を厳密に解析した．以下，本章をまとめる．

- まず，これまで行われていない波源が任意の位置にある場合の定式化および級数式への展開を行った．ここでは，境界条件の下で得られる非斉次微分方程式の解を散乱界と整合することで展開係数を決定した．また，水平微小ダイポールのときと同様に，波源の高さが円板の半径より小さい場合に計算式の収束性の問題が生じた．そこで，これを級数展開と解析接続により，任意の波源の高さに対して数値計算を可能にした．
- 次に，級数展開式の計算に必要な項数についての特性を調査し，円板の大きさや波源の高さに対する項数の指標を示した．また，展開係数の計算精度を検討し，円板の大きさに対するデータ長の指標を示した．
- さらに電流分布を計算し，円板の大きさおよび波源の高さに対する特性を検証した．
- 最後に，FD-TD 法と本手法との比較により本手法の妥当性を確認し，また大きな円板に対しては，物理光学近似界との比較により，その妥当性を確認した．

## 参考文献

- [1] M.V. Balaban, A.I. Nosich, A. Altintas, and T.M. Benson, “The method of analytical regularization in the electromagnetic wave scattering by thin disks,” *Antennas and Propagation*, 2007. EuCAP 2007. The Second European Conference, pp.1-5, 2007.
- [2] M.V. Balaban, R. Sauleau, T.M. Benson, and A.I. Nosich, “Dual integral equations technique in electromagnetic wave scattering by thin disks,” *Progress In Electromagnetics Research B*, vol.16, pp.107-126, 2009.
- [3] K. Hongo, A.D.U. Jafri, and Q.A. Naqvi, “Scattering of electromagnetic spherical wave by a perfectly conducting disk,” *Progress In Electromagnetics Research*, vol.129, pp.315-343, 2012.
- [4] Y. Nomura, and S. Katsura, “Diffraction of electromagnetic waves by circular plate and circular hole,” *J. Physical Society of Japan*, vol.10, no.4, pp.285-304, Apr 1955.
- [5] 森口繁一, 宇田川銑久, 一松信, 岩波数学公式 III, p.149, 岩波書店, 1960.
- [6] A. Erdélyi, *Table of Integral Transforms Vol.1*, McGraw-Hill Co. Inc, New York, 1954.

## 第5章 結論

本論文では、平面波および水平方向に偏波した電氣的微小ダイポール、垂直方向に偏波した電氣的微小ダイポールを波源とし、完全導体円板に対する散乱・回折現象を、境界値問題として扱った厳密解法を確立するとともに、数値計算によって詳細に物理的現象を捉え、アンテナ設計や種々の計算指標に応用できることを目的としてきた。

第1章では、はじめに本研究を行う目的を述べるとともに、散乱問題の歴史的背景および関連する研究について述べ、導体円板に対する厳密解法の未解決な課題について、整理して示した。その後、本研究の技術的および社会的意義について述べ、本論文の構成を示した。

第2章では、多倍長精度数値計算法を導入して、平面波を波源とする完全導体円板による散乱界の厳密解析および検討を行った。解析手法を詳細に示した後、数値計算を円滑に進めるために、多倍長精度数値計算ライブラリのインターフェイスを作成し、数学ライブラリ関数と四則演算の利用の簡易化を実現した。次に、展開係数を計算するための級数計算に対する計算精度について調査した。その結果、① 計算過程で計算精度の低下が見られること、② 桁落ちに原因があること、③ 多倍長精度数値計算により、精度の低下を防げること、がわかった。これらの検証を考慮して、電流分布の計算を行った。垂直入射の場合、① 電流は物理光学近似界の結果を中心に、円板の半径と波長の比で振動すること、② 中心部分の電流は、円板の半径が整数波長の場合は極小値、半整数波長の場合は極大値となること、を明らかにした。次に、斜め入射の場合の電流分布の計算を行い、入射角が大きくなる程、その振幅は小さくなることを明らかにした。さらに、高周波近似、モーメント法、FD-TD法と本手法との結果を比較し、その妥当性を確認した後、最後に、遠方散乱界の計算結果を示した。

第3章では、水平微小ダイポールを波源とする場合の厳密解析の方法を検討し、特に、これまで行われていなかった波源が任意の位置にある場合について定式化を行った。その際、波源の高さに対する収束性の問題を考慮し、円板上において、任意の波源の高さで計算可能な定式化を実現した。この数値計算において、級数式の値が一時的に大きくなるのが原因で桁落ちが生じることが確認され、その精度を保つためには大きなデータ長が必要であり、その解決方法として多倍長精度数値計算が有効であることを示した。さらに、級数展開式の計算に必要な項数について調査し、円板の大きさや波源の高さに対する必要項数の指標を示した。これらの結果を踏まえて、電流分布を計算した。まず、これまで厳密に計算されていなかった、波源が中心軸上にある場合の、波長と比較して大きな円板についての電流分布計算を行い、特性を検討した。次に、波源が中心軸上から外れた場合の電流分布を計算し、円

板の大きさ，波源の高さ，波源の位置を変化させ，波源が円板から遠ざかると，電流分布が平面波入射時の分布に近づくことを確認することで，本手法の妥当性を明らかにした．最後に，物理光学近似界および等価端部電流法の結果と比較し，本手法による電流分布と一致することを確認した．

第 4 章では，垂直微小ダイポールを波源とする完全導体円板による散乱界を厳密に解析した．まず，これまで行われていなかった散乱界に対する解析および級数式への展開を行った．ここでは，境界条件の下で得られる非斉次微分方程式の解を散乱界と整合することで展開係数を決定した．その際，水平微小ダイポールのときと同様に，波源の高さが円板の半径より小さい場合に計算式の収束性の問題が生じた．そこで，これを級数展開と解析接続により，任意の波源の高さに対して数値計算を可能にした．次に，級数展開式の計算に必要な項数について調査し，円板の大きさや波源の高さに対する項数の指標を示した．また，展開係数の計算精度を検討し，円板の大きさに対するデータ長の指標を示した．さらに，電流分布を計算し，円板の大きさおよび波源の高さに対する特性を明らかにした．最後に，小さな円板に対しては，FD-TD 法との比較により本手法の妥当性を確認し，また大きな円板に対しては，物理光学近似界との比較により，本手法の妥当性を確認した．

以上の結果より，平面波および水平方向に偏波した電氣的微小ダイポール，垂直方向に偏波した電氣的微小ダイポールを波源とし，完全導体円板に対する散乱・回折現象を，境界値問題として扱った厳密解法を確立することができた．

今後の課題としては，まず，半径 10 波長以上の場合の電流分布計算および，微小ダイポールを波源とした場合の遠方散乱界の数値計算を行う必要がある．次に，垂直微小ダイポール波源における，波源が中心軸上から外れている場合の電流分布，および放射界についての検討を行う必要がある．さらに，本研究で行った対象・波源のケースをそのまま実際に実験を行い，理論と実際の差がどのように現れるかなどの検証も考えられる．

# 謝辞

本研究は，東京工芸大学 木下照弘教授に一からご指導いただいたものであり，深く感謝をいたします。

また，東京都立産業技術高等専門学校 柴崎年彦教授には，研究のご指導と共に公私に渡り相談に乗って下さり，感謝の意を表します。

さらに，元東京都立工業高等専門学校 松田勲教授には，本研究のきっかけをいただき，謹んで御礼申し上げます。

本研究を行うにあたり，首都大学東京 多氣昌生教授には，本研究の基礎となる研究に対してご指導いただきましたと同時に，研究環境にもご助力をいただきましたことを厚く御礼申し上げます。

最後に，東京都立産業技術高等専門学校 柴崎年彦研究室の専攻科卒業生である澤田清仁君，近藤久純君，吉士真輝君には，本研究に対する貴重なデータを提供いただきましたことを，ここに感謝いたします。

# 付録A

## A.1 ヘルツベクトル

電流源  $\mathbf{J}$  から放射する電磁界についての方程式 (Maxwell の方程式)

$$\nabla \times \mathbf{E} + j\omega\mu\mathbf{H} = \mathbf{0}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - j\omega\varepsilon\mathbf{E} = \mathbf{J}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\varepsilon}\rho$$

に対して、電磁界をベクトルポテンシャル  $\mathbf{A}$  とスカラーポテンシャル  $\phi$  を用いて表すことにする。

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$$

より、 $\mathbf{H}$  は任意のベクトル  $\mathbf{A}$  を用いて

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu}\nabla \times \mathbf{A}$$

と表すことができる。これを

$$\nabla \times \mathbf{E} + j\omega\mu\mathbf{H} = \mathbf{0}$$

に代入して、

$$\nabla \times (\mathbf{E} + j\omega\mathbf{A}) = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{E} + j\omega\mathbf{A} = -\nabla\phi$$

を得る。以上より、ポテンシャルによる電磁界の表現を得る：

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - j\omega\mathbf{A}$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu}\nabla \times \mathbf{A}.$$

これを

$$\nabla \times \mathbf{H} - j\omega\varepsilon\mathbf{E} = \mathbf{J}$$

に代入すれば，次の方程式を得る．

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} - k^2 \mathbf{A} - \frac{k^2}{j\omega} \nabla \phi = \mu \mathbf{J}$$

$$(\nabla^2 + k^2) \mathbf{A} - \nabla \left( \nabla \cdot \mathbf{A} - \frac{k^2}{j\omega} \phi \right) = -\mu \mathbf{J}$$

ここで，式の変形にはベクトル解析の公式

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{F} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F}$$

および，波数  $k$  は，

$$k = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$$

と表されることを利用している．

ポテンシャルの自由度を考慮して，

$$\phi = \frac{j\omega}{k^2} \nabla \cdot \mathbf{A}$$

と選べば，

$$(\nabla^2 + k^2) \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J}$$

となる．また，電界および磁界は

$$\mathbf{E} = -j\omega \left\{ \mathbf{A} + \frac{1}{k^2} \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) \right\}$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A}$$

と表すことができる．

電氣的ヘルツベクトル  $\Pi$ : 電流源  $\mathbf{J}$  により生じる電磁界は，ベクトルポテンシャルを

$$\mathbf{A} = j\omega \mu \epsilon \Pi$$

とベクトル  $\Pi$  を用いて表す．このとき，

$$\mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \Pi) + k^2 \Pi \tag{A.1}$$

$$\mathbf{H} = j\omega \epsilon \nabla \times \Pi \tag{A.2}$$

$$(\nabla^2 + k^2) \Pi = -\frac{1}{j\omega \epsilon} \mathbf{J}$$

と整理できる．この  $\Pi$  についての偏微分方程式はベクトル・ヘルムホルツ方程式 (ベクトル波動方程式) であり，その解は波動を表す．

磁氣的ヘルツベクトル  $\Pi_m$  磁流源  $J_m$  により生じる電磁界は

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E} + j\omega\mu\mathbf{H} &= -\mathbf{J}_m \\ \nabla \times \mathbf{H} - j\omega\varepsilon\mathbf{E} &= \mathbf{0} \\ \nabla \cdot \mathbf{H} &= \frac{1}{\mu}\rho_m \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0\end{aligned}$$

に従うので，電氣的ヘルツベクトルと同様にして，

$$\begin{aligned}\mathbf{H} &= -j\omega\mu\nabla \times \Pi_m \\ \mathbf{E} &= \nabla(\nabla \cdot \Pi_m) + k^2\Pi_m \\ (\nabla^2 + k^2)\Pi_m &= \frac{1}{j\omega\mu}\mathbf{J}_m\end{aligned}$$

と整理できる．

電氣的ヘルツベクトルと磁氣的ヘルツベクトルを重ね合わせると，次のように電流源，および，磁流源からの放射電磁界の表現式を得ることができる．

$$\mathbf{E} = \nabla(\nabla \cdot \Pi) + k^2\Pi - j\omega\mu\nabla \times \Pi_m \quad (\text{A.3})$$

$$\mathbf{H} = j\omega\varepsilon\nabla \times \Pi + \nabla(\nabla \cdot \Pi_m) + k^2\Pi_m \quad (\text{A.4})$$

## A.2 端点条件

$z$  軸方向に一様な 2 次元問題に対して端点条件を調べる．いま， $z$  軸を稜線として  $x - y$  面 ( $x \geq 0$ ) と  $\varphi = -\Omega$  面を境界面とする開き角  $\Omega$  ( $0 \leq \Omega < \pi$ ) の完全導体楔のエッジ近傍 ( $r \simeq 0$ ) での電磁界の振舞を調べる． $\varphi = 0$ ， $-\Omega$  面での境界条件から，電界，および，磁界のエッジと平行な成分は

$$\begin{aligned}E_z &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(e)}(r) \sin n\nu\varphi \\ H_z &= \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(h)}(r) \cos n\nu\varphi, \quad \nu = \frac{\pi}{2\pi - \Omega}\end{aligned}$$

と表される．ただし，この電磁界は 2 次元の波動方程式

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \varphi^2} + k^2 \Psi = 0$$

を満足する必要がある．

上の電磁界を波動方程式に代入して，整理すると，次の方程式を得る．

$$\frac{d^2 f_n^{(e,h)}(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df_n^{(e,h)}(r)}{dr} + \left( k^2 - \frac{n^2 \nu^2}{r^2} \right) f_n^{(e,h)}(r) = 0$$

$r = 0$  近傍でのこの方程式の解を級数展開

$$f_n^{(e,h)}(r) = (kr)^p \sum_{\ell=0}^{\infty} A_{n,\ell}^{(e,h)} (kr)^\ell, \quad (A_{n,0}^{(e,h)} \neq 0)$$

により近似すると、波動方程式より次の漸化式が得られる:

$$(p^2 - n^2\nu^2)A_{n,0}^{(e,h)} = 0$$

$$\{(p+1)^2 - n^2\nu^2\} A_{n,1}^{(e,h)} = 0$$

$$\{(p+\ell)^2 - n^2\nu^2\} A_{n,\ell}^{(e,h)} + A_{n,\ell-2}^{(e,h)} = 0$$

以上より、

$$p = \pm n\nu = \pm \frac{n\pi}{2\pi - \Omega}$$

$$A_{n,\ell} = \begin{cases} 0 & \ell = 1, 3, 5, \dots \\ -\frac{A_{n,\ell-2}}{(P+\ell)^2 - n^2\nu^2} & \ell = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

となる。したがって、 $0 < kr \ll 1$  での主要項は

$$f_n^{(e,h)} = (kr)^{\pm n\nu} A_{n,0}^{(e,h)}$$

$$E_z = \sum_{n=1}^{\infty} A_{n,0}^{(e)} (kr)^{\pm n\nu} \sin n\nu\varphi$$

$$H_z = \sum_{n=0}^{\infty} A_{n,0}^{(h)} (kr)^{\pm n\nu} \cos n\nu\varphi$$

と近似できる。残りの  $r, \varphi$  成分は

$$E_r = \frac{\eta}{jkr} \frac{\partial H_z}{\partial \varphi}$$

$$= j\eta\nu \sum_{n=1}^{\infty} n A_{n,0}^{(h)} (kr)^{\pm n\nu-1} \sin n\nu\varphi$$

$$E_\varphi = -\frac{\eta}{jk} \frac{\partial H_z}{\partial r}$$

$$= \pm j\eta\nu \sum_{n=1}^{\infty} n A_{n,0}^{(h)} (kr)^{\pm n\nu-1} \cos n\nu\varphi$$

$$H_r = \frac{1}{j\eta kr} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi}$$

$$= -\frac{j\nu}{\eta} \sum_{n=1}^{\infty} n A_{n,0}^{(e)} (kr)^{\pm n\nu-1} \cos n\nu\varphi$$

$$H_\varphi = \frac{1}{j\eta k} \frac{\partial E_z}{\partial r}$$

$$= \mp \frac{j\nu}{\eta} \sum_{n=1}^{\infty} n A_{n,0}^{(e)} (kr)^{\pm n\nu-1} \sin n\nu\varphi$$

したがって， $r = 0$  近傍での電磁界のエネルギーは

$$\int_S \frac{1}{2} \omega \varepsilon |\mathbf{E}|^2 dS = \frac{2\pi - \Omega}{4} \omega \varepsilon \int_0^r |\mathbf{E}|^2 r dr$$

$$\int_S \frac{1}{2} \omega \mu |\mathbf{H}|^2 dS = \frac{2\pi - \Omega}{4} \omega \mu \int_0^r |\mathbf{H}|^2 r dr$$

となる．エッジ近傍では電磁界は発散することはあるが，蓄積エネルギーは有界である（端点条件）．このためには，

$$|\mathbf{E}| = o(r^{-1}), \quad |\mathbf{H}| = o(r^{-1}), \quad r \rightarrow +0$$

を満足する必要がある．ところで，

$$\frac{1}{2} \leq \nu = \frac{\pi}{2\pi - \Omega} < 1$$

であるから， $n = 0, 1$  だけを取り出すと，

$$E_z = A_{1,0}^{(e)}(kr)^{\pm\nu} \sin \nu \varphi$$

$$H_z = A_{0,0}^{(h)} + A_{1,0}^{(h)}(kr)^{\pm\nu} \cos \nu \varphi$$

$$E_r = j\eta\nu A_{1,n}(kr)^{\pm\nu-1} \sin \nu \varphi$$

$$E_\varphi = \pm j\eta A_{1,0}^{(h)}(kr)^{\pm\nu-1} \cos \nu \varphi$$

$$H_r = -\frac{j\nu}{\eta} A_{1,0}^{(e)}(kr)^{\pm\nu-1} \cos \nu \varphi$$

$$H_\varphi = \mp \frac{j\nu}{\eta} A_{1,0}^{(e)}(kr)^{\pm\nu-1} \sin \nu \varphi$$

であるから，蓄積エネルギーが有界であるためには，電磁界の主要項は，

$$E_z = A_{1,0}^{(e)}(kr)^\nu \sin \nu \varphi$$

$$H_z = A_{0,0}^{(h)} + A_{1,0}^{(h)}(kr)^\nu \cos \nu \varphi$$

$$E_r = j\eta\nu A_{1,n}(kr)^{\nu-1} \sin \nu \varphi$$

$$E_\varphi = j\eta A_{1,0}^{(h)}(kr)^{\nu-1} \cos \nu \varphi$$

$$H_r = -\frac{j\nu}{\eta} A_{1,0}^{(e)}(kr)^{\nu-1} \cos \nu \varphi$$

$$H_\varphi = -\frac{j\nu}{\eta} A_{1,0}^{(e)}(kr)^{\nu-1} \sin \nu \varphi$$

でなければならない．

以上，端点条件より，エッジ近傍でのエッジと平行な電磁界の成分は

$$E_{\parallel} = O(r^\nu), \quad H_{\parallel} = A_{0,0}^{(h)} + O(r^\nu).$$

となる．

$\Omega = 0$ (knife wedge) の場合は,  $\nu = 1/2$  であり,

$$E_{\parallel} = O(r^{\frac{1}{2}}) \quad (\text{A.5})$$

$$H_{\parallel} = H_0 + O(r^{\frac{1}{2}}) \quad (\text{A.6})$$

$$E_{\perp} = O(r^{-\frac{1}{2}}) \quad (\text{A.7})$$

$$H_{\perp} = O(r^{-\frac{1}{2}}) \quad (r \rightarrow 0) \quad (\text{A.8})$$

である.

### A.3 円筒座標系での変数分離解

円筒座標系での波動方程式

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + k^2 F = 0$$

の変数分離解

$$F(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$$

に対する方程式は, 分離定数を  $\nu$  として,

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left(k^2 - \frac{\nu^2}{r^2}\right) R = 0$$

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + \nu^2 \Phi = 0$$

であり, その解は,

$$R(r) = A_1 J_{\nu}(kr) + A_2 Y_{\nu}(kr)$$

$$\Phi(\varphi) = B_1 \cos \nu\varphi + B_2 \sin \nu\varphi$$

と表される. ここで,  $J_{\nu}(kr)$  および  $Y_{\nu}(kr)$  は, それぞれ  $\nu$  次の Bessel 関数, および,  $\nu$  次の Neumann 関数である. Bessel 関数は  $r = 0$  で有限な値を取り, Neumann 関数は  $r = 0$  で発散する.

$F(r, \varphi)$  が  $\varphi$  に関して周期  $2\pi$  の周期関数である場合は,  $\nu = 0, 1, 2, 3, \dots$  と整数値を取り,

$$F(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} \{A_n J_n(kr) + B_n Y_n(kr)\} \{C_n \cos n\varphi + D_n \sin n\varphi\} \quad (\text{A.9})$$

と表される.

## A.4 スカラ関数 $U(x, y)$ の導関数

直角座標の微分から円筒座標の微分に変換すると,  $\frac{\partial U}{\partial x}$  は,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial x} &= \frac{\partial U}{\partial r} \cos \varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \sin \varphi \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \left[ k J_n'(kr) \cos \varphi \{ U_n^{(e)} \cos n\varphi + U_n^{(o)} \sin n\varphi \} \right. \\
&\quad \left. - \frac{n}{r} J_n(kr) \sin \varphi \{ -U_n^{(e)} \sin n\varphi + U_n^{(o)} \cos n\varphi \} \right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \left[ \{ k J_n'(kr) \cos \varphi \cos n\varphi + \frac{n}{r} J_n(kr) \sin \varphi \sin n\varphi \} U_n^{(e)} \right. \\
&\quad \left. + \{ k J_n'(kr) \cos \varphi \sin n\varphi - \frac{n}{r} \sin \varphi \cos n\varphi \} U_n^{(o)} \right] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \left[ \left\{ \left( k J_n'(kr) + \frac{n}{r} J_n(kr) \right) \cos(n-1)\varphi + \left( k J_n'(kr) - \frac{n}{r} J_n(kr) \right) \cos(n+1)\varphi \right\} U_n^{(e)} \right. \\
&\quad \left. + \left\{ \left( k J_n'(kr) + \frac{n}{r} J_n(kr) \right) \sin(n-1)\varphi + \left( k J_n'(kr) - \frac{n}{r} J_n(kr) \right) \sin(n+1)\varphi \right\} U_n^{(o)} \right] \\
&= \frac{k}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \left[ \{ J_{n-1}(kr) \cos(n-1)\varphi - J_{n+1}(kr) \cos(n+1)\varphi \} U_n^{(e)} \right. \\
&\quad \left. + \{ J_{n-1}(kr) \sin(n-1)\varphi - J_{n+1}(kr) \sin(n+1)\varphi \} U_n^{(o)} \right] \tag{A.10}
\end{aligned}$$

となる．ただし, Bessel 関数の変形には, 漸化式 [1]

$$\begin{aligned}
J_\nu'(z) &= \frac{\nu}{z} J_\nu(z) - J_{\nu+1}(z) \\
&= J_{\nu-1}(z) - \frac{\nu}{z} J_\nu(z) \tag{A.11}
\end{aligned}$$

を利用している．ここで, 式 (A.10) の総和の第 1 項は,

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \{ J_{n-1}(kr) \cos(n-1)\varphi - J_{n+1}(kr) \cos(n+1)\varphi \} U_n^{(e)} \\
&= \{ J_{-1}(kr) \cos \varphi - J_1(kr) \cos \varphi \} U_0^{(e)} + 2\{ J_0(kr) - J_2(kr) \cos 2\varphi \} U_1^{(e)} \\
&\quad + 2\{ J_1(kr) \cos \varphi - J_3(kr) \cos 3\varphi \} U_2^{(e)} + 2\{ J_2(kr) \cos 2\varphi - J_4(kr) \cos 4\varphi \} U_3^{(e)} + \dots \\
&= 2U_1^{(e)} J_0(kr) + 2(U_2^{(e)} - U_0^{(e)}) J_1(kr) \cos \varphi + 2(U_3^{(e)} - U_1^{(e)}) J_2(kr) \cos 2\varphi + \dots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n (U_{n+1}^{(e)} - U_{n-1}^{(e)}) J_n(kr) \cos n\varphi \tag{A.12}
\end{aligned}$$

と変形できる．ただし,

$$U_{-1}^{(e)} = -U_1^{(e)}$$

とする．上の変形では， $J_{-1}(kr) = -J_1(kr)$  を利用している．さらに，式 (A.10) の総和の第 2 項は，

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \{J_{n-1}(kr) \sin(n-1)\varphi - J_{n+1}(kr) \sin(n+1)\varphi\} U_n^{(o)} \\
&= -2J_2(kr) \sin 2\varphi U_1^{(o)} + 2\{J_1(kr) \sin \varphi - J_3(kr) \sin 3\varphi\} U_2^{(o)} \\
&\quad + 2\{J_2(kr) \sin 2\varphi - J_4(kr) \sin 4\varphi\} U_3^{(o)} + \dots \\
&= 2U_2^{(o)} J_1(kr) \sin \varphi + 2\{U_3^{(o)} - U_1^{(o)}\} J_2(kr) \sin 2\varphi + 2\{U_4^{(o)} - U_2^{(o)}\} J_3(kr) \sin 3\varphi + \dots \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n \left( U_{n+1}^{(o)} - U_{n-1}^{(o)} \right) J_n(kr) \sin n\varphi \tag{A.13}
\end{aligned}$$

と変形できるので，

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{k}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n J_n(kr) \left[ (U_{n+1}^{(e)} - U_{n-1}^{(e)}) \cos n\varphi + (U_{n+1}^{(o)} - U_{n-1}^{(o)}) \sin n\varphi \right] \tag{A.14}$$

となる．

同様にして，直角座標の微分から円筒座標の微分に変換すると， $\frac{\partial U}{\partial y}$  は，

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial U}{\partial y} &= \frac{\partial U}{\partial r} \sin \varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \cos \varphi \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \left[ \left\{ kJ_n'(kr) \sin \varphi \cos n\varphi - \frac{n}{r} J_n(kr) \cos \varphi \sin n\varphi \right\} U_n^{(e)} \right. \\
 &\quad \left. + \left\{ kJ_n'(kr) \sin \varphi \sin n\varphi + \frac{n}{r} \cos \varphi \cos n\varphi \right\} U_n^{(o)} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \left[ \left\{ - \left( kJ_n'(kr) + \frac{n}{r} J_n(kr) \right) \sin(n-1)\varphi + \left( kJ_n'(kr) - \frac{n}{r} J_n(kr) \right) \sin(n+1)\varphi \right\} U_n^{(e)} \right. \\
 &\quad \left. + \left\{ \left( kJ_n'(kr) + \frac{n}{r} J_n(kr) \right) \cos(n-1)\varphi - \left( kJ_n'(kr) - \frac{n}{r} J_n(kr) \right) \cos(n+1)\varphi \right\} U_n^{(o)} \right] \\
 &= \frac{k}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \left[ \left\{ -J_{n-1}(kr) \sin(n-1)\varphi - J_{n+1}(kr) \sin(n+1)\varphi \right\} U_n^{(e)} \right. \\
 &\quad \left. + \left\{ J_{n-1}(kr) \cos(n-1)\varphi + J_{n+1}(kr) \cos(n+1)\varphi \right\} U_n^{(o)} \right] \\
 &= \frac{k}{2} \left[ - \left\{ U_0^{(e)} (J_{-1}(kr) \sin(-\varphi) + J_1(kr) \sin \varphi) + 2U_1^{(e)} J_2(kr) \sin 2\varphi \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + 2U_2^{(e)} (J_1(kr) \sin \varphi + J_3(kr) \sin 3\varphi) + 2U_3^{(e)} (J_2(kr) \sin 2\varphi + J_4(kr) \sin 4\varphi) + \dots \right\} \right. \\
 &\quad \left. + \left\{ 2U_1^{(o)} (J_0(kr) + J_2(kr) \cos 2\varphi) + 2U_2^{(o)} (J_1(kr) \cos \varphi + J_3(kr) \cos 3\varphi) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + 2U_3^{(o)} (J_2(kr) \cos 2\varphi + J_4(kr) \cos 4\varphi) + \dots \right\} \right] \\
 &= \frac{k}{2} \left[ \left\{ 2U_1^{(o)} J_0(kr) + 2U_2^{(o)} J_1(kr) \cos \varphi + 2(U_1^{(o)} + U_3^{(o)}) J_2(kr) \cos 2\varphi \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + 2(U_2^{(o)} + U_4^{(o)}) J_3(kr) \cos 3\varphi + \dots \right\} \right. \\
 &\quad \left. - \left\{ 2(U_2^{(e)} + U_0^{(e)}) J_1(kr) \sin \varphi + 2(U_3^{(e)} + U_1^{(e)}) J_2(kr) \sin 2\varphi \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + 2(U_4^{(e)} + U_2^{(e)}) J_3(kr) \sin 3\varphi + \dots \right\} \right] \\
 &= \frac{k}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n J_n(kr) \left[ (U_{n+1}^{(o)} + U_{n-1}^{(o)}) \cos n\varphi - (U_{n+1}^{(e)} + U_{n-1}^{(e)}) \sin n\varphi \right] \tag{A.15}
 \end{aligned}$$

ただし，

$$U_{-1}^{(o)} = U_1^{(o)}, \quad U_0^{(o)} = 0$$

である．

## A.5 関数 $u_m^n(t)$

### A.5.1 性質と直交性

文献 [2]

$$\int_0^\infty x^\lambda J_\mu(ax) J_\nu(bx) dx = \frac{2^\lambda a^\mu \Gamma(\alpha)}{b^{\lambda+\mu+1} \Gamma(\mu+1) \Gamma(\nu-\alpha+1)} \times F(\alpha, \alpha-\nu, \mu+1; \frac{a^2}{b^2}), \quad (b > a > 0, \alpha = \frac{1}{2}(\lambda + \mu + \nu + 1))$$

において,

$$b = 1, a = \sqrt{t}, \lambda = -\frac{1}{2}, \mu = n, \nu = n + 2m + \frac{1}{2}$$

と置く. このとき,  $\alpha = n + m + \frac{1}{2}$  であるから,

$$\int_0^\infty \frac{J_n(x\sqrt{t}) J_{n+2m+\frac{1}{2}}(x)}{\sqrt{x}} dx = \frac{t^{n/2} \Gamma(n + m + \frac{1}{2})}{\sqrt{2} \Gamma(n+1) \Gamma(m+1)} \times F(n + m + \frac{1}{2}, -m, n + 1; t)$$

となる. したがって,

$$\begin{aligned} u_m^n(t) &= t^{-n/2} \int_0^\infty \frac{J_n(\xi\sqrt{t}) J_{n+2m+\frac{1}{2}}(\xi)}{\sqrt{\xi}} d\xi \\ &= \frac{\Gamma(n + m + \frac{1}{2})}{\sqrt{2} \Gamma(n+1) \Gamma(m+1)} \times F(n + m + \frac{1}{2}, -m, n + 1; t) \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

となる.

また  $u_m^n(t)$  は Jacobi の多項式  $G_n(\alpha, \gamma; t)$  を用いて表現することができる. また, Jacobi の多項式は Gauss の超幾何級数により,

$$\begin{aligned} G_n(\alpha, \gamma; x) &= \frac{\Gamma(\gamma) x^{1-\gamma} (1-x)^{\gamma-\alpha}}{\Gamma(\gamma+n)} \times \frac{d^n}{dx^n} [x^{\gamma+n-1} (1-x)^{\alpha+n-\gamma}] \\ &= F(-n, \alpha+n, \gamma; x) \\ &= 1 + \sum_{r=1}^n \frac{(-1)^r n!}{(n-r)! r!} \times \frac{\Gamma(\alpha+n+r) \Gamma(r)}{\Gamma(\alpha+n) \Gamma(\gamma+r)} x^r \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

と表現できる [3].

ここで,  $n \rightarrow m, \alpha \rightarrow n + \frac{1}{2}, \gamma \rightarrow n + 1$  と置き換えると,

$$\begin{aligned} G_m(n + \frac{1}{2}, n + 1; x) &= \frac{\Gamma(n+1) x^{-n} (1-x)^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(n+m+1)} \times \frac{d^m}{dx^m} [x^{n+m} (1-x)^{m-\frac{1}{2}}] \\ &= F(-m, n + m + \frac{1}{2}, n + 1; x) \\ &= F(n + m + \frac{1}{2}, -m, n + 1; x) \\ &= \frac{\sqrt{2} \Gamma(n+1) \Gamma(m+1)}{\Gamma(n + m + \frac{1}{2})} \times u_m^n(x) \end{aligned}$$

$$u_m^n(x) = \frac{\Gamma(n+m+\frac{1}{2})x^{-n}(1-x)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}\Gamma(m+1)\Gamma(n+m+1)} \times \frac{d^m}{dx^m} \left[ x^{n+m}(1-x)^{m-\frac{1}{2}} \right]$$

また,  $u_m^n(x)$  には次のような直交性がある .

Jacobi の多項式  $G_n(\alpha, \gamma; x)$  は  $[0, 1]$  で直交完備な関数列であり, 次の式で表される [4] :

$$\begin{aligned} & \int_0^1 x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma} G_{n_1}(\alpha, \gamma; x) G_{n_2}(\alpha, \gamma; x) dx \\ &= \begin{cases} 0, & (n_1 \neq n_2) \\ \frac{n_1! \Gamma^2(\gamma) \Gamma(n_1 + \alpha - \gamma + 1)}{(2n_1 + \alpha) \Gamma(n_1 + \alpha) \Gamma(n_1 + \gamma)}, & (n_1 = n_2) \end{cases} \end{aligned}$$

なお, Jacobi の多項式

$$G_n(\alpha, \gamma; x) = F(-n, \alpha + n, \gamma; x)$$

において [3],  $n \rightarrow m, \alpha \rightarrow n + \frac{1}{2}, \gamma \rightarrow n + 1$  と置き換えると,

$$\begin{aligned} G_m(n + \frac{1}{2}, n + 1; x) &= F(-m, n + m + \frac{1}{2}, n + 1; x) \\ &= F(n + m + \frac{1}{2}, -m, n + 1; x) \\ &= \frac{\sqrt{2}\Gamma(n+1)\Gamma(m+1)}{\Gamma(n+m+\frac{1}{2})} \times u_m^n(x) \end{aligned}$$

$$u_m^n(x) = \frac{\Gamma(n+m+\frac{1}{2})x^{-n}(1-x)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2}\Gamma(m+1)\Gamma(n+m+1)} \times \frac{d^m}{dx^m} \left[ x^{n+m}(1-x)^{m-\frac{1}{2}} \right] \quad (\text{A.18})$$

したがって,

$$\begin{aligned} & x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha-\gamma} G_{n_1}(\alpha, \gamma; x) G_{n_2}(\alpha, \gamma; x) \\ & \rightarrow x^n(1-x)^{-\frac{1}{2}} \frac{\sqrt{2}\Gamma(n+1)\Gamma(m_1+1)}{\Gamma(n+m_1+\frac{1}{2})} u_{m_1}^n(x) \times \frac{\sqrt{2}\Gamma(n+1)\Gamma(m_2+1)}{\Gamma(n+m_2+\frac{1}{2})} u_{m_2}^n(x) \\ &= \frac{2\Gamma^2(n+1)\Gamma(m_1+1)\Gamma(m_2+1)}{\Gamma(n+m_1+\frac{1}{2})\Gamma(n+m_2+\frac{1}{2})} \times \frac{x^n}{\sqrt{1-x}} u_{m_1}^n(x) u_{m_2}^n(x) \\ & \frac{n_1! \Gamma^2(\gamma) \Gamma(n_1 + \alpha - \gamma + 1)}{(2n_1 + \alpha) \Gamma(n_1 + \alpha) \Gamma(n_1 + \gamma)} \\ & \rightarrow \frac{\Gamma(m_1+1)\Gamma^2(n+1)\Gamma(m_1+\frac{1}{2})}{(2m_1+n+\frac{1}{2})\Gamma(m_1+n+\frac{1}{2})\Gamma(m_1+n+1)} \end{aligned}$$

と書き換えられるので,  $u_m^n(t)$  の直交関係は,

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1-x}} \times u_{m_1}^n(x) u_{m_2}^n(x) dx \\ &= \begin{cases} 0, & (m_1 \neq m_2) \\ \frac{\Gamma(n+m_1+\frac{1}{2})}{2(2m_1+n+\frac{1}{2})\Gamma(m_1+1)\Gamma(m_1+n+1)}, & (m_1 = m_2) \end{cases} \quad (\text{A.19}) \end{aligned}$$

と表される .

### A.5.2 $u_m^n(t)$ による展開

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m x^{n/2} u_m^n(x) \quad (\text{A.20})$$

の両辺に  $\frac{x^{n/2}}{\sqrt{1-x}} u_\ell^n(x)$  を掛け、 $0 < x < 1$  で積分する．このとき、 $u_m^n(t)$  の直交性 (A.19) を利用する．

$$\int_0^1 \frac{x^{n/2}}{\sqrt{1-x}} u_\ell^n(x) f(x) dx = \frac{\Gamma(n + \ell + \frac{1}{2}) A_\ell}{(4\ell + 2n + 1) \Gamma(\ell + 1) \Gamma(n + \ell + 1)}$$

$$A_\ell = \frac{(4\ell + 2n + 1) \Gamma(\ell + 1) \Gamma(n + \ell + 1)}{\Gamma(n + \ell + \frac{1}{2})} \int_0^1 \frac{x^{n/2}}{\sqrt{1-x}} u_\ell^n(x) f(x) dx \quad (\text{A.21})$$

### A.5.3 Bessel 関数の展開

式 (A.21) を使って、Bessel 関数を展開する．式 (A.20) に Bessel 関数を代入した、

$$I = \int_0^1 \frac{t^{n/2}}{\sqrt{1-t}} u_\ell^n(t) J_n(\gamma\sqrt{t}) dt$$

に対して、Bessel 関数の級数展開 [5]

$$J_n(\gamma\sqrt{t}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{\gamma\sqrt{t}}{2}\right)^{n+2k}}{\Gamma(k+1) \Gamma(k+n+1)}$$

と、式 (A.18) を代入すると、

$$I = \frac{\Gamma(n + \ell + \frac{1}{2})}{\sqrt{2} \Gamma(\ell + 1) \Gamma(n + \ell + 1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{n+2k}}{\Gamma(k+1) \Gamma(k+n+1)} \int_0^1 t^k \times \frac{d^\ell}{dt^\ell} \left[ t^{n+\ell} (1-t)^{\ell-\frac{1}{2}} \right] dt$$

となる．ここで、

$$I_{k,\nu} = \int_0^1 t^k \times \frac{d^\nu}{dt^\nu} \left[ t^{n+\ell} (1-t)^{\ell-\frac{1}{2}} \right] dt$$

と置き、部分積分を繰り返す：

$$\begin{aligned} I_{k,\ell} &= \left[ t^k \times \frac{d^{\ell-1}}{dt^{\ell-1}} \left\{ t^{n+\ell} (1-t)^{\ell-\frac{1}{2}} \right\} \right]_0^1 - k I_{k-1,\ell-1} \\ &= -k I_{k-1,\ell-1} \\ &= k(k-1) I_{k-2,\ell-2} \\ &= \dots \end{aligned}$$

より、

•  $k < \ell$  の場合

$$\begin{aligned}
 I_{k,\ell} &= (-1)^k k! I_{0,\ell-k} \\
 &= (-1)^k k! \int_0^1 \frac{d^{\ell-k}}{dt^{\ell-k}} \left\{ t^{n+\ell} (1-t)^{\ell-\frac{1}{2}} \right\} dt \\
 &= (-1)^k k! \left[ \frac{d^{\ell-k-1}}{dt^{\ell-k-1}} \left\{ t^{n+\ell} (1-t)^{\ell-\frac{1}{2}} \right\} \right]_0^1 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

•  $k \geq \ell$  の場合

$$\begin{aligned}
 I_{k,\ell} &= (-1)^\ell k(k-1)(k-1)\cdots(k-\ell+1) I_{k-\ell,0} \\
 &= \frac{(-1)^\ell \Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\ell+1)} \int_0^1 t^{k-\ell} \times t^{n+\ell} (1-t)^{\ell-\frac{1}{2}} dt \\
 &= \frac{(-1)^\ell \Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\ell+1)} \int_0^1 t^{k+n} (1-t)^{\ell-\frac{1}{2}} dt \\
 &= \frac{(-1)^\ell \Gamma(k+1)}{\Gamma(k-\ell+1)} B(k+n+1, \ell + \frac{1}{2}), \quad [\text{文献 [6]}] \\
 &= \frac{(-1)^\ell \Gamma(k+1) \Gamma(n+k+1) \Gamma(\ell + \frac{1}{2})}{\Gamma(k-\ell+1) \Gamma(k+n+\ell + \frac{3}{2})}
 \end{aligned}$$

したがって,

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{\Gamma(n+\ell + \frac{1}{2})}{\sqrt{2} \Gamma(\ell+1) \Gamma(n+\ell+1)} \\
 &\quad \times \sum_{k=\ell}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{n+2k}}{\Gamma(k+1) \Gamma(k+n+1)} \times \frac{(-1)^\ell \Gamma(k+1) \Gamma(n+k+1) \Gamma(\ell + \frac{1}{2})}{\Gamma(k-\ell+1) \Gamma(k+n+\ell + \frac{3}{2})} \\
 &= \frac{\Gamma(\ell + \frac{1}{2}) \Gamma(n+\ell + \frac{1}{2})}{\sqrt{2} \Gamma(\ell+1) \Gamma(n+\ell+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{n+2\ell+2k}}{\Gamma(k+1) \Gamma(k+n+2\ell + \frac{3}{2})} \quad (\text{A.22})
 \end{aligned}$$

を得る.

以上より, Bessel 関数は式 (A.21) と式 (A.22) より

$$J_n(\gamma\sqrt{t}) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m t^{n/2} u_m^n(t) \quad (\text{A.23})$$

$$\begin{aligned}
 A_m &= \frac{(4m+2n+1) \Gamma(m+1) \Gamma(n+m+1)}{\Gamma(n+m + \frac{1}{2})} \int_0^1 \frac{t^{n/2}}{\sqrt{1-x}} u_m^n(t) J_n(\gamma\sqrt{t}) dt \\
 &= \frac{(4m+2n+1) \Gamma(m+1) \Gamma(n+m+1)}{\Gamma(n+m + \frac{1}{2})} \\
 &\quad \times \frac{\Gamma(m + \frac{1}{2}) \Gamma(n+m + \frac{1}{2})}{\sqrt{2} \Gamma(m+1) \Gamma(n+m+1)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{n+2m+2k}}{\Gamma(k+1) \Gamma(k+n+2m + \frac{3}{2})} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} (4m+2n+1) \Gamma(m + \frac{1}{2}) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{n+2m+2k}}{\Gamma(k+1) \Gamma(k+n+2m + \frac{3}{2})} \quad (\text{A.24})
 \end{aligned}$$

と展開でき，式 (A.24) を式 (A.23) に代入すると，

$$J_n(\gamma\sqrt{t}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} (4m+2n+1)\Gamma(m+\frac{1}{2}) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{n+2m+2k}}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+n+2m+\frac{3}{2})} t^{n/2} u_m^n(t) \quad (\text{A.25})$$

を得る．

したがって，式 (A.24) は，

$$\int_0^1 \frac{t^{n/2} J_n(\xi\sqrt{t})}{\sqrt{1-t}} \times u_\ell^n(t) dt = \frac{\Gamma(\ell+\frac{1}{2})\Gamma(n+\ell+\frac{1}{2})}{\sqrt{2}\Gamma(\ell+1)\Gamma(n+\ell+1)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu \left(\frac{\xi}{2}\right)^{n+2\ell+2\nu}}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\nu+n+2\ell+\frac{3}{2})} \quad (\text{A.26})$$

と級数に展開できる．

## A.6 円筒座標系

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

より，ベクトル  $A$  の極座標表示は，

$$A_r = A_x \cos \varphi + A_y \sin \varphi \quad (\text{A.27})$$

$$A_\varphi = -A_x \sin \varphi + A_y \cos \varphi \quad (\text{A.28})$$

である．ここで， $A_x, A_y$  をフーリエ級数で展開する．

$$A_x = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \left\{ A_{x_n}^{(e)} \cos n\varphi + A_{x_n}^{(o)} \sin n\varphi \right\} \quad (\text{A.29})$$

$$A_y = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \left\{ A_{y_n}^{(e)} \cos n\varphi + A_{y_n}^{(o)} \sin n\varphi \right\} \quad (\text{A.30})$$

すると  $A_r, A_\varphi$  は ,

$$\begin{aligned}
 A_r &= \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \left[ \cos \varphi \left\{ A_{x_n}^{(e)} \cos n\varphi + A_{x_n}^{(o)} \sin n\varphi \right\} + \sin \varphi \left\{ A_{y_n}^{(e)} \cos n\varphi + A_{y_n}^{(o)} \sin n\varphi \right\} \right] \\
 &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \left[ A_{x_n}^{(e)} \{ \cos(n-1)\varphi + \cos(n+1)\varphi \} + A_{x_n}^{(o)} \{ \sin(n-1)\varphi + \sin(n+1)\varphi \} \right. \\
 &\quad \left. - A_{y_n}^{(e)} \{ \sin(n-1)\varphi - \sin(n+1)\varphi \} + A_{y_n}^{(o)} \{ \cos(n-1)\varphi - \cos(n+1)\varphi \} \right] \\
 &= A_{x_0}^{(e)} \cos \varphi + A_{x_1}^{(e)} \{ 1 + \cos 2\varphi \} + \cdots + A_{x_n}^{(e)} \{ \cos(n-1)\varphi + \cos(n+1)\varphi \} + \cdots \\
 &\quad + A_{x_1}^{(o)} \sin 2\varphi + A_{x_2}^{(o)} \{ \sin \varphi + \sin 3\varphi \} + \cdots \\
 &\quad + A_{y_0}^{(e)} \sin \varphi + A_{y_1}^{(e)} \sin 2\varphi - A_{y_2}^{(e)} \{ \sin \varphi - \sin 3\varphi \} + \cdots \\
 &\quad + A_{y_1}^{(o)} \{ 1 - \cos 2\varphi \} + A_{y_2}^{(o)} \{ \cos \varphi - \cos 3\varphi \} + \cdots \\
 &= A_{x_1}^{(e)} + A_{y_1}^{(o)} + (A_{x_0}^{(e)} + A_{x_2}^{(e)} + A_{y_2}^{(o)}) \cos \varphi + (A_{x_1}^{(e)} + A_{x_3}^{(e)} - A_{y_1}^{(o)} + A_{y_3}^{(o)}) \cos 2\varphi + \cdots \\
 &\quad + (A_{x_2}^{(o)} + A_{y_0}^{(e)} - A_{y_2}^{(e)}) \sin \varphi + (A_{x_1}^{(o)} + A_{x_3}^{(o)} + A_{y_1}^{(e)} - A_{y_3}^{(e)}) \sin 2\varphi + \cdots \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \left[ \left\{ A_{x_{n-1}}^{(e)} + A_{x_{n+1}}^{(e)} - A_{y_{n-1}}^{(o)} + A_{y_{n+1}}^{(o)} \right\} \cos n\varphi \right. \\
 &\quad \left. + \left\{ A_{x_{n-1}}^{(o)} + A_{x_{n+1}}^{(o)} + A_{y_{n-1}}^{(e)} - A_{y_{n+1}}^{(e)} \right\} \sin n\varphi \right] \tag{A.31}
 \end{aligned}$$

と , 書くことができる . ただし ,

$$A_{x_0}^{(o)} = A_{y_0}^{(o)} = 0, \quad A_{x_{-1}}^{(e)} = A_{x_1}^{(e)}, \quad A_{y_{-1}}^{(o)} = -A_{y_1}^{(o)}$$

とする .

同様に,  $A_\varphi$  は,

$$\begin{aligned}
A_\varphi &= \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \left[ -\sin \varphi \left\{ A_{x_n}^{(e)} \cos n\varphi + A_{x_n}^{(o)} \sin n\varphi \right\} + \cos \varphi \left\{ A_{y_n}^{(e)} \cos n\varphi + A_{y_n}^{(o)} \sin n\varphi \right\} \right] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \left[ A_{x_n}^{(e)} \{ \sin(n-1)\varphi - \sin(n+1)\varphi \} - A_{x_n}^{(o)} \{ \cos(n-1)\varphi - \cos(n+1)\varphi \} \right. \\
&\quad \left. + A_{y_n}^{(e)} \{ \cos(n-1)\varphi + \cos(n+1)\varphi \} + A_{y_n}^{(o)} \{ \sin(n-1)\varphi + \sin(n+1)\varphi \} \right] \\
&= -A_{x_0}^{(e)} \sin \varphi - A_{x_1}^{(e)} \sin 2\varphi + A_{x_2}^{(e)} \{ \sin \varphi - \sin 3\varphi \} + A_{x_3}^{(e)} \{ \sin 2\varphi - \sin 4\varphi \} + \cdots \\
&\quad - A_{x_1}^{(o)} \{ 1 - \cos 2\varphi \} - A_{x_2}^{(o)} \{ \cos \varphi - \cos 3\varphi \} - A_{x_3}^{(o)} \{ \cos 2\varphi - \cos 4\varphi \} + \cdots \\
&\quad + A_{y_0}^{(e)} \cos \varphi + A_{y_1}^{(e)} \{ 1 + \cos 2\varphi \} + A_{y_2}^{(e)} \{ \cos \varphi + \cos 3\varphi \} + \cdots \\
&\quad + A_{y_1}^{(o)} \sin 2\varphi + A_{y_2}^{(o)} \{ \sin \varphi + \sin 3\varphi \} + A_{y_3}^{(o)} \{ \sin 2\varphi + \sin 4\varphi \} + \cdots \\
&= -A_{x_1}^{(o)} + A_{y_1}^{(e)} + \{ -A_{x_2}^{(o)} + A_{y_0}^{(e)} + A_{y_2}^{(e)} \} \cos \varphi \\
&\quad + \{ A_{x_1}^{(o)} - A_{x_3}^{(o)} + A_{y_1}^{(e)} + A_{y_3}^{(e)} \} \cos 2\varphi + \cdots \\
&\quad + \{ -A_{x_0}^{(e)} + A_{x_2}^{(e)} + A_{x_2}^{(o)} \} \sin \varphi + \{ -A_{x_1}^{(e)} + A_{x_3}^{(e)} + A_{y_1}^{(o)} + A_{y_3}^{(o)} \} \sin 2\varphi \\
&\quad + \{ -A_{x_2}^{(e)} + A_{x_4}^{(e)} + A_{y_2}^{(o)} + A_{y_4}^{(o)} \} \sin 3\varphi + \cdots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \left[ \{ A_{x_{n-1}}^{(o)} - A_{x_{n+1}}^{(o)} + A_{y_{n-1}}^{(e)} + A_{y_{n+1}}^{(e)} \} \cos n\varphi \right. \\
&\quad \left. + \{ -A_{x_{n-1}}^{(e)} + A_{x_{n+1}}^{(e)} + A_{y_{n-1}}^{(o)} + A_{y_{n+1}}^{(o)} \} \sin n\varphi \right] \tag{A.32}
\end{aligned}$$

と, 書くことができる. ただし,

$$A_{x_{-1}}^{(o)} = -A_{x_1}^{(o)}, \quad A_{y_{-1}}^{(e)} = A_{y_1}^{(e)}, \quad A_{x_0}^{(o)} = A_{y_0}^{(o)} = 0$$

したがって上記をまとめると, 次のようになる.

$$A_r = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \left[ A_{r_n}^{(e)} \cos n\varphi + A_{r_n}^{(o)} \sin n\varphi \right] \tag{A.33}$$

$$A_\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \left[ A_{\varphi_n}^{(e)} \cos n\varphi + A_{\varphi_n}^{(o)} \sin n\varphi \right] \tag{A.34}$$

$$A_{r_n}^{(e)} = A_{x_{n-1}}^{(e)} + A_{x_{n+1}}^{(e)} - A_{y_{n-1}}^{(o)} + A_{y_{n+1}}^{(o)}$$

$$A_{r_n}^{(o)} = A_{x_{n-1}}^{(o)} + A_{x_{n+1}}^{(o)} + A_{y_{n-1}}^{(e)} - A_{y_{n+1}}^{(e)}$$

$$A_{\varphi_n}^{(e)} = A_{x_{n-1}}^{(o)} - A_{x_{n+1}}^{(o)} + A_{y_{n-1}}^{(e)} + A_{y_{n+1}}^{(e)}$$

$$A_{\varphi_n}^{(o)} = -A_{x_{n-1}}^{(e)} + A_{x_{n+1}}^{(e)} + A_{y_{n-1}}^{(o)} + A_{y_{n+1}}^{(o)}$$

ただし,

$$A_{x_0}^{(o)} = A_{y_0}^{(o)} = 0, \quad A_{x,y_{-1}}^{(e)} = A_{x,y_1}^{(e)}, \quad A_{x,y_{-1}}^{(o)} = -A_{x,y_1}^{(o)}.$$

## A.7 連立 1 次方程式の係数

式 (A.26) より ,

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^1 \frac{t^{n/2} J_n(\xi\sqrt{t})}{\sqrt{1-t}} \times u_\ell^n(t) dt \\
 &= \frac{\Gamma(\ell + \frac{1}{2})\Gamma(n + \ell + \frac{1}{2})}{\sqrt{2}\Gamma(\ell + 1)\Gamma(n + \ell + 1)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu \left(\frac{\xi}{2}\right)^{n+2\ell+2\nu}}{\Gamma(\nu + 1)\Gamma(\nu + n + 2\ell + \frac{3}{2})}
 \end{aligned} \tag{A.35}$$

である . ここで ,  $\Gamma(n + \nu + 1)$  は gamma 関数を表す . これを利用し , 連立 1 次方程式の係数  $G_{\ell,m}^n$  は , 式 (2.53) より ,

$$\begin{aligned}
 G_{\ell,m}^n &= \frac{\Gamma(n + \ell + 1)\Gamma(\ell + 1)}{\Gamma(n + \ell + \frac{1}{2})\Gamma(\ell + \frac{1}{2})} \int_0^\infty \frac{\sqrt{\xi} J_{n+2m+\frac{1}{2}}(\xi)}{\sqrt{\xi^2 - \gamma^2}} \left\{ \int_0^1 \frac{t^{n/2} J_n(\xi\sqrt{t})}{\sqrt{1-t}} \times u_\ell^n(t) dt \right\} d\xi \\
 &= \int_0^\infty \frac{\sqrt{\xi} J_{n+2m+\frac{1}{2}}(\xi)}{\sqrt{\xi^2 - \gamma^2}} \\
 &\quad \times \left\{ \frac{\Gamma(\ell + \frac{1}{2})\Gamma(n + \ell + \frac{1}{2})}{\sqrt{2}\Gamma(\ell + 1)\Gamma(n + \ell + 1)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu \left(\frac{\xi}{2}\right)^{n+2\ell+2\nu}}{\Gamma(\nu + 1)\Gamma(\nu + n + 2\ell + \frac{3}{2})} \right\} d\xi \\
 &= \frac{\Gamma(n + \ell + \frac{1}{2})\Gamma(\ell + \frac{1}{2})}{\sqrt{2}\Gamma(\ell + 1)\Gamma(n + \ell + 1)} \int_0^\infty \frac{\sqrt{\xi} J_{n+2m+\frac{1}{2}}(\xi)}{\sqrt{\xi^2 - \gamma^2}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu \left(\frac{\xi}{2}\right)^{n+2\ell+2\nu}}{\Gamma(\nu + 1)\Gamma(\nu + n + 2\ell + \frac{3}{2})} d\xi \\
 &= \frac{\Gamma(n + \ell + \frac{1}{2})\Gamma(\ell + \frac{1}{2})}{\Gamma(\ell + 1)\Gamma(n + \ell + 1)} \int_0^\infty \frac{J_{n+2m+\frac{1}{2}}(\xi)}{\sqrt{\xi^2 - \gamma^2}} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu \left(\frac{\xi}{2}\right)^{n+2\ell+\frac{1}{2}+2\nu}}{\Gamma(\nu + 1)\Gamma(\nu + n + 2\ell + \frac{1}{2} + 1)} d\xi \\
 &= \frac{\Gamma(n + \ell + \frac{1}{2})\Gamma(\ell + \frac{1}{2})}{\Gamma(\ell + 1)\Gamma(n + \ell + 1)} \int_0^\infty \frac{J_{n+2m+\frac{1}{2}}(\xi) J_{n+2\ell+\frac{1}{2}}(\xi)}{\sqrt{\xi^2 - \gamma^2}} d\xi
 \end{aligned}$$

が得られる . ただし , 途中に Bessel 関数の級数展開式 [5] ,

$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{n! \Gamma(\nu + n + 1)}$$

を利用している .

次に ,  $G_{\ell,m}^n$  を実数部と虚数部に分ける :

$$\sqrt{\xi^2 - \gamma^2} = j\sqrt{\gamma^2 - \xi^2} \tag{A.36}$$

とすると ,

$$G_{\ell,m}^n = \{g_1(n + m + \ell, m - \ell) - jg_2(n + m + \ell, m - \ell)\} \tag{A.37}$$

となる . ここで ,

$$\begin{aligned}
 g_1(p, q) &= \int_\gamma^\infty \frac{J_{p+q+\frac{1}{2}}(\xi) J_{p-q+\frac{1}{2}}(\xi)}{\sqrt{\xi^2 - \gamma^2}} d\xi \\
 g_2(p, q) &= \int_0^\gamma \frac{J_{p+q+\frac{1}{2}}(\xi) J_{p-q+\frac{1}{2}}(\xi)}{\sqrt{\gamma^2 - \xi^2}} d\xi
 \end{aligned}$$

である .

Bessel 関数の積の積分表示 [7]

$$J_{p+q+\frac{1}{2}}(\xi)J_{p-q+\frac{1}{2}}(\xi) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} J_{2p+1}(2\xi \cos \theta) \cos(2q\theta) d\theta$$

を利用すれば ,

$$g_1(p, q) = \frac{2}{\pi} \int_{\gamma}^{\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{J_{2p+1}(2\xi \cos \theta) \cos(2q\theta)}{\sqrt{\xi^2 - \gamma^2}} d\theta d\xi$$

$$g_2(p, q) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\gamma} \int_0^{\pi/2} \frac{J_{2p+1}(2\xi \cos \theta) \cos(2q\theta)}{\sqrt{\gamma^2 - \xi^2}} d\theta d\xi$$

となる .

- $g_2(p, q)$  : Bessel 関数を級数展開すれば [8] ,

$$g_2(p, q) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(2p + k + 2)} \int_0^{\pi/2} \cos(2q\theta) \int_0^{\gamma} \frac{(\xi \cos \theta)^{2p+2k+1}}{\sqrt{\gamma^2 - \xi^2}} d\xi d\theta$$

$$\int_0^{\gamma} \frac{\xi^{2p+2k+1}}{\sqrt{\gamma^2 - \xi^2}} d\xi = \gamma^{2p+2k+1} \int_0^1 (1 - s^2)^{p+k} ds, \quad (s = \frac{1}{\gamma} \sqrt{\gamma^2 - \xi^2})$$

$$= \gamma^{2p+2k+1} \times \frac{2^{2(p+k)} \Gamma^2(p + k + 1)}{\Gamma(2p + 2k + 2)}, \quad [\text{文献 [9]}]$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos(2q\theta) \cos^{2p+2k+1} \theta d\theta$$

$$= \frac{\pi \Gamma(2p + 2k + 2)}{2^{2p+2k+2} \Gamma(p + k + q + \frac{3}{2}) \Gamma(p + k - q + \frac{3}{2})}, \quad [\text{文献 [10]}]$$

以上より ,

$$g_2(p, q) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma^2(p + k + 1) (-1)^k \gamma^{2p+2k+1}}{k! \Gamma(2p + k + 2) \Gamma(p + k + q + \frac{3}{2}) \Gamma(p + k - q + \frac{3}{2})}$$

Nomura と Katsura[11] では

$$\Gamma(2p + 2k + 2) = \frac{2^{2p+2k+1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(p + k + 1) \Gamma(p + k + \frac{3}{2})$$

を変形した ,

$$\Gamma(p + k + 1) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{2p+2k+1}} \frac{\Gamma(2p + 2k + 2)}{\Gamma(p + k + \frac{3}{2})}$$

を用いて，分子の  $\Gamma(p+k+1)$  の 1 つを置き換えて得られる

$$g_2(p, q) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\Gamma(p+k+1)\Gamma(2p+2k+2) \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{2p+2k+1}}{\Gamma(2p+k+2)\Gamma(p+k+q+\frac{3}{2})\Gamma(p+k-q+\frac{3}{2})\Gamma(p+k+\frac{3}{2})} \quad (\text{A.38})$$

を採用している．

- $g_1(p, q)$  : 積分区間が  $[\gamma, \infty]$  であるから， $g_2$  の場合のように級数展開を利用することはできない．そこで，積分表示

$$J_\nu(x) = \frac{1}{2\pi j} \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \int_C \frac{\Gamma(-t)}{\Gamma(\nu+t+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2t} dt$$

を利用する．ここで，積分路  $C$  を無限遠で右半平面に閉じ  $\Gamma(-t)$  の特異点である  $t = 0, 1, 2, 3, \dots$  での 1 位の極の留数の和に変形すれば通常の Bessel 関数の級数展開となる．ここでの積分路上では  $\text{Re}(t) \leq 0$  であるので， $\xi$  と  $t$  についての積分を交換して，先に  $\xi$  について積分することが可能となる．

$$g_1(p, q) = \frac{1}{\pi^2 j} \int_\gamma^\infty \int_0^{\pi/2} \int_C \frac{\Gamma(-t)}{\Gamma(2p+t+2)} \frac{(\xi \cos \theta)^{2p+2t+1} \cos(2p\theta)}{\sqrt{\xi^2 - \gamma^2}} dt d\theta d\xi$$

の  $\xi$  についての積分を先に実行する：

$$\int_\gamma^\infty \frac{\xi^{2p+2t+1}}{\sqrt{\xi^2 - \gamma^2}} d\xi = \gamma^{2p+2t+1} \int_0^\infty (1+s^2)^{p+t} ds, \quad (s = \sqrt{\xi^2 - \gamma^2}/\gamma)$$

であるから， $2\{p + \text{Re}(t)\} < -1$  となるよう積分路  $C$  を変更すれば， $\gamma < \xi < \infty$  での積分が存在して，

$$\int_\gamma^\infty \frac{\xi^{2p+2t+1}}{\sqrt{\xi^2 - \gamma^2}} d\xi = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(-p-t-\frac{1}{2})}{2\Gamma(-p-t)} \times \gamma^{2p+2t+1}$$

を得る [12]．

次に， $\theta$  についての積分

$$\int_0^{\pi/2} \cos(2p\theta) \cos^{2p+2t+1} \theta d\theta$$

は  $2p + 2\text{Re}(t) + 1 > -1$  の場合に，

$$\int_0^{\pi/2} \cos(2p\theta) \cos^{2p+2t+1} \theta d\theta = \frac{\pi \Pi(2p+2t+2)}{2^{2p+2t+2} \Gamma(p+t+q+\frac{3}{2}) \Gamma(p+t-q+\frac{3}{2})}$$

となる．

以上より,  $-p-1 < \operatorname{Re}(t) < -p - \frac{1}{2}$  の場合に,

$$\begin{aligned} g_1(p, q) &= \frac{1}{\pi^2 j} \int_{C_1} \frac{\Gamma(-t)}{\Gamma(2p+t+2)} \times \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(-p-t-\frac{1}{2})}{2\Gamma(-p-t)} \times \gamma^{2p+2t+1} \\ &\quad \times \frac{\pi \Gamma(2p+2t+2)}{2^{2p+2t+2} \Gamma(p+t+q+\frac{3}{2}) \Gamma(p+t-q+\frac{3}{2})} dt \\ &= \frac{1}{4\sqrt{\pi} j} \int_{C_1} \frac{\Gamma(-t) \Gamma(-p-t-\frac{1}{2})}{\Gamma(-p-t)} \\ &\quad \times \frac{\Gamma(2p+2t+2) \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{2p+2t+1}}{\Gamma(2p+t+2) \Gamma(p+t+q+\frac{3}{2}) \Gamma(p+t-q+\frac{3}{2})} dt \end{aligned}$$

被積分関数は  $\operatorname{Re}(t) \rightarrow +\infty$  で指数関数的に 0 に減少するので ( $O(e^{-2t})$ ), 複素平面内で積分路  $C_1$  を右側に閉じることができる. このときの特異点は  $\Gamma(-t)$  および  $\Gamma(-p-t-\frac{1}{2})$  に起因する 1 位の極である.  $\Gamma(-t)$  は  $t = 0, 1, 2, 3, \dots$  に 1 位の極を持ち,  $\Gamma(-p-t-\frac{1}{2})$  は  $t = -p - \frac{1}{2}, -p + \frac{1}{2}, -p + \frac{3}{2}, \dots$  に 1 位の極を持つ. ところが,  $t = 0, 1, 2, 3, \dots$  の極は被積分関数の分母にある  $\Gamma(-p-t)$  の極と互いに打ち消しあう. したがって, 上式の積分は

$$t = -p + k - \frac{1}{2}, \quad (k = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

での留数の和で表される.  $\Gamma(-p-t-\frac{1}{2})$  の  $t = -p + k - \frac{1}{2}$  での留数は,

$$\operatorname{Res} [\Gamma(-k)] = \frac{(-1)^k}{k!}, \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

であるから,

$$\begin{aligned} g_1(p, q) &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \Gamma(p-k+\frac{1}{2})}{k! \Gamma(\frac{1}{2}-k)} \times \frac{\Gamma(2k+1) \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{2k}}{\Gamma(p+k+\frac{3}{2}) \Gamma(k+q+1) \Gamma(k-q+1)} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\Gamma(p-k+\frac{1}{2}) \Gamma(2k+1) \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{2k}}{\Gamma(\frac{1}{2}-k) \Gamma(p+k+\frac{3}{2}) \Gamma(k+q+1) \Gamma(k-q+1)} \end{aligned}$$

$k = 0, 1, 2, q-1$  の場合  $1/\Gamma(k-q+1) = 0$  であるから, 最終的に  $g_1(p, q)$  は,

$$g_1(p, q) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \sum_{k=q}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{\Gamma(p-k+\frac{1}{2}) \Gamma(2k+1) \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{2k}}{\Gamma(\frac{1}{2}-k) \Gamma(p+k+\frac{3}{2}) \Gamma(k+q+1) \Gamma(k-q+1)} \quad (\text{A.39})$$

となる.

同様にして,  $f_\ell^n$  は式 (A.26) より

$$f_\ell^n = \frac{\Gamma(\ell+\frac{1}{2}) \Gamma(n+\ell+\frac{1}{2})}{\sqrt{2} \Gamma(\ell+1) \Gamma(n+\ell+1)} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu \left(\frac{\gamma}{2}\right)^{n+2\ell+2\nu}}{\Gamma(\nu+1) \Gamma(\nu+n+2\ell+\frac{3}{2})} \quad (\text{A.40})$$

と得ることができる.

## A.8 平面波の円筒波による展開

Bessel 関数の母関数表示 [13]

$$\exp \left[ \frac{z}{2} \left( t - \frac{1}{t} \right) \right] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(z) t^n$$

において,  $t = je^{j\varphi}$  と置くと,

$$t - \frac{1}{t} = je^{j\varphi} + je^{-j\varphi} = 2j \cos \varphi$$

であるから,

$$\begin{aligned} \exp [jz \cos \varphi] &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} j^n J_n(z) e^{jn\varphi} \\ &= J_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \{ j^n J_n(z) e^{jn\varphi} + j^{-n} J_{-n}(z) e^{-jn\varphi} \} \\ &= J_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} \{ j^n J_n(z) e^{jn\varphi} + j^{-n} (-1)^n J_n(z) e^{-jn\varphi} \} \\ &= J_0(z) + \sum_{n=1}^{\infty} j^n J_z(z) \{ e^{jn\varphi} + e^{-jn\varphi} \} \\ &= J_0(z) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} j^n J_z(z) \cos n\varphi \end{aligned}$$

ここで,  $J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$  [14] を利用している. 結果として,

$$e^{ja \cos \varphi} = \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n j^n J_n(a) \cos n\varphi \quad (\text{A.41})$$

と表すことができる. ただし,

$$\epsilon_n = \begin{cases} 1 & (n = 0) \\ 2 & (n \neq 0) \end{cases}$$

である.

## A.9 関数 $S_m^n(r, z)$ の導関数

式 (2.21) より,

$$\frac{\partial}{\partial z} S_m^n(r, \pm 0) = \mp \frac{1}{a} \int_0^{\infty} \sqrt{\xi} J_n(r\xi/a) J_{n+2m+\frac{1}{2}}(\xi) d\xi$$

である．また，文献 [15] において， $\lambda = \frac{1}{2}, \mu = n, \nu = n + 2m + \frac{1}{2}, b = 1, a \rightarrow r/a = \sqrt{t}, \alpha = m + n + 1, \beta = m + 1$  と置くと，

$$\frac{\partial}{\partial z} S_m^n(r, \pm 0) = \mp \frac{1}{a} \frac{\sqrt{2} t^{n/2} \Gamma(m + n + 1)}{\Gamma(n + 1) \Gamma(m + \frac{1}{2})} F(m + n + 1, -m + \frac{1}{2}, n + 1; t)$$

となる．さらに，文献 [16]

$$F(\alpha, \beta, \gamma; z) = (1 - z)^{\gamma - \alpha - \beta} F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma; z)$$

において，

$$\alpha = m + n + 1, \beta = \frac{1}{2} - m, \gamma = n + 1, z = t$$

と置くと，

$$\frac{\partial}{\partial z} S_m^n(r, \pm 0) = \mp \frac{1}{a} \frac{\sqrt{2} t^{n/2} \Gamma(m + n + 1)}{\Gamma(n + 1) \Gamma(m + \frac{1}{2})} \times (1 - t)^{-\frac{1}{2}} F(-m, n + m + \frac{1}{2}, n + 1; t) \quad (\text{A.42})$$

となる．この中の超幾何級数を級数展開すると [17]，

$$\begin{aligned} & F(-m, n + m + \frac{1}{2}, n + 1; t) \\ &= \Gamma(m + 1) \Gamma(\frac{1}{2} - n - m) \Gamma(n + 1) \times \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{t^{\nu}}{\nu! \Gamma(m - \nu + 1) \Gamma(\frac{1}{2} - n - m - \nu) \Gamma(n + \nu + 1)} \\ &= \Gamma(m + 1) \Gamma(\frac{1}{2} - n - m) \Gamma(n + 1) \times \sum_{\nu=0}^m \frac{t^{\nu}}{\nu! \Gamma(m - \nu + 1) \Gamma(\frac{1}{2} - n - m - \nu) \Gamma(n + \nu + 1)} \\ &= \frac{\Gamma(m + 1) \Gamma(n + 1)}{\Gamma(\frac{1}{2} + n + m)} \times \sum_{\nu=0}^m \frac{(-1)^{\nu} \Gamma(\frac{1}{2} + n + m + \nu) t^{\nu}}{\nu! \Gamma(m - \nu + 1) \Gamma(n + \nu + 1)} \\ &= 1 - \frac{m(n + m + \frac{1}{2})}{1 \cdot (n + 1)} \times t \\ &\quad + \frac{m(m - 1)(n + m + \frac{1}{2})(n + m + \frac{3}{2})}{2! (n + 1)(n + 2)} \times t^2 \\ &\quad + \cdots + \frac{(-1)^m \Gamma(n + 2m + \frac{1}{2}) \Gamma(n + 1)}{m! \Gamma(n + m + \frac{1}{2}) \Gamma(n + m + 1)} \times t^m \end{aligned}$$

次に，式 (A.42) の  $r = a$  近傍での振舞を調べる．文献 [17]

$$F(\alpha, \beta, \gamma; 1) = \frac{\Gamma(\gamma) \Gamma(\gamma - \alpha - \beta)}{\Gamma(\gamma - \alpha) \Gamma(\gamma - \beta)}$$

より, 式 (A.42) のエッジ  $t = 1$  付近での値は,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial z} S_m^n(r, 0) &= \mp \frac{1}{a} \frac{\sqrt{2}\Gamma(m+n+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(m+\frac{1}{2})} \times \frac{(1-t)^{-\frac{1}{2}}\Gamma(n+1)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(n+m+1)\Gamma(\frac{1}{2}-m)} \\
 &= \mp \frac{1}{a} \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(\frac{1}{2}+m)\Gamma(\frac{1}{2}-m)} (1-t)^{-\frac{1}{2}} \\
 &= \mp \frac{1}{a} \sqrt{\frac{2}{\pi}} (-1)^m (1-t)^{-\frac{1}{2}} \\
 &= \mp \frac{(-1)^m}{\sqrt{\pi a}} \delta^{-\frac{1}{2}}, \quad (\delta \rightarrow 0)
 \end{aligned} \tag{A.43}$$

である. ただし,

$$\delta = a - r$$

である.

## A.10 関数 $S_m^n(r, z)$ の漸近展開

$$z = R \cos \theta$$

$$r = R \sin \theta$$

$$R = \sqrt{r^2 + z^2}$$

が非常に大きい場合 (遠方) について,  $S_m^n$  を近似する. ( $R \gg 1$ )

$$J_n(r\xi/a) = \frac{1}{2} \{H_n^{(1)}(r\xi/a) + H_n^{(2)}(r\xi/a)\}$$

[文献 [14]] を用い, 積分を 2 つに分ける. ここで,  $H_n^{(1,2)}(z)$  は  $n$  次の第 1 種, および第 2 種の Hankel 関数を表す.

$$\begin{aligned}
 S_m^n(r, z) &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\sqrt{\xi} J_{n+2m+\frac{1}{2}}(\xi)}{\sqrt{\xi^2 - \gamma^2}} H_n^{(1)}(r\xi/a) e^{-|z|/a\sqrt{\xi^2 - \gamma^2}} d\xi \\
 &\quad + \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\sqrt{\xi} J_{n+2m+\frac{1}{2}}(\xi)}{\sqrt{\xi^2 - \gamma^2}} H_n^{(2)}(r\xi/a) e^{-|z|/a\sqrt{\xi^2 - \gamma^2}} d\xi
 \end{aligned}$$

第 1 項を  $\xi = e^{\pi j} u = -u$  と変数変換する. このとき,

$$\begin{aligned}
 \sqrt{\xi} J_{n+2m+\frac{1}{2}}(\xi) &= (-1)^{n+2m+1} \sqrt{u} J_{n+2m+\frac{1}{2}}(u) \\
 \sqrt{\xi^2 - \gamma^2} &= \sqrt{u^2 - \gamma^2} \\
 H_n^{(1)}(\xi) &= -(-1)^n H_n^{(2)}(u)
 \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \frac{\sqrt{\xi} J_{n+2m+\frac{1}{2}}(\xi)}{\sqrt{\xi^2 - \gamma^2}} H_n^{(1)}(r\xi/a) e^{-|z|/a \sqrt{\xi^2 - \gamma^2}} d\xi \\ &= \int_{-\infty}^0 \frac{\sqrt{u} J_{n+2m+\frac{1}{2}}(u)}{\sqrt{u^2 - \gamma^2}} H_n^{(2)}(ru/a) e^{-|z|/a \sqrt{u^2 - \gamma^2}} du \end{aligned}$$

と変形できる．したがって,  $S_m^n(r, z)$  は,

$$S_m^n(r, z) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{\sqrt{\xi} J_{n+2m+\frac{1}{2}}(\xi)}{\sqrt{\xi^2 - \gamma^2}} H_n^{(2)}(r\xi/a) e^{-|z|/a \sqrt{\xi^2 - \gamma^2}} d\xi$$

と変形できる．ただし,  $\sqrt{\xi^2 - \gamma^2}$  により生じる分岐点  $\xi = \pm\gamma$ , および,  $H_n^{(2)}(r\xi/a)$  に起因する分岐点  $\xi = 0$  を図のように回避する．

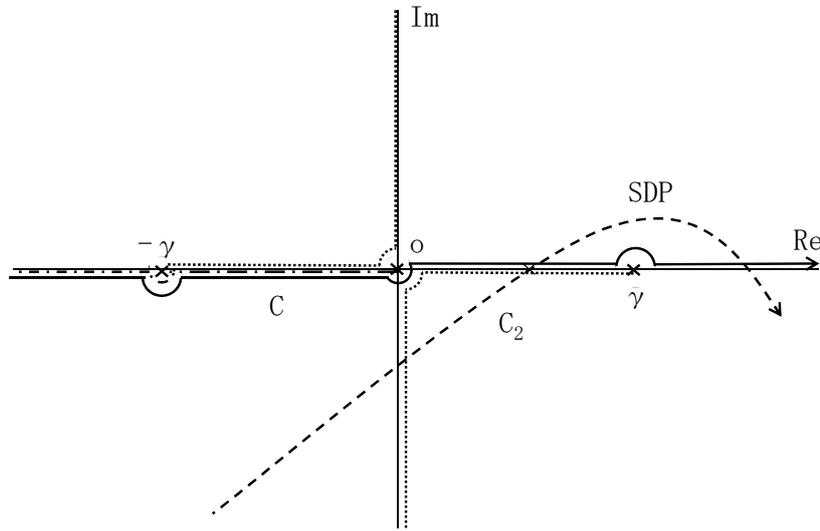


図 A.1: 積分路

$R \gg 1$  の場合, Hankel 関数の漸近展開

$$H_n^{(2)}(z) \simeq \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{-j(z - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4})}, \quad (z \gg 1)$$

を利用すると,

$$\begin{aligned} S_m^n(R \sin \theta, R \cos \theta) &\simeq j^n \sqrt{\frac{aj}{2\pi R \sin \theta}} \int_{-\infty}^\infty \frac{J_{n+2m+\frac{1}{2}}(\xi)}{\sqrt{\xi^2 - \gamma^2}} \\ &\quad \times \exp \left[ -j \frac{R}{a} \left\{ \xi \sin \theta - j |\cos \theta| \sqrt{\xi^2 - \gamma^2} \right\} \right] d\xi \end{aligned}$$

ここで, 積分路を最急降下路  $C_2$  に変更し, 積分を停留点近傍で近似する．

$$g(\xi) = \xi \sin \theta - j \sqrt{\xi^2 - \gamma^2} |\cos \theta|$$

と置き,  $g'(\xi) = 0$  より停留点を求める:

$$g'(\xi) = \sin \theta - j \frac{\xi |\cos \theta|}{\sqrt{\xi^2 - \gamma^2}} = 0$$

であるから, 停留点は

$$\xi = \gamma \sin \theta$$

であり,

$$g(\gamma \sin \theta) = \gamma \tag{A.44}$$

$$\begin{aligned} g''(\gamma \sin \theta) &= j \frac{\gamma^2 |\cos \theta|}{(\sqrt{\xi^2 - \gamma^2})^3} \Big|_{\xi=\gamma \sin \theta} \\ &= -\frac{1}{\gamma \cos^2 \theta} \end{aligned} \tag{A.45}$$

である. したがって, 停留値法により, 式 (A.44), (A.45) を利用して, 積分を  $R$  について漸近展開することにより,  $S_m^n$  は,

$$\begin{aligned} S_m^n(R \sin \theta, R \cos \theta) &\simeq j^n \sqrt{\frac{aj}{2\pi R \sin \theta}} \frac{J_{n+2m+\frac{1}{2}}(\gamma \sin \theta)}{j\gamma |\cos \theta|} \times \sqrt{\frac{2\pi ja\gamma \cos^2 \theta}{R}} e^{-j\frac{R}{a}\gamma} \\ &= j^n \sqrt{\frac{2}{\pi}} a j_{n+2m}(\gamma \sin \theta) \frac{e^{-jkR}}{R}, \quad (kR \gg 1) \end{aligned} \tag{A.46}$$

と近似できる. この変形には  $\gamma = ka$  を利用している. また,  $j_n(z)$  は球 Bessel 関数

$$j_n(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} J_{n+\frac{1}{2}}(z)$$

を表わす.

## A.11 ヘルツベクトルを用いた極座標系の電磁界

まず, 回転の極座標表現を用い, さらに  $kR \gg 1$  であることを利用すると,  $(\nabla \times \mathbf{\Pi})_\theta$  は,

$$\begin{aligned} (\nabla \times \mathbf{\Pi})_\theta &= \frac{1}{R} \left( \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \Pi_R}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial R} (R \Pi_\varphi) \right) \\ &\simeq -\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} (R \Pi_\varphi) \end{aligned} \tag{A.47}$$

となる. また, 式 (A.47) 内の  $\Pi_\varphi$  は式 (2.124), (2.125) を使って

$$\begin{aligned} \Pi_\varphi &= -\sin \varphi \Pi_x + \cos \varphi \Pi_y \\ &\simeq -\sin \varphi \sqrt{\frac{2}{\pi}} a \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_n j^n j_{n+2m}(\gamma \sin \theta) \{A_m^n \cos n\varphi + B_m^n \sin n\varphi\} \frac{e^{-jkR}}{R} \\ &\quad + \cos \varphi \sqrt{\frac{2}{\pi}} a \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_n j^n j_{n+2m}(\gamma \sin \theta) \{C_m^n \cos n\varphi + D_m^n \sin n\varphi\} \frac{e^{-jkR}}{R} \end{aligned} \tag{A.48}$$

と表現できる．すると， $\frac{\partial}{\partial R}(R\Pi_\varphi)$  は，

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial R}(R\Pi_\varphi) &= \partial \left\{ -\sin \varphi \sqrt{\frac{2}{\pi}} a \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_n j^n j_{n+2m}(\gamma \sin \theta) \{A_m^n \cos n\varphi + B_m^n \sin n\varphi\} e^{-jkR} \right. \\
 &\quad \left. + \cos \varphi \sqrt{\frac{2}{\pi}} a \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_n j^n j_{n+2m}(\gamma \sin \theta) \{C_m^n \cos n\varphi + D_m^n \sin n\varphi\} e^{-jkR} \right\} / \partial R \\
 &= -jk \left\{ -\sin \varphi \sqrt{\frac{2}{\pi}} a \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_n j^n j_{n+2m}(\gamma \sin \theta) \{A_m^n \cos n\varphi + B_m^n \sin n\varphi\} e^{-jkR} \right. \\
 &\quad \left. + \cos \varphi \sqrt{\frac{2}{\pi}} a \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_n j^n j_{n+2m}(\gamma \sin \theta) \{C_m^n \cos n\varphi + D_m^n \sin n\varphi\} e^{-jkR} \right\} \\
 &\hspace{20em} (A.49)
 \end{aligned}$$

となる．したがって， $-\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R}(R\Pi_\varphi)$  は，

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R}(R\Pi_\varphi) &= -jk \left\{ -\sin \varphi \sqrt{\frac{2}{\pi}} a \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_n j^n j_{n+2m}(\gamma \sin \theta) \{A_m^n \cos n\varphi + B_m^n \sin n\varphi\} \frac{e^{-jkR}}{R} \right. \\
 &\quad \left. + \cos \varphi \sqrt{\frac{2}{\pi}} a \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_n j^n j_{n+2m}(\gamma \sin \theta) \{C_m^n \cos n\varphi + D_m^n \sin n\varphi\} \frac{e^{-jkR}}{R} \right\} \\
 &= jk\Pi_\varphi \\
 &\hspace{20em} (A.50)
 \end{aligned}$$

となる．結果として，式(2.7)より，円筒座標系の磁界  $H_\theta$  は，

$$H_\theta = j \frac{k}{\eta} jk\Pi_\varphi = -\frac{k^2}{\eta} \Pi_\varphi \hspace{15em} (A.51)$$

となる．

同様にして， $(\nabla \times \mathbf{\Pi})_\varphi$  は

$$\begin{aligned}
 (\nabla \times \mathbf{\Pi})_\varphi &= \frac{1}{R} \left( \frac{\partial}{\partial R}(R\Pi_\theta) - \frac{\partial \Pi_R}{\partial \theta} \right) \\
 &\simeq -\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R}(R\Pi_\theta) \\
 &\hspace{20em} (A.52)
 \end{aligned}$$

と書くことができる．また，

$$\Pi_\theta = \cos \theta \Pi_R$$

であるから，

$$\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R}(R\Pi_\theta) = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R}(R \cos \theta \Pi_R) \hspace{15em} (A.53)$$

である．さらに， $\Pi_R$  は式(2.124)，(2.125)を使って

$$\begin{aligned}
 \Pi_R &= \cos \varphi \Pi_x + \sin \varphi \Pi_y \\
 &\simeq \cos \varphi \sqrt{\frac{2}{\pi}} a \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_n j^n j_{n+2m}(\gamma \sin \theta) \{A_m^n \cos n\varphi + B_m^n \sin n\varphi\} \frac{e^{-jkR}}{R} \\
 &\quad + \sin \varphi \sqrt{\frac{2}{\pi}} a \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_n j^n j_{n+2m}(\gamma \sin \theta) \{C_m^n \cos n\varphi + D_m^n \sin n\varphi\} \frac{e^{-jkR}}{R} \hspace{2em} (A.54)
 \end{aligned}$$

と表現できる．すると， $\frac{\partial}{\partial R}(R \cos \theta \Pi_R)$  は，

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial R}(R \cos \theta \Pi_R) &= \cos \theta \left[ \partial \left\{ \cos \varphi \sqrt{\frac{2}{\pi}} a \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_n j^n j_{n+2m}(\gamma \sin \theta) \right. \right. \\
 &\quad \times \{A_m^n \cos n\varphi + B_m^n \sin n\varphi\} e^{-jkR} \\
 &\quad \left. \left. + \sin \varphi \sqrt{\frac{2}{\pi}} a \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_n j^n j_{n+2m}(\gamma \sin \theta) \right. \right. \\
 &\quad \times \{C_m^n \cos n\varphi + D_m^n \sin n\varphi\} e^{-jkR} \left. \right] / \partial R \\
 &= \cos \theta \left[ -jk \left\{ \cos \varphi \sqrt{\frac{2}{\pi}} a \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_n j^n j_{n+2m}(\gamma \sin \theta) \right. \right. \\
 &\quad \times \{A_m^n \cos n\varphi + B_m^n \sin n\varphi\} e^{-jkR} \\
 &\quad \left. \left. + \cos \varphi \sqrt{\frac{2}{\pi}} a \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_n j^n j_{n+2m}(\gamma \sin \theta) \right. \right. \\
 &\quad \times \{C_m^n \cos n\varphi + D_m^n \sin n\varphi\} e^{-jkR} \left. \right]
 \end{aligned} \tag{A.55}$$

となる．したがって， $-\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R}(R \cos \theta \Pi_R)$  は，

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R}(R \Pi_\varphi) &= -jk \left\{ \cos \varphi \sqrt{\frac{2}{\pi}} a \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_n j^n j_{n+2m}(\gamma \sin \theta) \{A_m^n \cos n\varphi + B_m^n \sin n\varphi\} \frac{e^{-jkR}}{R} \right. \\
 &\quad \left. + \sin \varphi \sqrt{\frac{2}{\pi}} a \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_n j^n j_{n+2m}(\gamma \sin \theta) \{C_m^n \cos n\varphi + D_m^n \sin n\varphi\} \frac{e^{-jkR}}{R} \right\} \\
 &= -jk \cos \theta \Pi_R \\
 &= -jk \Pi_\theta
 \end{aligned} \tag{A.56}$$

となる．結果として，式(2.7)より，円筒座標系の磁界  $H_\varphi$  は，

$$H_\varphi = -j \frac{k}{\eta} j k \Pi_\theta = \frac{k^2}{\eta} \Pi_\theta \tag{A.57}$$

となる．

## A.12 水平微小ダイポール波源における入射界の展開

まず式(3.13)の  $e^{-jkR}/R$  を展開する．Bessel 関数の積分

$$\frac{e^{-j\sqrt{r^2+h^2}}}{\sqrt{r^2+h^2}} = \int_0^\infty \frac{e^{-a\sqrt{x^2+y^2}}}{\sqrt{x^2+y^2}} x J_0(bx) dx, \tag{A.58}$$

に対して

$$y \rightarrow jka = j\gamma, \quad a \rightarrow \frac{h}{a}, \quad b \rightarrow \frac{r}{a}, \quad x \rightarrow \frac{\xi}{a},$$

と置き,

$$\frac{e^{-jk\sqrt{r^2+h^2}}}{\sqrt{r^2+h^2}} = \frac{1}{a} \int_0^\infty \frac{\xi e^{-(h/a)\sqrt{\xi^2-\gamma^2}}}{\sqrt{\xi^2-\gamma^2}} J_0(\xi r/a) d\xi \quad (\text{A.59})$$

となる．ただし，媒質の損失を考慮して， $\sqrt{\xi^2-\gamma^2} = j\sqrt{\gamma^2-\xi^2}$  とする．ここで，さらにこれを円筒座標系で表現するため，

$$\begin{aligned} r &\rightarrow \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \\ &= \sqrt{r^2 - 2rr_0 \cos(\varphi - \varphi_0) + r_0^2}, \end{aligned} \quad (\text{A.60})$$

と置き換えると ( $r_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ ,  $\varphi_0 = \tan^{-1} \frac{x_0}{y_0}$ )，式 (A.59) は，

$$\begin{aligned} &\frac{e^{-jk\sqrt{r^2-2rr_0 \cos(\varphi-\varphi_0)+r_0^2+z_0^2}}}{\sqrt{r^2-2rr_0 \cos(\varphi-\varphi_0)+r_0^2+z_0^2}} \\ &= \frac{1}{a} \int_0^\infty \frac{\xi e^{-(z_0/a)\sqrt{\xi^2-\gamma^2}}}{\sqrt{\xi^2-\gamma^2}} J_0\left(\frac{\xi}{a}\sqrt{r^2-2rr_0 \cos(\varphi-\varphi_0)+r_0^2}\right) d\xi, \end{aligned} \quad (\text{A.61})$$

となる．この式の  $J_0$  は，

$$\begin{aligned} &J_0\left(\frac{\xi}{a}\sqrt{r^2-2rr_0 \cos(\varphi-\varphi_0)+r_0^2}\right) \\ &= J_0(\xi r/a)J_0(\xi r_0/a) + 2 \sum_{n=1}^\infty J_n(\xi r/a)J_n(\xi r_0/a) \cos n(\varphi - \varphi_0) \\ &= \sum_{n=0}^\infty \epsilon_n J_n(\xi r/a)J_n(\xi r_0/a) \cos n(\varphi - \varphi_0) \end{aligned} \quad (\text{A.62})$$

と展開できることから [18]，結果として  $e^{-jkR}/R$  は，

$$\begin{aligned} \frac{e^{-jkR}}{R} &= \frac{e^{-jk\sqrt{r^2-2rr_0 \cos(\varphi-\varphi_0)+r_0^2+z_0^2}}}{\sqrt{r^2-2rr_0 \cos(\varphi-\varphi_0)+r_0^2+z_0^2}} \\ &= \frac{1}{a} \sum_{n=0}^\infty \epsilon_n \cos n(\varphi - \varphi_0) \int_0^\infty \frac{\xi e^{-(z_0/a)\sqrt{\xi^2-\gamma^2}}}{\sqrt{\xi^2-\gamma^2}} J_n(\xi r/a)J_n(\xi r_0/a) d\xi \\ &= \frac{1}{a} \sum_{n=0}^\infty \epsilon_n \cos n(\varphi - \varphi_0) \int_0^\infty \frac{\xi e^{-h\sqrt{\xi^2-\gamma^2}}}{\sqrt{\xi^2-\gamma^2}} J_n(\xi\sqrt{t})J_n(\xi\sqrt{t_0}) d\xi, \end{aligned} \quad (\text{A.63})$$

となる．ここで， $h, t_0, t$  は

$$h = \frac{z_0}{a}, \quad t_0 = \frac{r_0^2}{a^2}, \quad t = \frac{r^2}{a^2},$$

と整理して表現している．よってダイポールの入射界は，

$$\Pi^{(i)} = \frac{1}{a} \Pi_0^{(i)} \sum_{n=1}^\infty \epsilon_n \cos n(\varphi - \varphi_0) \int_0^\infty \frac{\xi e^{-h\sqrt{\xi^2-\gamma^2}}}{\sqrt{\xi^2-\gamma^2}} J_n(\xi\sqrt{t})J_n(\xi\sqrt{t_0}) d\xi, \quad (\text{A.64})$$

と表される．

### A.13 スカラ関数 $U(r, \varphi)$ の導出

$U$  を式 (4.25) のフーリエ級数展開すると, 式 (4.24) を円筒座標系での表現は,

$$\frac{\partial^2 U_n}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U_n}{\partial r} + (k^2 - \frac{n^2}{r^2}) U_n = -\frac{\partial \Pi_z^{(i)}}{\partial z} + \begin{cases} C, & (n=0) \\ 0, & (n \neq 0) \end{cases} \quad (\text{A.65})$$

となり, この式は非斉次の二階線形微分方程式であり, その解は,

$$U_n(r) = A_n J_n(kr) + B_n H_n^{(2)}(kr) + \frac{\pi}{2} j k^2 \left\{ H_n^{(2)}(kr) \int r J_n(kr) g_n(r) dr - J_n(kr) \int r H_n^{(2)}(kr) g_n(r) dr \right\} \quad (\text{A.66})$$

と表される. ただし,

$$g_n(r) = -\frac{1}{k^2} \frac{\partial \Pi_z^{(i)}}{\partial z} + \begin{cases} C/k^2, & (n=0) \\ 0, & (n \neq 0) \end{cases} \quad (\text{A.67})$$

である. また, 不定積分の積分定数は第 1 項および第 2 項の定数  $A_n, B_n$  に含めることができる. 式 (A.67) に式 (4.19) を入れて解くと,

$$g_n(r) = \frac{\Pi_0}{a^2} \int_0^\infty \xi e^{-h\sqrt{\xi^2 - \gamma^2}} J_n(\xi\sqrt{t}) J_n(\xi\sqrt{t_0}) d\xi + C\delta_{n,0} \quad (\text{A.68})$$

となる. ここで

$$\begin{aligned} & \int r J_n(kr) J_n\left(\frac{\xi}{a} r\right) dr \\ &= \frac{\gamma}{k(\gamma^2 - \xi^2)} kr \left\{ \gamma J_{n+1}(kr) J_n\left(\frac{\xi}{\gamma} kr\right) - \xi J_n(kr) J_{n+1}\left(\frac{\xi}{\gamma} kr\right) \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.69})$$

$$\begin{aligned} & \int r H_n^{(2)}(kr) J_n\left(\frac{\xi}{a} r\right) dr \\ &= \frac{\gamma}{k(\gamma^2 - \xi^2)} kr \left\{ \gamma H_{n+1}^{(2)}(kr) J_n\left(\frac{\xi}{\gamma} kr\right) - \xi H_n^{(2)}(kr) J_{n+1}\left(\frac{\xi}{\gamma} kr\right) \right\} \end{aligned} \quad (\text{A.70})$$

$$\int r J_0(kr) dr = \frac{r}{k} J_1(kr) \quad (\text{A.71})$$

$$\int r H_0^{(2)}(kr) dr = \frac{r}{k} H_1^{(2)}(kr) \quad (\text{A.72})$$

より,

$$\begin{aligned} U_n(r) &= A_n J_n(kr) + B_n H_n^{(2)}(kr) \\ &+ \frac{\pi}{2} \frac{j \Pi_0}{a^2} \gamma^2 kr \\ &\times \int_0^\infty \frac{\xi e^{-h\sqrt{\xi^2 - \gamma^2}}}{\xi^2 - \gamma^2} \left\{ H_n^{(2)}(kr) J_{n+1}(kr) - J_n(kr) H_{n+1}^{(2)}(kr) \right\} J_{n+1}\left(\frac{\xi}{\gamma} kr\right) J_n(\xi\sqrt{t_0}) d\xi \\ &+ \frac{\pi}{2} j kr \left\{ H_0^{(2)}(kr) J_1(kr) - J_0(kr) H_1^{(2)}(kr) \right\} C\delta_{n,0} \\ &= A_n J_n(kr) + B_n H_n^{(2)}(kr) + k \Pi_0 \int_0^\infty \frac{\xi e^{-h\sqrt{\xi^2 - \gamma^2}}}{\xi^2 - \gamma^2} J_n(\xi\sqrt{t}) J_n(\xi\sqrt{t_0}) d\xi + C\delta_{n,0} \end{aligned} \quad (\text{A.73})$$

である．したがって，

$$\frac{\partial^2 U_n}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U_n}{\partial r} + (k^2 - \frac{n^2}{r^2}) U_n = -\frac{\Pi_0}{a} \int_0^\infty \xi e^{-h\sqrt{\xi^2 - \gamma^2}} J_n(\xi\sqrt{t}) J_n(\xi\sqrt{t_0}) d\xi \quad (\text{A.74})$$

$$U_n(r) = A_n J_n(kr) + a\Pi_0 \int_0^\infty \frac{\xi e^{-\frac{z}{a}\sqrt{\xi^2 - \gamma^2}}}{\xi^2 - \gamma^2} J_n(\xi\sqrt{t}) J_n(\xi\sqrt{t_0}) d\xi \quad (\text{A.75})$$

となる．

## A.14 垂直微小ダイポールにおける端点条件による展開係数の計算

垂直微小ダイポールに対する散乱界のヘルツベクトルは，

$$\Pi_x^{(s)} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_n S_m^n(r, z) P_{x_m}^n \cos n\varphi \quad (\text{A.76})$$

$$\Pi_y^{(s)} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_n S_m^n(r, z) P_{y_m}^n \sin n\varphi \quad (\text{A.77})$$

と表すことができる．また，磁界のヘルツベクトルによる表示

$$\mathbf{H} = j\omega\epsilon\nabla \times \mathbf{\Pi} \quad (\text{A.78})$$

より，磁界の  $x, y$  成分は，

$$\begin{aligned} H_x^{(s)} &= -j\omega\epsilon \frac{\partial \Pi_y}{\partial z} \\ &= -j\omega\epsilon \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_n \frac{\partial S_m^n(r, z)}{\partial z} P_{y_m}^n \sin n\varphi \end{aligned} \quad (\text{A.79})$$

$$\begin{aligned} H_y^{(s)} &= -j\omega\epsilon \frac{\partial \Pi_x}{\partial z} \\ &= -j\omega\epsilon \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_n \frac{\partial S_m^n(r, z)}{\partial z} P_{x_m}^n \cos n\varphi \end{aligned} \quad (\text{A.80})$$

である．また，磁界の  $\varphi$  成分は，

$$\begin{aligned} H_\varphi &= -H_x \sin \varphi + H_y \cos \varphi \\ &= j\omega\epsilon \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_n \frac{\partial S_m^n(r, z)}{\partial z} \{P_{y_m}^n \sin n\varphi \sin \varphi + P_{x_m}^n \cos n\varphi \cos \varphi\} \\ &= \frac{j\omega\epsilon}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_n \frac{\partial S_m^n(r, z)}{\partial z} \{P_{x_m}^n (\cos(n+1)\varphi + \cos(n-1)\varphi) \\ &\quad - P_{y_m}^n (\cos(n+1)\varphi - \cos(n-1)\varphi)\} \\ &= \frac{j\omega\epsilon}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_n \frac{\partial S_m^n(r, z)}{\partial z} \{(P_{x_m}^n + P_{y_m}^n) \cos(n-1)\varphi + (P_{x_m}^n - P_{y_m}^n) \cos(n+1)\varphi\} \end{aligned} \quad (\text{A.81})$$

と表すことができる．ただし， $P_{y_m}^0 = 0$  である．ここで，円板の端部近傍 ( $z = \pm 0$ ,  $r = a - \delta$  ( $0 < \delta \ll a$ )) では，付録式 (A.43) より，

$$\frac{\partial S_m^n(r, z)}{\partial z} \simeq \mp \frac{(-1)^m}{\sqrt{\pi a}} \delta^{-\frac{1}{2}}, \quad (\delta = a - r \rightarrow 0, z = \pm 0) \quad (\text{A.82})$$

であるから，端点条件

$$H_\varphi|_{\rho \rightarrow 0} = 0 \quad (\text{A.83})$$

を満足するには，

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_n \{ (P_{x_m}^n + P_{y_m}^n) \cos(n-1)\varphi + (P_{x_m}^n - P_{y_m}^n) \cos(n+1)\varphi \} = 0 \\ & \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_n [ P_{x_m}^0 \cos \varphi + \{ (P_{x_m}^1 + P_{y_m}^1) + (P_{x_m}^1 - P_{y_m}^1) \cos 2\varphi \} \\ & \quad + \{ (P_{x_m}^2 + P_{y_m}^2) \cos \varphi + (P_{x_m}^2 - P_{y_m}^2) \cos 3\varphi \} + \dots \\ & \quad + \{ (P_{x_m}^n + P_{y_m}^n) \cos(n-1)\varphi + (P_{x_m}^n - P_{y_m}^n) \cos(n+1)\varphi \} + \dots ] = 0 \\ & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_n [ (P_{x_m}^1 + P_{y_m}^1) + \{ P_{x_m}^0 + (P_{x_m}^1 - P_{y_m}^1) \} \cos \varphi \\ & \quad + (P_{x_m}^1 + P_{y_m}^1) + \{ P_{x_m}^3 - P_{y_m}^3 \} \cos 2\varphi + \dots ] = 0 \\ & \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon_n \sum_{m=0}^{\infty} [ (P_{x_m}^{n-1} - P_{y_m}^{n-1}) + (P_{x_m}^{n+1} + P_{y_m}^{n+1}) \} \cos n\varphi ] = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.84})$$

とならなければならない．ただし， $P_{y_m}^0 = 0$ ,  $P_{x_m}^{-1} = P_{x_m}^1$ ,  $P_{y_m}^{-1} = -P_{y_m}^1$  とする．これから，

$$\sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \{ P_{x_m}^{n-1} + P_{x_m}^{n+1} - P_{y_m}^{n-1} + P_{y_m}^{n+1} \} = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (\text{A.85})$$

を得る．

## 参考文献

- [1] 森口繁一，宇田川銑久，一松信，岩波数学公式 III，p.159，岩波書店，1960.
- [2] 文献 [1] の p.193.
- [3] 文献 [1] の p.95.
- [4] 森口繁一，宇田川銑久，一松信，岩波数学公式 II，p.258，岩波書店，1960.
- [5] 文献 [1] の p.145.
- [6] 森口繁一，宇田川銑久，一松信，岩波数学公式 I，p.220，岩波書店，1960.
- [7] 文献 [1] の p.181.
- [8] 文献 [4] の p.145.
- [9] 文献 [4] の p.220.
- [10] 文献 [6] の p.244.
- [11] Y. Nomura, and S. Katsura, “Diffraction of electromagnetic waves by circular plate and circular hole,” J. Physical Society of Japan, vol.10, no.4, pp.285-304, Apr 1955.
- [12] 文献 [6] の p.223.
- [13] 文献 [1] の p.149.
- [14] 文献 [1] の p.146.
- [15] 文献 [1] の p.193.
- [16] 文献 [1] の p.59.
- [17] 文献 [1] の p.58.
- [18] 文献 [1] の p.218.

# 文献目録（著者発表分）

## 1. 論文（査読あり）

- (1) Takashi Kuroki, Toshihiko Shibazaki and Teruhiro Kinoshita, "Calculation of current distribution of diffracted field by a conductive circular disk using multiple precision arithmetic," The Transactions of the Institute of Electrical Engineers of Japan, FM, Vol.129, No.10, pp.687-692, 2009.
- (2) Takashi Kuroki, Toshihiko Shibazaki and Teruhiro Kinoshita, "Current distribution on a conductive circular disk induced by dipole source located at arbitrary position," The Transactions on the Institute of Electronics, Information and Communication Engineers, Vol. E96-C, No.1, pp.3-10, Jan. 2013.
- (3) 黒木啓之, 柴崎年彦, 木下照弘, "垂直方向に偏波した電氣的微小ダイポールを波源とする導体円板による散乱電磁界の解析," 電子情報通信学会論文誌, Vol.J96-C, No.10, pp.255-264, Oct. 2013.

## 2. Proceedings（査読あり）

- (1) Takashi Kuroki, Toshihiko Shibazaki and Teruhiro Kinoshita, "Calculation technique of diffracted electromagnetic waves by a circular disk of perfect conductor using multiple precision arithmetic," Proceedings of PIERS 2008 in Cambridge, pp.603-609, 2008.
- (2) Takashi Kuroki, Toshihiko Shibazaki and Teruhiro Kinoshita, "Numerical calculation of diffracted field by a circular disk of perfect conductor using multiple precision arithmetic," Proceedings of PIERS 2009 in Moscow, pp.127-132,2009.

## 3. 国際会議（査読あり）

- (1) Takashi Kuroki, Toshihiko Shibazaki and Teruhiro Kinoshita, "Calculation technique of diffracted electromagnetic waves by a circular disk of perfect conductor using multiple precision arithmetic," PIERS 2008, pp.471-472, July 2-6, Cambridge, USA 2008.

- 
- (2) Takashi Kuroki, Toshihiko Shibazaki and Teruhiro Kinoshita, "Numerical calculation of diffracted field by a circular disk of perfect conductor using multiple precision arithmetic," PIERS 2009, pp.73-74, August 18-21, Moscow, Russia 2009.
  - (3) Takashi Kuroki, Toshihiko Shibazaki and Teruhiro Kinoshita, "Analysis of diffracted field from a circular disk of perfect conductor for a offset dipole source," Korea-Japan Joint Conference 2012, pp.129-132, May 18-19, Seoul, Korea 2012.

#### 4. 研究紀要

- (1) 黒木啓之, 柴崎年彦, 木下照弘, "完全導体円板による散乱電磁波の多倍長計算," 平成 19 年都立産技高専紀要, pp.31-36, 2008.3.
- (2) 黒木啓之, 澤田清仁, 椛沢栄基, 柴崎年彦, 木下照弘, "FDTD 法と多倍長精度計算法による完全導体円板の電流分布計算," 平成 20 年都立産技高専紀要, pp.29-36, 2009.3.

#### 5. 学術発表

- (1) 黒木啓之, 木下照弘, 柴崎年彦, 松田勲, "計算精度を考慮した完全導体円板による散乱電磁波の数値解析," 電気学会, 第 36 回電磁界理論シンポジウム講演論文集, pp.85-90, 2007.10.
- (2) 黒木啓之, 柴崎年彦, 澤田清仁, 木下照弘, "導体円板による散乱電磁界の数値計算," 数理科学学会, 第 27 回数理学講演会論文集, B202, pp.59-60, 2008.8.
- (3) 澤田清仁, 黒木啓之, 柴崎年彦, 木下照弘, "FDTD 法による散乱導体の電流分布計算," 数理科学学会, 第 27 回数理学講演会論文集, B204, pp.63-64, 2008.8.
- (4) 黒木啓之, 澤田清仁, 椛沢栄基, 柴崎年彦, 木下照弘, "多倍長計算法を用いた導体円板による散乱界の電流分布計算," 電気学会, 第 37 回電磁界理論シンポジウム講演論文集, pp.47-52, 2008.11.
- (5) 澤田清仁, 黒木啓之, 椛沢栄基, 柴崎年彦, 木下照弘, "FDTD 法を用いた導体円板による散乱界の電流分布計算," 電気学会, 第 37 回電磁界理論シンポジウム講演論文集, pp.53-58, 2008.11.
- (6) 黒木啓之, 椛沢栄基, 柴崎年彦, 木下照弘, "マイクロ波によって導体円板に誘起される電流分布の多倍長計算," 第 28 回数理学講演会論文集, B401, pp.91-92, 2009.8.
- (7) 黒木啓之, 椛沢栄基, 柴崎年彦, 木下照弘, "多倍長計算法を用いた完全導体円板による散乱界の数値計算," 電気学会, 第 38 回電磁界理論シンポジウム講演論文集, EMT-09-103, pp.7-12, 2009.11.

- (8) 黒木啓之, 近藤久純, 柴崎年彦, 木下照弘, “ダイポール波源により導体円板に励起される電流分布の数値解析,” 第 29 回数理学講演会論文集, C403, pp.119-120, 2010.8.
- (9) 近藤久純, 黒木啓之, 柴崎年彦, 木下照弘, “FDTD 法による導体円板散乱問題の数値計算,” 第 29 回数理学講演会論文集, C203, pp.105-106, 2010.8.
- (10) 黒木啓之, 近藤久純, 柴崎年彦, 木下照弘, “多倍長計算法を用いたダイポール波源による導体円板の電流分布計算,” 電気学会, 第 39 回電磁界理論シンポジウム講演論文集, EMT-10-135, pp.19-24,2010.11.
- (11) 柴崎年彦, 近藤久純, 黒木啓之, 木下照弘, “平面波入射により生じる完全導体円板上の誘導電流の数値計算 –モーメント法・FDTD 法と精密解の比較–,” 電気学会, 第 39 回電磁界理論シンポジウム講演論文集, EMT-10-134, pp.13-18,2010.11.
- (12) 近藤久純, 黒木啓之, 柴崎年彦, 木下照弘, “FDTD 法を用いた完全導体円板散乱問題の数値計算,” 平成 22 年度電子情報通信学会学生会研究発表論文集, 156,2011.3.
- (13) 黒木啓之, 近藤久純, 柴崎年彦, 木下照弘, “ダイポール波源により導体円板に励起される電流分布の数値解析 (その 2),” 第 30 回数理学講演会論文集, C402, pp.113-114, 2011.08.
- (14) 近藤久純, 黒木啓之, 柴崎年彦, 木下照弘, “FDTD 法による導体円板散乱問題の数値計算 (その 2),” 第 30 回数理学講演会論文集, C403, pp.115-116, 2011.08.
- (15) 黒木啓之, 柴崎年彦, 木下照弘, “多倍長数値計算ライブラリを用いた水平ダイポール波源による完全導体円板上電流分布の計算,” 電子情報通信学会,2011 ソサイエティ大会講演論文集, C-1-5,2011.9
- (16) 黒木啓之, 近藤久純, 柴崎年彦, 木下照弘, “多倍長計算法を用いたダイポール波源による導体円板の電流分布計算 波源が中心軸上からはずれている場合 ,” 電気学会, 第 40 回電磁界理論シンポジウム講演論文集, EMT-11-108, pp.13-18,2011.11.
- (17) 近藤久純, 黒木啓之, 柴崎年彦, 木下照弘, “FDTD 法を用いた平面波入射によって生じる導体円板誘導電流分布の数値計算,” 電気学会, 第 40 回電磁界理論シンポジウム講演論文集, EMT-11-109, pp.19-24,2011.11.
- (18) 近藤久純, 黒木啓之, 柴崎年彦, 木下照弘 “FDTD 法を用いた完全導体円板散乱問題の数値計算 (その 2),” 電子情報通信学会, 平成 23 年度電子情報通信学会学生会研究発表論文集,138, 2012.3.
- (19) 木下照弘, 黒木啓之, 柴崎年彦, “完全導体円板上の垂直微小ダイポール波源からの放射電磁界の解析方法,” 電気学会, 電磁界理論研究会資料, EMT-12-080, pp.23-28,2012.7.

- 
- (20) 黒木啓之, 柴崎年彦, 木下照弘, “中心軸上からはずれているダイポール波源により  
導体円板に誘起される電流分布の数値解析,” 第31回数理学講演会論文集, C402,  
pp.111-112, 2012.8.
- (21) 黒木啓之, 柴崎年彦, 木下照弘, “波長に対して大きな完全導体円板に生じる電流分布  
の数値解析,” 電子情報通信学会, 2012 ソサイエティ大会講演論文集, CS-1-8, 2012.9.
- (22) 黒木啓之, 吉士真輝, 柴崎年彦, 木下照弘, “垂直ダイポール波源により完全導体円  
板に誘起される電流分布,” 電気学会, 第41回電磁界理論シンポジウム講演論文  
集, EMT-12-151, pp.1-6, 2012.11.