東京工芸大学工学部紀要 Vol. 35 No.1（2012）

Mathematica による数学教育の可能性

植野義明*

概要

Mathematica は数式処理ソフトとして知られているが, 計算結果をグラフィックスで表示する機能 (可視化機能) の他に音として出力する機能 (サウンド出力機能) も備えている。ここでは, このような, データを音として記録, 再生する機能に着目し, 物理実験や音楽への応用の可能性を考える。高校生の自由研究や大学でのオンライン教材作成のサポートツールとして有用であると思われる。数式処理システムの機能が充実し, 使いやすくなった。Mathematica の version 7 以降の機能を中心として, 数学教育での利用について, 教材開発の観点から可能性を考える

検索語：振動と波動, シミュレーション

1　サウンドデータ

Mathematica は数式処理ソフトとして知られているが, 数式処理とは, 数式を数式のまま計算するという意味である。たとえば,

$$\sqrt{3}+\sqrt{12}$$

と入力すると

$$3\sqrt{3}$$

という出力が返ってくる。因数分解や微分, 積分の計算も行うことができる。もちろん, 従来のような「数値計算」も行うことができる。

関数 (の定義式) を入力して, そのグラフを出力したい場合には, たとえば,

```
Plot[Sin[x], {x, 0, 2 Pi}]
```

と入力すると, 図 1 のようなグラフィックスが画面上に出力される。ここで, `Sin[x]` は $\sin x$ という関数を示す数式を, `{x, 0, 2 Pi}`は x の範囲が $0 \leq x \leq 2\pi$ であることを示している。そして, `Plot` は定義式と定義域のデータをもとに関数のグラフを「描け」という命令 (コマンド) であると一応考えることができる。

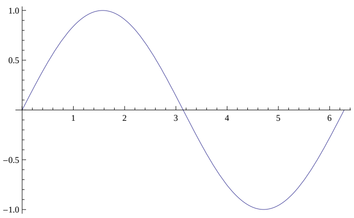

図 1　命令 Plot の出力結果の例

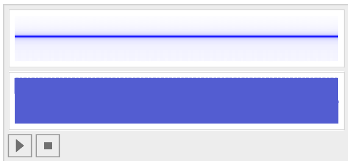

図 2　命令 Play の出力結果の例

前述の命令の部分 `Plot` を `Play` に代えると, *Mathematica* はグラフを描く代わりにそのグラフを波形とする音をスピーカーから出す。つまり, 数式を音データに変えて出力するわけである。たとえば

```
Play[Sin[440 2 Pi t], {t, 0, 1}]
```

と入力する (この意味は以下に述べる) と, コンピュータの画面に図 2 が表示される。この図で $\boxed{\triangleright}$ の部分をマウスでクリックすると,「演奏」が始まる。ここで, `Sin[440 2 Pi t]` は $y=\sin(440\times 2\pi t)$

* 東京工芸大学工学部基礎教育研究センター 准教授
2012 年 9 月 14 日 受理

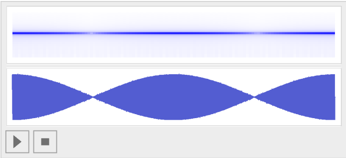

図 3　音のうなりのグラフ

という関数を示す数式を表している。また，t は時間で単位は秒である。従って，この式を実行すると，この関数を波形とする音を 1 分間演奏するのである。$\sin x$ は周期 2π だから，上述の関数は 1 秒間に 440 回の振動をするサイン波を音として出力することになる。なお，振動数 (= 周波数) の 440Hz は音楽では A(ドイツ語：アー) の音の基準の高さとされている。

2　音のうなりの実験

Mathematica で音を出す方法がわかった。要するに，どのような数式でも，`Play[ ]` という命令の中に入れれば，それをグラフとする音を発生してくれるのである。

そこで，音を使った実験を行ってみよう。中学校の物理で学習する「音のうなり」という現象がある。周波数が近い 2 つの音を同時に発すると，人間の耳には音が大きくなったり小さくなったりが周期的に繰り返されるように聞こえる現象である。

試みに，周波数 440Hz の音波と周波数 442Hz の音波を同時に発してみよう。入力する式は次のようになる。

```
Play[
  Sin[440 2 Pi t] +
  Sin[442 2 Pi t], {t, 0, 1}]
```

すると，コンピュータの画面に図 3 が表示される。この図で $\boxed{\triangleright}$ の部分をマウスでクリックすると音が鳴り，「わーお，わーお，わ」のように聞こえる。演奏は 1 秒間で終わる。図に表示されている青い帯のようなものは，関数

$$y = \sin(440 \times 2\pi t) + \sin(442 \times 2\pi t)$$

のグラフであることがわかる。ここでは，振動の回数が多すぎて，「グラフの存在領域」しか読み取れない。存在領域の上下の境界線はそれ自身がサインカーブであるように見える。横軸が $0 \leq t \leq 1$ を示しているので，これは 1 秒間にちょうど 1 周期の分だけ変動する「コサインカーブ」，すなわち

$$y = \pm\cos(2\pi t)$$

である。

このことを式変形で確認してみよう。三角関数の「和積公式」

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

により，上記の関数 y は

$$y = 2\sin(441 \times 2\pi t)\cos(2\pi t)$$

とも表すことができる。

ここで，2 つの因子のうち，$\sin(441 \times 2\pi t)$ の部分が振動を表し，この部分は 1 秒間に 441 回の振動数で振動している。一方，$2\cos(2\pi t)$ の部分はグラフの「可動域」の幅を示している。

結局，振幅が 1 のサイン波を 2 つ重ねあわせると，時刻によって振幅方向の変位が $1+1=2$ になるとき (波の強めあい) と，変位が $1+(-1)=0$ になるとき (波の弱めあい) とがある。そして，音の強弱のパターンは 1 秒間に 2 回生起することになる。というのも，$2\cos(2\pi t)$ の周期は 1 秒だが，音の大きさは正の値しか取らないために人間の耳には音の大きさが関数 $|2\cos(2\pi t)|$ に従って変化しているように感じられ，したがって，音の大きさの周期は $\frac{1}{2}$ 秒になるからである。

2 つの音を同時に鳴らしたときの音が，それぞれの音の波形 (関数) の和で説明できることから，音についても，海の波と同じように「重ね合わせの原理」が適用できることがわかった。従って，以上で述べてきた「音のうなり」の現象は，音が波であることのひとつの証拠であると考えられる。

Mathematica を用いた実験では，音を数式で定義したり，定義した音を耳で聴いたり，波形を目で見たりすることができる。このことによって，確か

に音は波だと実感することができる。なお, 音叉を使った実験も同時に行うことができる。それによって, さらに理解が深まるだろう。

3　理想と現実と応用

東京立正高校数学部では, 今年度の課題として「音の数学」を取り上げている。ここでは, 部員である高校生がネットからオシロスコープの機能をもったソフトをダウンロードして, パソコンとマイクをつなぎ, いろいろな音を録音して波形を調べている。音叉の波形は理想的なサイン波に近いので, 上に書いた実験は音叉でも行うことができる。ところが, ピアノや木琴などの楽器を使った実験では必ずしも理論通りのうなりの回数を観測することができなかった。

これは, 一般の楽器では純粋な音の他にたくさんの倍音が含まれているためだろう。倍音の存在は, 楽器の音色を豊かにし, その楽器らしい音を出すためには致命的に重要なのだが, うなりの実験では原因と結果の関係が複数存在することになり, 解析が難しい。いろいろな音の成分どうしがうなりを起こし, どのうなりを聞けばよいのか人間の耳では判断ができない。

うなりはオーケストラの団員にとっては重要である。演奏前の調律では, うなりが聞こえないかどうか耳を澄ませながら全員が同じ A(アー) の音を出す。だいたい同じ高さに聞こえても, うなりが聞こえたら音が揃っていない。うなりの回数が 1 秒間に 1～2 回にまで下がってきたら, かなり近い音に揃った証拠である。

周波数が大きく違う音でもうなりは聞こえる。たとえば, 完全 5 度の音程の和音はよく調和してうなりは聞こえないはずである。ところが, 完全 5 度に非常に近いけれどわずかに周波数がずれた 2 つの音を聞くと, うなりのようなものが聞こえる。バイオリンのような弦楽器では弦は 4 本あり, 隣同士の弦は完全 5 度の音程になるように調律することになっている。このとき, 1 本の弦の高さを他の楽器と合わせれば, 残りの 3 本の弦は自分だけで調律することができる。

4　その他の実験

うなりの実験は単純だが, 音が波であることを確かめる重要な実験である。

音を使った実験のその他のテーマとしては, ドップラー効果がある。実際に耳で検知できるほどのドップラー効果を起こすには, 自動車程度の速度が必要になるので, 実験は難しい。そこで, 実験は, 救急車の音の聞こえ方などの日常的な体験やその録音で代えて, ドップラー効果が起こる仕組みを動画で図解するだけでもよいかもしれない。

5　数学と音楽

これまで, 関数はグラフを描いて形を見るものと思われてきたが, 新しいテクノロジの出現によって, 関数を音として聞いてその特徴をとらえられる可能性が出てきた。これによって, 関数の新たな視点からの性質が発見できるかもしれない。

また, 逆に音楽を数学的にとらえてみるという方向もある。有名な曲や美しいといわれることの多い曲の楽譜をコンピューター内のデータとして蓄積して解析すれば, 楽譜上だけで見ていたのでは気づかない特徴が現れてくるかもしれない。また, それによって, 自動作曲などに応用される可能性がある。

本稿は下記文献 [3] に加筆・修正したものである。

参考文献

[1] 中村英史, Mathematica が開く新しい世界—最先端の教育と研究のプラットフォーム, Wolfram Research Asia Limited 社内資料, 2012

[2] 植野義明, バイオリンの音程と比の指導—小学生への実践から—, 2012 年度 数学教育学会秋季例会 発表論文集, pp.17–19.

[3] 植野義明, Matheamtica による音のシミュレーション, 2012 年度 数学教育学会秋季例会 発表論文集, pp.150–152.

[4] 三浦康秀, 音楽の中の数理, 三恵社, 2012.

[5] 植野義明, 音の数学, 2012 年度 日本・中国 数学教育国際会議 発表論文集, pp.148–153.