数学的概念の再検討—数学教育の立場から

植野義明*

概要

本稿では, Lakoff, Núñez[1](邦訳は [2]) による数学的概念の認知科学的研究に基づいて, いくつかの数学的概念—無限, 仮分数, 素因数分解—について, 数学教育の立場から検討した。

数学の研究では理論にとって鍵となる概念を厳密に, 巧く定義することが重要であり, 理論の構築がより整合的になされるように定義を取り替えることも研究のプロセスでは頻繁に行われている。数学教育でも, 概念を所与のものとは見做さず, その成り立ちについて検討の余地があるものとして捉えることは, 重要である。概念をどのようなものとして教えるか (what) の問題は, 概念をどのようにして教えるか (how) の問題に劣らず授業の成否を左右する重要なファクターである。そこで本稿では, 数学にとって最も重要な概念である無限に再考を加える。また, 小中学校で指導が難しいとされている仮分数, 素因数分解についても概念理解の観点から検討する。

検索語：無限, 仮分数, 素因数分解

1　無限

数学は無限を研究対象とする学問であるとよく言われる。無限を研究対象とする学問には, 神学, 哲学, 数学があり, これらは歴史的には密接に関係しあっていた。

神学では, 無限は神そのものであり, 人間と対立する概念として考えられている。哲学では, 無限はそもそも何かという問題として考えられる。一方, 数学では計算可能なものはすべて扱おうとする立場から, 無限の概念の量的な実現である無限大や無限小を含んだ計算法の中で無限は扱われる。いわば, この数学の立場は無限という概念を存在が所与のもの, 説明不要なもの, 直観的に明らかなものとして見做しているといえるだろう。

ことに, 数学史における公理主義から始まり, 集合論, 数学基礎論, 構造主義に至る流れ以降, 数学は集合論のモデルの上に構成可能な理論体系と見做されることとなり, 無限に関する神学的, あるいは哲学的議論を避けて通れるようになった。このことは, 数学において, 集合論が神学に取って代わったと言われる所以である。

一方, 1980 年代以降における認知科学の大きな発展の流れの中で, 人間の言語活動をはじめとする行動や思考が人間という種の生物学的資源の上で成り立っているとする考え方が主流となり, 数学的概念も人間の思考活動が生み出したひとつの構造物である以上, その生物学的, 社会科学的基礎について実証的に論ずることができることが明らかになってきた。

1.1　数学における無限

無限大と無限小は, 概念としての無限が数として現れたときの姿であるが, 数学において無限がその存在を現す場面はそれ以外にも数多くある。

いわゆる数学の学習書において, 無限が扱われている場面を探してみよう。

以下は, 結城浩 [3](p.9) からの引用である。

> 「そんなの, ずるいよ。始めの四個の数だけ示しておいて, その次から《ここで急に増えて》なんていうのは。1, 2, 3, 4 の後に 10 が来るなんて予想できるはずがない」と僕は言った。
> 「そう？　それなら何個まで見ればよい？　数列が無限に続くとしたら, 何個まで見れば残り

* 東京工芸大学工学部基礎教育研究センター准教授
2013 年 9 月 27 日受理

がわかる？」

この会話では, 1, 2, 3, 4, 10, 20, 30, 40, 100, 200, 300, 400, . . . という「規則的な」数列が話題に上っている。無限個の項からなる数列という概念を読者はすでに知っていることを前提として, その項が無限に続いているという事実を巧く利用すると, 相手の足元をすくうようなパズルも作れるということを言っている。ここでは, 無限の説明も定義もされていない。

次も同じ本の p.216 からの引用である。

「あの, 先輩 ⋯⋯ ということは, 無限次の多項式は, こう書くんでしょうか。でも, なんか ⋯⋯ 変ですね」

$$a\,x^{\infty} + b\,x^{\infty-1} + c\,x^{\infty-2} + \cdots$$

なるほど, そう書きたくなるのか ⋯⋯。

これは, 2 次の多項式という言葉が $a\,x^2 + b\,x + c\ (a \neq 0)$ のように書ける式を指すということを確認した直後に出てくる会話である。このセリフを述べるのはテトラちゃんという中学生で, 少し素直すぎるという性格付けがなされている。

多項式はいつも次数が高い項を先頭として並べるものとすれば,「無限次の多項式」という言葉の意味をこのように誤解する可能性もありうることを言っている。ここに引用した本では、「無限次の多項式」は「べき級数」を説明的に言い換えた語として使用されている。従って、テトラちゃんの解釈は間違いである。なお、テトラちゃんの誤解は、「次数が無限大」という言葉の意味を字義通りに受け取ってしまったことに起因しており、多項式を書き下すときに降べきの順に並べるか昇べきの順に並べるかの違いとは一応独立である。実際、テトラちゃんの考えた式は (あまり見慣れない形であるが)

$$\cdots\cdots + c\,x^{\infty-2} + b\,x^{\infty-1} + a\,x^{\infty}$$

と書くこともできる。

以上, 2 つの例を見たが, 数列の項が無限個ある状況を扱うにせよ, 多項式の次数が無限になった状況を扱うにせよ, 数学書では無限とは何かという問題には立ち入らず, ただ無限が式の中に現れたときの扱い方, 望まれる結果が得られる計算法を教えるだけであることがわかる (ついでながら、テトラちゃんのような間違った概念化の例をわざわざ示している数学書は稀であることも指摘しておこう)。

このように, 数学 (とくに初等数学) では, 有限個の項からなる数列から無限個の項からなる数列に, 多項式からべき級数にというふうに概念を拡張するが, その場合, 有限の対象について有効だった計算手段が, 無限概念を含んだ式についても有効であるように巧く拡張できた場合だけが記述される。拡張が巧くできない場合は、拡張の仕方を修正しなければならない。このような試行錯誤をも含めて「数学」と呼ぶとすれば、数学とは、数式を扱う際の経験的に得られる感触に裏付けられたアイデアを駆動力とするひとつの「実験科学」であると言うこともできる。

1.2　日常における無限体験

無限数列や無限級数はもちろん数学において重要な概念であり, その理論は精巧で大変役に立つ。しかし、応用における数学の有用性は、数学をあるレベルまで学習して初めてわかることである。

一方, 無限の概念の直観的理解の契機は、人間の日常体験の中にすでに存在している。

2013 年 9 月 20 日、東京工芸大学工学部で 3 時限目の「線形代数 B」を受講している学生 (建築学科, 生命環境化学科の受講生数合計 94 名) に以下のアンケートを行った。

設問 1　無限とは何か説明しなさい。

設問 2　日常の生活の中で無限に出会うのはどのような場面ですか。

設問 1 に対しては、ほとんどすべての学生が「限りがないこと」と答えていた。同様に、もし、英語を母語とする学生に「infinity とは何か」と問うたら,「not finite」という答が多数を占めるだろうか。これは興味ある問題である。

設問 2 に対する回答を次に順不同で示す。

円周率, 鏡と鏡を合わせたときに映る鏡の数, 空を見上げれば宇宙が限りなく広がっている, 数字,

空気, 色, 目標 (今の目標が達成してもまた別の目標ができるから), 宇宙がどこまで続いているかなどを考えるとき, 昨日のものが今日も同じようにそこにある (静止している) とき, メビウスの輪, パソコン, 思考回路, 思考や想像, 時間を考えるとき, 細胞分裂, 人の考え, 時間, 宇宙の大きさ, 自然界で植物が枯れたり食べられたりしてもまた種から同じ植物が育つとき, 生活の中で無限に出会うことはない, がん細胞, 時計の針が止まることなく無限に回り続けている, 髪の毛が無限に伸びる, 食物連鎖, 風力発電に使われる風, 草刈り, 水の循環, 割り切れないとき。

なお、東京工芸大学工学部の数学教育では、新入生基礎調査の結果を踏まえて、1 年次前期には高校数学の復習を行うリメディアル・コースと、1 年次前期から、微分積分学や線形代数を学ぶコースに分けて授業を展開している。ただし、どちらのコースで学ぶかは学生が恣意的に選択する。

この調査の前に 1 時限目の「微分積分学 1 A」のクラスで同じ設問を学生に提示した。こちらは、前期にリメディアル・コースの科目を履修した学生が多く、「生活の中で無限に出会うことはない」と言いきる学生が大半であった。また、中には、「この世界のすべては数字で表されるので、無限に出会うことはない」と、理由をつけて回答する学生もいた。いずれにしても、高校までの数学の基礎が出来ていないと自己評価する学生は、生活の中で無限に出会う機会を思い出すことに困難を覚える傾向があるといえるかもしれない。

上記の「線形代数 B」のクラスの学生たちの回答から, 人間が日常の中で無限を感じるのは, (1) ある運動や仕事が膨大すぎて終わりがないと感じられるとき, (2) $1 \div 3$ のような計算で同じプロセスの繰り返しが起こり終わりがないことがわかったとき, (3) 未来の予想, 計画立案, 他人の心などのように自分にはコントロールできない, あるいはすべての可能性を数えていくと無限通りの場合がありそうに感じるとき, であることがわかる。

草刈りは (1) の例である。実際、草刈りでは、雑草が次々と目に入り、いくら雑草を刈っても際限がないように思われる。草刈りの作業が永遠に同じプロセスを繰り返すように思われる。

(2) の例としては、円周率がある。円周率は無理数であるので、小数点以下をいくら計算しても終わりが来ない。

(3) の例としては、友だちの誕生日の企画の立案などがある。どのように祝うのか、どこに集合するのか、交通手段、会食のメニューなど、計画が固まるまでは、無限の可能性があるように感じられる。このような体験から、実は毎日の生活においても、未来は不定であり、不安とともに無限の可能性を持っていることが理解される。また、他人の心などは、自己には決定権がない。何かを提案しても受け入れられるかどうかは相手しか知らない。このような不安な気持ちから、相手の心を推測するとき、そこに自己の無力さとともに自己の推量能力を超えた現実の存在に対して無限を感じる。

また, (4) 宇宙の広大さや過去から未来への時間の流れのような自己を超えた存在に対峙したとき, (5) 生物界における食物連鎖やがん細胞の分裂のような, 細部まで調べれば調べるほど驚くほど多様で, かつ全体の規模の大きさも把握できないような精巧なメカニズムの存在に触れたときにも人間は無限を感じる。

これらは, あくまでも、学生が日常生活の中で「無限を感じる」体験であり、草刈りの作業経験に基づく体験と同様に、実際に物理的宇宙が無限であるのかどうかとは別の問題である。設問の「無限に出会う」は「無限を感じる」と言い換えたほうが (とくにリメディアル・コースの学生に対しては) 理解しやすかったかもしれない。

(4) は時間的にも空間的にもひとりの人間としての自己の外延、すなわち肉体の範囲を超える世界が存在すると感じる場合である。(5) は同じことをミクロの領域との出会いによって感じる場合である。食物連鎖は生と死の無限の繰り返しでもあり、そのシステムの中に人間も組み入れられている。人間は他の動物に食べられることは稀であるが、個人にはやがて死が訪れることや小さな新しい命が次の世代

を形成することは発芽から落葉に至る植物の循環によく似ている。特に、日本人は自己の存在を植物に例える傾向がある。

1.3　数学の無限と日常の無限

数学における無限の背景には、一般的、日常的体験の中で感じ取るいろいろな事象の「無限さ」がある。夜空の星を眺めたり、春の草花の美しさや秋の紅葉の美しさを感じたり、バクテリアやウイルスの顕微鏡写真を見たり、友だちの誕生パーティーを企画したりといった豊かな体験が、高度な数学を理解する基礎として重要である。体験が具体的、個人的であればあるほど、抽象概念である無限の把握も容易になる。

初めに述べたように、数学は無限を対象とする理論体系であるが、無限とは何かという問題に答えることはできない。たとえば、集合論における無限集合の定義は、有限集合ではないという否定概念に基づいたことしか言っていない。

数学における無限概念は、無限を感じる日常的な体験を基礎としている。自己を超える存在に触れることは宗教的な体験でもある。体験から形成される直観的理解が数学の基礎をなしている。

2　概念理解と図的表現

数学教育では、暗記によってテストでの高得点を狙うことは、本来の教育ではないと言われることが多い。だが、一方で、日本の算数では、九九は必ず暗記しなければならないとされている。どのような暗記が有害で、どのような暗記は許される、あるいは積極的に推奨されるのであろうか。

ここで、参考ながら、心理学には「暗記」という用語は存在せず、心理学では「記憶」と言っていることに注意しておこう。認知心理学では、人間の知的な心の働きの中で、記憶は重要な位置を占めている。記憶は、何らかの学習の効果がそれ以降の行動の違いとして発現する現象である。また、「暗記」は暗記しようという意識的な努力を伴ってなされるのに対し、認知心理学では、「記憶」は自分がいつ記憶したのかという自覚なしにも起こるとされている。従って、認知心理学における記憶は、「このような場合には〜すべきである」のような文章の形に記号化されて保存された情報には限定されないものとして扱われる。

記憶と行動との間の関係が良好となるためには、記憶に意味の理解が伴っていることが必要である。「なぜかは分からないがこうやればうまくいく」という形での記憶は確信にまで至らず印象が曖昧であることが多く、長い時間の間には別の知識に上書きされる可能性が高い。一方、意味や理由の理解を伴う記憶はより安定となる。

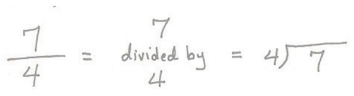
数学教育に限らず、一般に教育学では、教授法の研究が昔からなされてきた。これは、より効果的な教育方法を探求する研究ということができる。ある教え方が別の教え方に比べて優れているとき、そこにはどのような要因が働いているのだろうか。以下では、仮分数と素因数分解の指導における視覚的イメージの使用について考察する。

2.1　仮分数を帯分数に直す

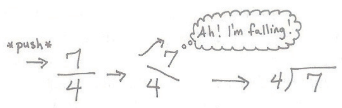
最近、アメリカで若い女優が表した算数・数学の参考書 [4] が話題を呼んでいる。この本はアメリカの中学生を対象に代数的分野を扱っているが、生徒が楽しく数学を学べるよう従来の数学参考書にない多くの工夫が盛り込まれている。たとえば、主な読者ターゲットを女子生徒に絞り、著者を含めて多くの女性の中学生時代から成人するまでの数学的体験が実話として載っていること、数学的部分の説明もユーモアに溢れた中学生に分かりやすい英語で書かれていること、女子生徒が好きそうなファンシーなイラストが豊富にあることなどが特徴である。この本から仮分数を帯分数に直す方法について説明している部分 (p.42) を引用してみよう。

> もし $\frac{7}{4}$ 個のピザがあるとすると、ピザは 1 個より多いことは分かるわよね (だって、分子 7 が分母 4 より大きいもの。いいわね？)。でも、正確には、ピザは**まるごと**いくつあって、残りは**何切れ**あるのかしら。つまり、言い換えると、仮分数 $\frac{7}{4}$ を帯分数として書くことができるかしら？

あなただけにちょっとした秘密を教えるわ。**分数は割り算の問題が変装したものなの！** だから、コツは、$\frac{7}{4}$ を**割り算の問題**として扱うことよ。そうすれば簡単に帯分数に直せる。分数を上から下に「7 割る 4」と読むといいわ。



他の考え方もあるわ。仮分数は、上に載っている頭 (分子) の方が (分母よりも) 大きい頭でっかちでしょう。だから、それを傾けて右側に下ろしてやって、割り算をすればいいわ。



割り算を実行すると「1 余り 3」となる。

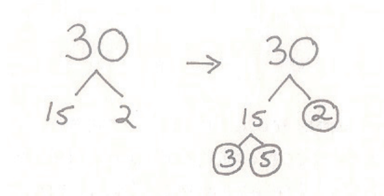
答の「1 余り 3」が分かったから、ピザまるごと 1 個に残り 3 切れあることが分かる。ただし、「余りが 3」と書く代わりに、それを分数の形で書くこともできる。その余りを初めに出発したのと同じ分母の上に置くの。「余り 3」は $\frac{3}{4}$ となるわね。結局、答はピザまるごと 1 個と残りのピザ 3 切れ、つまり、$1\frac{3}{4}$ 個のピザになる。

以上の説明の中で、文章の間に挟んだイラストで示されている部分は通常の数式では「$\frac{7}{4} = 7 \div 4$」と書ける。このこと—分数と割り算の等価性—をこの本では、「分数は割り算が化けたもの」というような表現で説明し、イラストによってさらにこの考えを強化している。イラストはほぼ数式と一致しているが、デフォルメされている。結果として、数式と絵画の中間的な表現形式が現れている。

イラストは正式な数式の書法とは異なっているが、そのことによる混乱よりも、読者-生徒が数式の意味をよりよく理解し、記憶に留め、数式に親しみを持つ効果の方が大きいと言える。

2.2　素因数分解

もうひとつの例として、素因数分解を取り上げよう。McKellar[?] は、素因数分解を次のような図で説明している。



ここでは、$30 \to 15 \times 2$ のように、整数を 2 つの整数の積に分解する操作を繰り返すアルゴリズムが示されている。こうしてできる二分木の末節に素因数が現れる。日本の算数教育でも同じような図を用いることがあり、「サクランボ図」の愛称で呼ばれることもある。McKellar はこの図を木の枝が枝分かれしている図であると説明し、1 とその数自身の積にしか分解できない数は素数に違いないと言っている。また、この樹形図の末端の枝にサルがぶら下がっており、サルを見つけたらそれを丸で囲むことによって素因数分解ができると言っている。

このような図は、関係図、図的表現などと呼ばれることがある。また、問題となっている状況の言語による表現を概念的領域、数式による表現を操作的領域と呼び、関係図はそうした概念的領域と操作的領域を繋ぐ結節点に位置し、生徒が数学を理解する上で重要となる。しかし、もし概念的領域での訓練が不十分だと、計算法だけを覚えて答を出す「丸暗記の数学」に堕する危険がある。そこで、これまで多くの授業者によって、生徒の概念的領域での理解が十分であるかどうかを確認するさまざまな方法が考案されるに至っている。

参考文献

[1] G. Lakoff, R. E. Núñez *Where Mathematics Comes From—How the Embodied Mind Brings Mathematics into Being* 2000: Basic Books, N.Y.

[2] レイコフ, ヌーニュス, 数学の認知科学, 2012: 丸善出版 (植野, 重光 訳).

[3] 結城浩「数学ガール (数学ガールシリーズ 1)」ソフトバンククリエイティブ, 2007.

[4] D. McKellar, *Math Doesn't Suck : How to Survive Middle School Math Without Losing Your Mind or Breaking a Nail*, Plume, 2008.