

複素代数多様体の双有理不変数について

前 原 和 寿*

Birational Invariants of Complex Varieties

Kazuhisa MAEHARA

In this paper, we study properties of some birational invariants of a complex variety and a fibred space to classify complex algebraic varieties (resp. Kaehlerian manifolds) into the following three types (i) hyperbolic type (ii) parabolic type (iii) elliptic type.

In §1, we define Kodaira and weak Kodaira dimensions and the concepts of pseudo-effectivity, semipositivity and universal effectivity for a coherent sheaf.

In §2, we prove three elementary properties (i) functoriality (ii) easy addition theorem (iii) parabolicity theorem for a weak canonical fibering.

In §3, we prove one of Sakai's conjectures for λ -dimensions under some assumption. Moreover, we consider a deformation theory of complete complex algebraic structures (resp. compact Kaehlerian structures) up to birational equivalence (resp. bimeromorphic equivalence).

§ 序

代数幾何学の黎明期は、紀元前 200 年頃の古代ギリシャに遡る。当時アポロニウスによる円錐曲線論が発展し、その主結果は、パップスの著書により中世のラテン訳を経て今日に伝わっている。この円錐曲線論はケプラーが惑星運動の法則を発見するのに本質的な道具になった。17 世紀になってデカルトは、パップスの著書に刺激されて、座標を導入した代数的手法でギリシャの古典的な問題を解いたり、レンズの設計や虹の現象の説明に応用している。19 世紀になると代数幾何学も他の分野の数学および自然科学とともに、急速な発展をとげ、19 世紀前半には、ポンスレーによる射影幾何学 (1822) が発表されたり、 P^3 の 3 次変換の発見などを代表に、リーマン以前に

も、幾何学的代数幾何学の論文は多い。19 世紀の半ばも過ると、クレモナやマックス・ネーターなど巨匠が出て、幾何学的代数幾何学も、飛躍的に発展する。

ドイツではリーマン、ヤコビ、ワイエルシュトラウスなどによる一変数代数函数論が、解析的代数幾何学の基礎を固め、ウィルの名著「リーマン面の概念」(1913) を、経て、小平-Hodge の高次元複素多様体論へと発展した。一方イタリアではクレモナ、ベルチニからカステルヌオーヴォ、エンリケス等により、代数曲面論が発展し、イタリア学派最後の天才と言われたファノをもって輝けるイタリアの代数幾何学は衰退する。フランスでも、2 変数代数函数論をピカル、パンルヴェ等が行った。20 世紀になるとイタリアで勉強していたザリスキーは、数論を典として、イタリア学派の実験的結果を集大成した「代数曲面論」を発表した (1935)。第 2 次大戦以後、代数幾何学は、

* 教養講師

昭和 58 年 9 月 16 日受理

その基礎を確立するために、ヴェイユ、永田、ザリスキー、セル等の努力がなされ、1950 年後半から、グロタンディックのスキーム理論が発展し、今日の基礎となっている。複素多様体論やスキーム論等の基礎ができた 1960 年頃から、小平、シャハレビッチ等によるイタリア学派曲面論の厳密な証明と拡張が、新しい手法で行われた。この考察から、高次元多様体に対して、飯高の双有理同値の観点からの分類プログラムが提出された。すなわち、双有理不変数によって、その構造を三分するものである。それに対して、リーマンによる曲線族を多様体で径数付けるモジュライの理論が、タイヒミラーにより発展し、小平-スペンサーの、複素多様体の構造の変形理論に生長し、マンフォード、グリフィス、松坂等がモジュライ理論を構成している。ところで、双有理的立場に立てば、すべての複素代数多様体は、1 個の多変数多項式の零点と考えられる。この特異点を解消して非特異代数多様体を研究すればよいことを保証する広中の特異点解消定理は、基礎的道具である。

§ 2 双有理不変数について

簡単のために、複素数体 \mathbf{C} 上の既約被約な有限型スキームを (複素) 代数多様体と呼ぶ。

まず準備から、取りかかる。

定義. $k=\mathbf{C}$ として、 V を k 上のベクトル空間とする. $G=GL(r)$, $\dim_k V=r$ として $T=GL(r) \cong GL(V)$ を自然な同型とすると、 T を G の standard representation と言う。

注) よく知られた結果として、 G の既約表現 $T: G \rightarrow GL(V)$ の同値類は、 $c=(n_1, n_2, \dots, n_r)$ 但し $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_r$ の整数の組で完全に分類される。しかも、 H を G の対角行列として、 c によってきまる表現空間 V_c の upper weight λ は、 $\lambda(h)=h_1^{n_1} \dots h_r^{n_r}$ 但し $(h_1, \dots, h_r) \in H$ となる。さらに、 V が G の standard representation のときは、 $1 \leq i \leq r-1$ に対して、 $s_i = n_i - n_{i+1}$, $s_r = n_r$ において、表現空間 V_c は $S^{s_1}(V) \otimes S^{s_2}(V) \otimes \dots \otimes S^{s_r}(V)$ の部分空間の商空間と

して表わされる。さらに、 $n_r \geq 0$ のときは、整数列 q_1, \dots, q_t ($t=r!$) があって

$$S^{q_1}(V) \otimes S^{q_2}(V) \otimes \dots \otimes S^{q_t}(V)$$

の直和因子として表わされる。

定義. V_c を G の既約表現として、 $c=(n_1, \dots, n_r)$ とする。 $\sum n_i$ を V_c の weight と言う。 $\sum n_i > 0$, $n_i \geq 0$ のとき V_c を positive という。一般の表現についてもその組成列を考えて各々の既約表現が positive のとき positive と言い、組成列の各々が等しい weight を持っているとき homogeneous と言う。

これらを locally free sheaf of finite rank 上に拡張することは、容易である。

定義. X を非特異代数多様体とし、 E を X 上の連接層 (\mathcal{O}_X -Module) とする、 $\rho=(T_1, T_2, \dots, T_k, \dots)$ を $G=GL(r)$, $r=\dim_{\text{Rat}(X)} E \otimes \text{Rat}(X)$ の positive representation の可算列で weight が増加するように取ってあるものとする。このとき、自然な射、 $\theta_k: \mathcal{O}_X \otimes \Gamma(X, T_k(E)) \rightarrow T_k(E)$ から生ずる全射、 $\mathcal{O}_X \otimes \Gamma(T_k(E)) \rightarrow \text{im } \theta_k$ を考える。このとき Grassmann 多様体への有理写像が定まる。 $\varphi_k: X \rightarrow \text{Grass}_{r_k}(\Gamma(T_k(E)))$ 但し $r_k = \text{rank}(\text{im } \theta_k)$ 。このとき、次のように、 $\kappa^{(\rho)}(E/X) = \max_{k \gg 0} \{\dim \varphi_k(X)\}$ と置く。この $\kappa^{(\rho)}(E/X)$ を E で測った ρ -小平次元、または、飯高の (ρ, E) -次元と呼ぶ。

注意. $\kappa^{(\rho)}(E/X)$ の取る値は、 $0 \leq \kappa^{(\rho)}(E/X) \leq \dim X$, それ以外 $\kappa^{(\rho)}(E/X) = -\infty$ と置く。

さらに、 $A^r \theta_k: \mathcal{O}_X \otimes A^r \Gamma(X, T_k(E)) \rightarrow A^r \text{im } \theta_k$ による有理写像 $A^r \varphi_k: X \rightarrow \mathbf{P}(A^r \Gamma(T_k(E)))$ は、 $\text{Grass}_{r_k}(\Gamma(T_k(E))) \rightarrow \mathbf{P}(A^r \Gamma(T_k(E)))$ の Plücker 埋入により得られる。 $r_k = \text{rank } T_k(E)$ ($k \gg 0$) となるとき、 $w\kappa^{(\rho)}(E/X) := \max_{k \gg 0} \{\dim A^r \varphi_k(X)\}$ と置く。

これ以外のとき、 $w\kappa^{(\rho)}(E/X) = -\infty$ と置く。この $w\kappa^{(\rho)}(E/X)$ を、 E で測った ρ -弱小平次元または、飯高の弱 (ρ, E) 次元と呼ぶ。

注意. $w\kappa^{(\rho)}(E/X) \geq 0$ ならば $w\kappa^{(\rho)}(E/X) = \kappa^{(\rho)}(E/X)$ となる。

次に、酒井により導入された次元を定義しよう。

X を完備非特異代数多様体、 E を X 上の接続層として $\lambda(E/X) := \kappa(O(1)/P(E)) - (\text{rank } E - 1)$ と置く。その他のとき、 $\lambda(E/X) = -\text{rank } E$ と置く。 $\lambda(E/X)$ を、酒井の E -次元と呼ぶ。さらに、双有理不変数となる $E = \mathcal{O}_X$ のとき $\lambda(X) := \lambda(\mathcal{O}_X/X)$ と置いて、余接次元と言う。この次元に対して次の酒井予想がある。

(1) $\kappa(\omega_X/X) \geq 0$ のとき $\kappa(\omega_X/X) \geq \lambda(X)$

(2) $\kappa(\omega_X/X) = -\infty$ のとき $\lambda(X) \leq \dim X - 2$

(3) $\lambda(X) \neq -\dim X$ のとき、algebraic fibre space $f: X \rightarrow Y$ に対して、 $\lambda(X) \leq \lambda(X_Y) + \lambda(Y)$ 、但し X_Y は general fibre を表わす。

次に、双正則な幾何の場合に、有用な接続層に対する概念を、列挙して置こう。

E が豊富層とは、任意の接続層 F と任意の positive 増加 weight の表現列 $\rho = (T_1, \dots, T_k, \dots)$ に対して自然な射 $O_X \otimes \Gamma(F \otimes T_k(E)) \rightarrow F \otimes T_k(E)$ ($k \gg 0$) が全射となる場合に言う。 E が半豊富とは $F = \mathcal{O}_X$ に対して上記の性質が成立するだけである場合を含めて言う。 E が半正值とは、適当な可逆層 L に対して

$$O_X \otimes \Gamma(T_\beta(T_\alpha(E) \otimes L)) \rightarrow T_\beta(T_\alpha(E) \otimes L)$$

が $\forall \alpha \gg 0, \exists \beta \geq 0$ に対して、全射となるときに言う。

これらを、双有理的な概念に、移植してみよう。

まず、任意の接続層 F に対して $w\kappa^{(\rho)}(T_k(E) \otimes F/X) \geq 0$ (但し $\forall \rho, \forall k \gg 0$ とする)、このとき E を B -ample と呼ぶ。

$w\kappa(E/X) \geq 0 \Leftrightarrow E$ は B -半豊富

$\forall \rho$ L : 可逆層, $\forall \alpha \gg 0$ $w\kappa^{(\rho)}(T_\alpha(E) \otimes L/X) \geq 0$

$\Leftrightarrow E$ は B -半正值, または 擬正值 (pseudo-effective).

$\forall Z \leq X$ の部分多様体 $\mu: Z_\mu \rightarrow Z$ を特異点解消とする。 $\forall \rho$ $w\kappa^{(\rho)}(\mu^*E|_Z/Z_\mu) \geq 0$

$\Leftrightarrow E$ を普遍的に effective と言う。

このとき、次の問題

E が普遍的に effective \Rightarrow 半正值?

は、解き易いであろう。

しかし、次の予想は、本質的である。

$\kappa(\omega_X/X) = \dim X$, ω_X が半正值 \Rightarrow 普遍的に effective?

これは、正しいことが知られた。

§ 2 双有理不変量の基本性質

いくつかの補題を準備する。

補題. $f: V \rightarrow W$ が algebraic fibre space とする。

E, F を V, W 上の接続層とする。単射 $f^*F \rightarrow E$ が与えられているとする。 ρ を positive な増加表現列とする。

$O_X \otimes \Gamma(T_k(E)) \rightarrow \text{im } \theta_k^1$ によってきまる有理写像の像を Z_V と書けば、次の可換性が成立する。 $\varphi^1: V \rightarrow Z_V, \varphi^2: W \rightarrow Z_W$ として、 $p: Z_V \rightarrow Z_W$ の (支配的) 射影があり、 $\varphi^2 \circ f = p \circ \varphi^1$ となる。

証明. Z_V の一般の閉点を x として、その $\text{dom}(\varphi^1)$ の逆像を考える。そのとき、 $\text{im } \theta_k^1$ は free sheaf である、 $\text{im } \theta_k^2$ は、そこで $O_X \otimes \Gamma(T_k(F))$ と言う free sheaf の商であり前者すなわち $\text{im } \theta_k^1$ の部分である。従って $\text{im } \theta_k^2$ は、開集合上で free sheaf となり、 Z_W の一点へ写像される。

(終)

補題 $f: V \rightarrow W$ を algebraic fibre space とする。 E を V 上の接続層とする。 V_w を f の一般 fibre とする。 ρ を表現列とする。そのとき、次の式が成立する。

(i) $\kappa^{(\rho)}(E/V) \leq \kappa^{(\rho)}(E|_{V_w}) + \dim W$

(ii) $w\kappa^{(\rho)}(E/V) \leq w\kappa^{(\rho)}(E|_{V_w}) + \dim W$

証明.

$\theta^2: f_* f^* T_k(E) \rightarrow T_k(E)$ と $\theta^1: O_V \otimes \Gamma(E) \rightarrow T_k(E)$ として $\text{im } \theta^2$ が自由層のとき、 $\text{im } \theta^1$ が自由層になることに注意すればよい。

(証明終)

補題 V を代数多様体 (非特異) とする。 E を接続層とする。 ρ を表現列として $\varphi_k: V \rightarrow Z_V$ を最大を充す k による有理写像とする。(α)

$\omega\kappa^{(\rho)}(E/V_Z)=0$ 但し V_Z は φ_k の一般 fibre,
(β) $\kappa^{(\rho)}(E/V_Z)\geq 0$ となる.

証明 容易

補題. $f: V \rightarrow W$ を algebraic fibre とする. E , F を V , W 上の連接層とする. $O \rightarrow f^*F \rightarrow E$ を完全列とする. さらに $\kappa^{(\rho)}(F/W)=\dim W$ と仮定する. そのとき, 次の関係が成立する.
 $\omega\kappa^{(\rho)}(E)=\omega\kappa^{(\rho)}(E/V_W)+\dim W$.

証明 $\varphi^1: V \rightarrow Z_V$ の一般 fibre が f の一般 fibre V_W に含まれることに注意すればよい. 実際, そのとき, 次が成立する. $\omega\kappa^{(\rho)}(E|V_Z)\leq \omega\kappa^{(\rho)}(E|V_W)+(\dim Z_V-\dim Z_W)$, かつ $\omega\kappa^{(\rho)}(E|V_Z)=0$ より, $\dim Z_V=\omega\kappa^{(\rho)}(E)$, $\dim Z_W=\dim W$ に注意して, $\omega\kappa^{(\rho)}(E|V_W)+\dim W\leq \omega\kappa^{(\rho)}(E)$ を得る. 逆は常に正しいので, 等号となる. (証明終)

注意 上と同じ, 仮定の下で, 次の関係が得られる.

$$\kappa(E)+\kappa(E|V_Z)=\kappa(E|V_W)+\dim W \text{ かつ}$$

$$\kappa(E|V_Z)\geq 0.$$

これらの補題と, 若干の例から, 次が予想される.

予想. ρ を positive な増加表現列として,

$$\omega\kappa^{(\rho)}(\mathcal{Q}_{V/W}^1)=\omega\kappa^{(\rho)}(\mathcal{Q}_{V/W})+\text{var}(f).$$

但し, $f: V \rightarrow W$ は algebraic fibre space. $\text{var}(f)$ は双有理的にみた fibre の構造の変化量.

このうち特に, 解り易いものは,

$$\kappa(\omega_{V/W})=\kappa(\omega_{V/W})+\text{var}(f)$$

である. これと同値な命題 $\text{var}(f)=\text{Max}_{k>0}\{\kappa(\det f_*\omega_{V/W}^{\otimes k})\}$ 但し $\kappa(\omega_{V/W})\geq 0$ と言ってもよい.

この命題の証明を付すべきであるが, 次の章ではこのことから得られる結果について考察する.

§ 3 λ -次元の性質

定理. V を非特異完備代数多様体とする. ω_V が半豊富とする. そのとき $\kappa(V)\geq \lambda(V)$ が成立する.

証明 $\omega_V^{\otimes k}$ による射 $\varphi: V \rightarrow Z_V$ を考えて, 酒井不等式, $\lambda(V)\leq \lambda(V_Z)+\dim Z_V$ に注意する. ω_{V_Z} も半豊富かつ $\kappa(\omega_{V_Z})=0$ より, $\omega_{V_Z}^{\otimes m}=O_{V_Z}$

($m>0$) となり, 小林不等式 $\lambda(V_Z)\leq 0$ から $\lambda(V)\leq \kappa(V)$ が得られる.

注意. 一般に $\omega\kappa(E)\geq 0$ ならば, $\kappa(\det E)\geq \lambda(E)$ となる.

次に, $\text{var}(f)=\text{Max}\{\kappa(\det f_*\omega_{V/W}^{\otimes k})|k>0\}$ を仮定して, λ の性質を調べてみよう. E をベクトル束として, $P(E)$ をその射影束とする. $p: P(E)\rightarrow V$ を構造射とする.

すると, $\omega_{P/V}=O(-n-1)\otimes p^*\det E$, 但し $n=-\dim V+\dim P$, さらに $p_*(\omega_{P/V}^{-1})^{\otimes k}=S^{k(n+1)}E\otimes(\det E)^{-1\otimes k}$ かつ

$$\det(p_*(\omega_{P/V}^{-1})^{\otimes k})=\det s^{k(n+1)}(E)$$

$$\otimes(\det E)^{-k\cdot r(s^{k(n+1)}E)}$$

$$\text{但し } r(s^\alpha E)=(r+\alpha-1), \alpha=k(n+1).$$

結局

$$\det(p_*(\omega_{P/V}^{-1})^{\otimes k})=\det E^{\otimes(\alpha/r-k)(r+\alpha-1)}$$

となる.

命題 上の仮定で, $\kappa(\det E)\geq 0$, $r(E)\leq n+1$ ならば $\kappa(\det p_*((\omega_{P/V}^{-1})^{\otimes k}))\geq 0$ となる. 特に $r(E)=n+1$ のとき $\det(p_*((\omega_{P/V}^{-1})^{\otimes k}))=O_V$ となる.

そこで上の命題を使って, $E=\mathcal{Q}_{V/W}^1$ とおけば, $r(\mathcal{Q}_{V/W}^1)=\dim f$, $n=\dim P=\dim f-1=r(\mathcal{Q}_{V/W}^1)-1$ から $\dim(p_*((\omega_{P/V}^{-1})^{\otimes k}))=O_V$ と考えられる.

従って $O_P\rightarrow p^*p_*(\omega_{P/V}^{-1})^{\otimes kr}\rightarrow(\omega_{P/V}^{-1})^{\otimes kr}$ が non-zero で k を大きく取りかえて, $\kappa(\omega_{P/V}^{-1})\geq 0$ を得る.

$$\text{よって } g_*(O(k(n+1)))\otimes(\omega_{P/V}^{-1})^{\otimes k})^{-1}$$

$$=g_*p^*\omega_{V/W}^{\otimes k}$$

$$\subset g_*(O(k(n+1)))$$

となり, $\dim W=\text{var}(f)$ と考えれば,

$g_*p^*\omega_{V/W}^{\otimes k}\omega_{V/W}^{\otimes k}=f_*\omega_V^{\otimes k}\omega_{V/W}^{\otimes k}$ は ample invertible sheaf を含んでいると仮定してよいから, $g_*(O(k(n+1)))$ もそれを含む. すなわち $\kappa(g_*(O(k(n+1))))=\text{var}(f)$

実際 次の場合を考えればよい. ベクトル束 E が ample invertible sheaf L を含んでいるとする. $L\rightarrow E$. $\Gamma(E^{\otimes k})\neq 0$ で $O_V\otimes\Gamma(E^{\otimes k})\xrightarrow{\theta}E^{\otimes k}$ の

像 $\text{im } \theta^{**}$ も $L^{\otimes k}$ を含む ($k \gg 0$). 一方, 有理写像 $V \rightarrow Z_V$ の一般の fibre で考えれば, 自由層が ample invertible sheaf を含むことになり, $\kappa(E) = \dim V$ でなければ, 矛盾する.

そこで, $\kappa(g_*(O(k(n+1)))) = \text{var}(f)$ から, $\dim W = \text{var } f$ の場合を考えて, $k \gg 0$ に対して $\mathcal{L} \rightarrow g_*(O(k(n+1)))$, $\kappa(\mathcal{L}) = \dim W$ としてよい. このとき

$$g^* \mathcal{L} \rightarrow g^* g_* O(k(n+1)) \rightarrow O(k(n+1))$$

が non-zero, すなわち単射なので, 補題から

$$\kappa(O(k(n+1))) = \kappa(O(1)|_{P_W}) + \dim W$$

階数は両辺で等しいことを考えれば

$$\lambda(\mathcal{Q}_{V/W}) = \lambda(\mathcal{Q}_{V_W}) + \dim W$$

を得る.

但し $\lambda = -\text{rank}$ は $\lambda = -\infty$ でおきかえる.

不変性を考慮して

$$\lambda(\mathcal{Q}_{V/W}) = \lambda(\mathcal{Q}_{V_W}) + \text{var } f$$

となる.

また, L を ample invertible sheaf として

$L \rightarrow E$ のとき $E^{\otimes r} \rightarrow \det E$ は split する.

$$E^{\otimes r} = \det E \oplus K, \quad (\det E)^{\otimes s} = \det K$$

$L \rightarrow \det E$, $L \rightarrow K$ が, ともに零とはならないので, $L \rightarrow (\det E)^{\otimes s} \exists s > 0$ が成立する.

よって $\kappa(\det E) = \dim V$, 整理すると, $\kappa(E) = \dim V \Rightarrow \kappa(\det E) = \dim V$ となる.

そこで $O_V \otimes \Gamma(S^m \mathcal{Q}_V) \rightarrow S^m \mathcal{Q}_V$ のきめる有理写像の像は, $\kappa(Z_V) \geq 0$ と予想することにする.

このとき, 藤原により $\kappa^{(s)}(\mathcal{Q}_V) \geq \lambda(\mathcal{Q}_V)$ が知られているので, $\kappa(\omega_V) = 0$, $\dim V \geq \kappa^{(s)}(\mathcal{Q}_V) > 0$ と仮定して矛盾を出せばよい. $\varphi: V \rightarrow Z_V$ を canonical map とする. 双有理幾何では, $\kappa(\omega_{V/Z}) = \kappa(\omega_{V_Z}) + \text{var } \varphi$ と言える. $\kappa(\omega_Z) \geq 0$ より $\kappa(\omega_V) \geq \kappa(\omega_{V_Z}) \geq 0$ から $\kappa(\omega_{V_Z}) = 0$, $\text{var } \varphi = 0$ となる. 酒井等式から, $\lambda(\mathcal{Q}_V) = \lambda(\mathcal{Q}_{V_Z}) + \lambda(\mathcal{Q}_{Z_V})$, 帰納法の仮定から $\kappa(\omega_{V_Z}) = 0$ より $\lambda(\mathcal{Q}_{V_Z}) \leq 0$ となる. 飯高加法等式より,

$\kappa(\omega_V) = \kappa(\omega_{V_Z}) + \kappa(\omega_{Z_V})$, $\kappa(\omega_{Z_V}) \geq 0$, $\kappa(\omega_{Z_Z}) = 0$ より $\kappa(\omega_{Z_V}) = 0$ induction により, $\lambda(\mathcal{Q}_{Z_V}) \leq 0$ 従って $\lambda(\mathcal{Q}_V) \leq 0$ を得る.

$f_*(S^m \mathcal{Q}_{V/W})$, $f_*(T_k \mathcal{Q}_{V/W})$ などの擬正值性について考察したいが別紙に譲る.

Reference は省略させて載きます.

§ 謝辞

飯高・酒井・藤田・満洲・前田の各氏の助言に感謝します.