数学のメタファー

植野義明*

概要

レイコフとヌーニェスが [1] で展開している数学的概念の分析学は, 言語学に起源をもつメタファー理論を数学的概念に応用したものである。人間がなぜ数学を理解できるのかという問題を考えるとき, 認知科学, 脳神経科学の最近の成果から学べることが多い。実証的なデータに基づくこれらの科学が示すのは, 人間が実際に数学的概念やその他の概念を理解するやり方により近いメカニズムである。生徒の発達についてより深く, 現実に即して理解することは, 教材研究や授業実践に役立つ。数学的な考え方のよさを人類共通の財産として活用するためにも, 数学を理解する脳のメカニズムに注意を払うことは有用である。

検索語：数学教育, 認知科学, 数学の概念分析学, メタファー

1　はじめに

言語学者 George Lakoff と心理学者 Rafael E. Núñez は共著 [1] の前書きで, 認知的視点から捉えた**数学的概念の分析学**—数学の認知科学—を立ち上げたいと書いている。

認知科学では, 人間の概念をそれを理解する脳のメカニズムに基づいて分析することを目指している。それが概念分析学である。脳のメカニズムは完全に解明されてはいないが, 1960〜70 年代の認知科学で言われていた「人間の脳はコンピュータのようなものである」というドグマは大幅に変更されてきている。例えば, 脳にはさまざまなモジュールが集まっているが, 数学の理解に特化されたモジュールは存在しない。数学に関係するのは, 言語を操るモジュール, 図形的イメージを操るモジュール, 指の運動・感覚モジュール, 3〜4 個くらいまでのものの個数を瞬時に把握し, 計算を行なうモジュールなどである。量の大小感覚を伴って数を理解するのは自然なやり方であり, おそらくはそのためのモジュールが存在するのではないかと予想されているが, 文字式を規則に従って変形するような「計算」は別の部分が司っているらしいということが脳疾患の症例から言われている。

本稿では, 数学教育の立場から, 実証的データに基づく新しい認知科学の結果を, 数学の現場教師の実践にどのように生かすべきであるかを論じたい。

現在, 日本では脳科学の目覚ましい発展がよく話題になっており, そのことは数学教育とも無縁ではない。実際, 算数の問題を解くときに, 脳の中でどのような変化が見られるかといった実験が各地の大学で計画, 実行されている。このような脳科学の進展によって, 数学教育の立ち位置が微妙に変化してきていると感じる。今まで, 数学科教員は生徒の数学理解に関して疑問を感じることがあると, 数学者に質問するしか方法がなかった。しかし, 教育現場で起こってくる問題の中には, 数学者ではなかなか答えにくいものも多い。脳科学が身近な学問になるにつれて, 人間の脳の中で実際にどんなことが起こっているのかを実証的なデータを通して理解できるようになってきた。より生徒の心理プロセスの実態に即した教育を行える可能性が見えてきたといえるだろう。

2　数学の基礎と認知科学

数学の認知科学とは何だろうか。それは数学の基礎たりうる学問であろうか。数学の認知科学を学

* Associate professor, General Education and Research Center, Tokyo Polytechnic University,
Received Sept.17, 2010.

ぶことは特にどのような人たちにとって有効だろうか。

2.1 数学史における数学の基礎付け運動

数学史では, 19 世紀後半から 20 世紀初頭において, 数学を厳密化する動きがあった。ニュートン以来, 微積分は科学の道具として非常に発展してきたが, 厳密性がそれに追いついていない部分があった。関数の概念や収束の定義に対する見直しをする中で, デデキント, クロネッカー, カントールなどにより, 実数論, 集合論が起こった。また, 数学から矛盾を排するために, 確かな土台の上に数学の理論体系全体を基礎づける必要が叫ばれ, 公理的集合論によって数学を「基礎づける」運動があった。

クロネッカーは「物理学までも含めた数学の算術化をしなければならない」と書いている[*1]。算術は人間にとって最も自然で, 生まれて最初にであう整合的な体系であり, 単純であるだけに矛盾はないと考えられている。算術化 (arithmetization) はまた離散化 (discretization) とも呼ばれるが, それは数学の発達のひとつの段階として自然な段階であった。カントルが集合論を建設したとき, 数学界からさまざまな批判があったが, 集合のような単純な概念を無限を扱う数学の基礎に据えようとしたからであった。

20 世紀に入り, ブルバキが集合論を基礎とした全数学の書き換えを実行しようと試みた。ブルバキ流の数学は世界の数学界を席巻したかのように見える。空集合の記号 $\emptyset$ などが世界の数学者の共通語になり, 新しい分野を学ぶときもいつも入口は同じであるという安心感に寄与した。

しかし, 数学が牽引したといわれた 20 世紀構造主義の思想が他の分野に波及し, とくに哲学や心理学にも強い影響を及ぼしたことによって, 西洋思想は行き過ぎた公理主義の影響を受けることとなった。

2.2 数学教育の現代化運動

スプートニクショックを受けて, 1960 年代から 70 年代にかけて世界中の小学校から高校までの教室を巻き込んだ数学教育の現代化運動は, 現在では歴史的な誤謬ということになっている。現代化運動の熱がまだ冷めていなかった当時は, 現代化運動それ自体は間違っておらず, 現場の教師の理解が十分でなかったことが敗因であるとみなす空気があったが, 21 世紀に入った現在では, 誰もがはっきりと数学教育の現代化は間違っていたと言っている。だが, 何が間違っていたのか。そして, なぜ間違ってしまったのだろうか。

数学教育が数学史とある程度連動するように進んできたことは, 自然な成り行きであったとはいえ, 一部には行き過ぎもあったといえる。公理的集合論や数学基礎論が目指している「数学の基礎付け」の動機は, 数学の中からなるべく矛盾を排したり, 数学自体を分りやすいモデルの上に構築しなおすことによって, 数学的命題間の関係をより深く理解することである。

一方, 数学教育にとって重要な「数学理解の基礎」とは, 児童・生徒がなぜ数学を理解できるのか (あるいは, できないのか) ということが根本問題であり, それに付随して, 数学の理解には発達段階があるのかどうか, 数学的概念は日常生活のどのような概念と関係しているのか, どのような状態になったときに人間はある概念を理解したと感じるのか, などの問題が重要である。

集合論はその上に数学を建設するためのひとつのモデルであるが, それが唯一ではなく, また, 生徒の数学理解を必然的に基礎づけるものでもない。数学的概念にはさまざまな起源があり, 人間による数学的概念の理解にもさまざまな自由度がある。集合論はその中で比較的うまくいった数学理解の方法論であり, 現代の数学者に受け入れられることによって, 数学者の間での世界的標準になっている。これからの数学教育では, 数学を基礎付けるモデルと数学理解の人間的な基礎をはっきり区別して扱わなければならない。

要約していうと, たとえば具体的に高校でベクトルを教えたときに, それを生徒が理解できるのは, 集合論に即してすべての定理の証明を形式的に遂行することを通してではない。数学者が数学を理解す

[*1] 現代的な言い方では, 代数化という方が相応しい。

るときとも共通するが, ベクトルという概念に人間的に自然な意味があり, それぞれの定理にも人間の日常体験に即した意味があるから理解できるのである。そして, 一度そのようにして理解した概念は, 体験していない場面にも適用できる。

3　数学理解の基礎とメタファーの使用

小平邦彦は [5] の中で,「数学を理解するとは, 数学的現象を「数覚」という感覚で「見る」ことである.「数覚」は感覚なので頭の良し悪しとは関係がない」と書いている。

スタニスラス・ドゥアンヌ [2] では数覚について, 進化生物学的に説明されている。数覚は動物にもあり, ヒトの新生児でも実験で確かめることができる。脳の中に, 数を知覚することに特化されたモジュールが存在し, おそらく, 生物にとって生存に必要な機能なのであろう。だが, その範囲は非常に限られている。足し算, 引き算ができるのは高々 3 までの自然数であり, それ以上の数になると大雑把な量の感覚しかない。耳で聞いて分かる数の範囲はもう少し広いが, それは記憶できるという意味であって, 計算はできない。

このように, [2] では「数覚」が偶然キーワードとして登場しているが, 数学者がその存在を予想し, あるいは感覚的に感じている「数覚」と, 生物学的に検証できる数覚との間には大きな隔たりがある。数学者が主張する数覚は, 脳の一つのモジュールではなく, 複合的な概念形成の結果生じている脳内の現象である。[1] によると, この概念形成にはメタファーというメカニズムが重要な役割を果たしている。

メタファーの仕組みは脳生理学的に解明されているわけではないが, 実験によると, 簡単な算数の課題を与えられた被験者の脳の中では, 次々にいろいろな部分が「発火」, すなわち, 活性化することが観察されている。そして, 数学ではさまざまな複合的な概念が使われる。このような状況証拠から, レイコフ [1] はメファターという認知メカニズムが概念と概念を繋いで複合的な概念を構築するのに使われているという仮説を立てた。

言語学において, 数学のメタファーより以前にメタファーが発見されていた。レイコフは, 言語現象におけるメタファーの使用は離れた文化の間でも共通のものがあり, それは, 人類であれば生理学的に共有している脳の構造に原因があるだろうと推測している。数学についても同じことが言える。全く異なる文化的背景をもっていても, 教育を受けた人間ならば標準的な数学の内容を理解できるのは, 人類として同じ脳の構造を共有しているからであろう。

数学のメタファーが使用されている例として, [1] では単位円が扱われている。単位円は, 図形としての円の概念と平面上の座標の概念からなるメタファーブレンドである。

4　メタファーの存在の論拠

レイコフとヌーニェス [1] では, 集合論における無限概念, 微積分における無限小概念, 群論における同型概念, 複素数の幾何学的理解とオイラーの関係式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ など, 高校から大学初年級程度のやや高度な数学に現れる数学的概念の概念分析に相当のページ数が割かれている。

認知科学, 心理学, 神経生理学などの分野にわたる論拠については, [1] では初めの方の数章で簡単に触れられているだけであるが, それらについては [2] でより詳しく解説されている。[2] では, たとえば, 2 桁以上の掛け算を含む算数の範囲の計算能力について, 脳のメカニズムの解明がなされている。ヒトを含む動物の数概念はあいまいな概数を把握する量感覚であって, コンピュータでの計算のような記号を用いたものとは性質が違っている。これを説明するのに, 脳内に計器のようなアナログ的な機能をもったモジュールがあるとするモデルで説明している。この説明は現実の実験結果とうまく合う。数直線に当たるものは小学校の課程を経て徐々に形成されるとしている。その他, 脳疾患の患者によって得られる貴重なデータについて触れられている。

5 結論

数学の認知科学的研究, とくに, 数学的概念のメタファーによる研究は, 数学教育を重要な応用分野としている。そこには, 数学教育が, 言語学, 心理学などの臨床的な分野の研究と連携する可能性が秘められている。現在, 脳内の活動がリアルタイムで測定できるようになり, さまざまな実験が可能となっている。さまざまな環境の中で展開される教育実践の経験に合致し, 現場のニーズに応える数学教育の理論展開が俟たれる。本論では述べることができなかったが, 数理哲学上のさまざまな立場についても認知科学の立場から批判, ないしは検討することができる。

参考文献

[1] George Lakoff, Rafael E. Núñez, Where Mathematics Comes From, Basic Books, 2000.

[2] スタニスラス・ドゥアンヌ著, 長谷川眞理子, 小林哲生訳, 数覚とは何か—心が数を創り, 操る仕組み, 早川書房 (2010)

[3] 茂木健一郎, 脳の中の小さな神々, 柏書房 (2004)

[4] 茂木健一郎, 脳と仮想 (新潮文庫), 新潮社 (2007)

[5] 小平邦彦, 怠け数学者の記 (岩波現代文庫), 岩波書店 (2000)

[6] 国岡高宏, 数学教育におけるアナロジーの研究 (2) —概念メタファーによる数学学習の分析—, 全国数学教育学会誌「数学教育学研究」第 15 巻, 第 2 号 (2009), pp.17–27. http://hdl.handle.net/10132/2663