

カリソンの問題について

植野義明*

概要

ひとつの内角が 60° である菱形をカリソンという。 $3n^2$ 個のカリソンを 1 辺が n である正六角形の中に詰め込むとき、3 つの方向にあるカリソンの個数は必ず等しくなる。このことを証明せよというのがカリソンの問題である。本稿では、この問題を考える。

この問題には、直感的な解答があり、それは、図形を立体的に見ることによって、立方体の積上げの問題と同値であることを見抜けばよいというものである。実際、そのような問題の言い換えに気がつけば、3 次元空間内の 3 つの直交する軸の間の対称性から結論は明らかである。しかし、カリソンの問題と空間の問題との間の 1 対 1 の対応の存在を厳密に示すことは、直感的洞察とはまた別の話である。

対応を式で書いて、厳密にそれが 1 対 1 の対応であることを示せば証明になるが、そうしてしまうと、逆に直観に訴えるものがない。文献に現われている証明の中には [1] のように方針だけを示したものもあり、よく考えるとどこかで直観を使っているのではないと思われる。そこで、本稿では、適度に直観的でもあり、適度に厳密でもある証明を与えることにした。

ここで取り上げたカリソンの問題は、中学校、高等学校における「数学的活動」(2008 年 3 月に告示された新学習指導要領にある用語)におけるひとつの題材を提供できるものと思われる。そこで、本稿では、図を多くし、またカリソンの問題をめぐる話題も紹介した。初等数学において、いろいろな楽しみ方ができる問題であると思う。

1 カリソンの問題とは？

ひとつの内角が 60° である菱形を (南仏名産の菓자에因んで) カリソン (calisson) ということにする^{*1}。 $3n^2$ 個のカリソンを正六角形の箱に入れて売っていることがあるらしく、そこから、次のカリソンの問題が自然に生れる。以下では、単位の長さの辺をもつカリソンを専ら考える。

問題 A 1 辺が n である正六角形にカリソンを充填するとき、どのような詰め合わせ方をしても、三つの方向のカリソンがそれぞれ n^2 個ずつ存在する。このことを証明せよ。

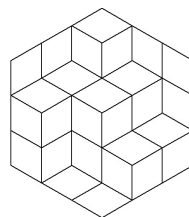


図 1 カリソンの並べ方のひとつ ($n = 3$)

例えば、図 1 を見ると、どの向きのカリソンもそれぞれ 9 個ずつ存在する。

この問題を考える前に、次のことに注意しておく。

1. $n = 1$ の場合は図 2 に示す 2 通りの詰め方しかないので、結論は明らかである。この場合、三つの方向のカリソンがそれぞれ 1 個ずつ存在する。

2. カリソンの総数が $3n^2$ であることは図 2 の左の図の自然な拡張である図 3 のような「自明な」詰め方が存在すること、そして、どのような詰め方をしても全体の面積は変わらないことから明らかである。

* Associate professor, General Education and Research Center, Tokyo Polytechnic University, Received Oct.12, 2009.

^{*1} 日本語の「菱形」は「菱」という植物の実の形から来ているらしく、「花菱」などの家紋にデザイン化されたその鋭角は 60° よりも大きいようだ。また、雛祭りに用いる菱餅もこの菱の形に近いものが多い。日本人のイメージする「菱形」の原型が菱の実の形にあるのかもしれない。

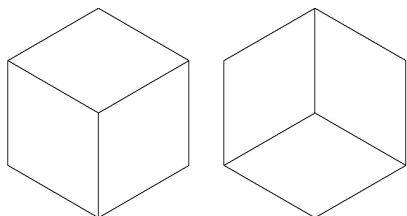


図2 $n = 1$ のときのカリソンの並べ方
(2通りしかない)

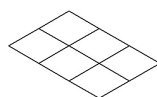


図5 平行四辺形に退化した箱へのカリソンの詰め方 (一通りしかない)

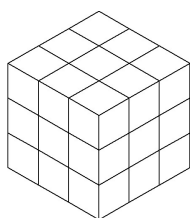


図3 カリソンの自明な並べ方の例 ($n = 3$)

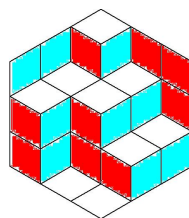


図6 問題を立体的な視点からみる方法

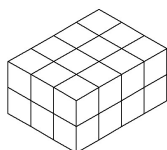


図4 正六角形でない箱へのカリソンの詰め込み

3. もうひとつ簡単な注意をしておこう。以下の証明から明らかに分かることなのだが、各辺の長さが順に a, b, c, a, b, c であって、各頂点の内角が 120° である六角形の箱にカリソンを詰めることが常に可能であること、そして、そのときにも、それぞれの向きのカリソンの個数はパラメータ a, b, c だけによって (箱詰めする前から) 決まっていることである。

このときの個数は具体的に図4から推測される値、すなわち、 ab, bc, ca である。

4. このことの特な場合として、 a, b, c のうちの1つだけが0に等しい場合にも主張は成り立つ。例えば $c = 0$ とすると、それぞれのカリソンの個数は $ab, 0, 0$ である。すなわち、この場合はカリソンの並べ方は一通りしかなく、そのときすべてのカリ

ソンは同じ向きに並ぶ (図5を参照)。

2 証明のアイデア

証明を始める前に、証明のアイデアを示しておく。簡単に言うと、問題を3次的に見るということである。例えば、図1の詰め方に対しては、図6のようにそれぞれの向きごとにカリソンを色分けする。この図をじっと見ているとだんだんと立体的に見えてくるから不思議なものである。そうすればしめたもので、各方向のカリソンが同数存在することは自明に思えてくる。実際、小さな立方体を部屋の隅に積み重ねた図であると見なせば、この図を真上から眺めたときに見える正方形の個数は床の面積に等しく、右横から眺めたときに見える正方形の個数は左の壁の面積に等しく、左横から眺めたときに見える正方形の個数は右の壁の面積に等しいことが分かる。ただし、1辺の長さを1とする。

これはすばらしい発想の転換である。平面の問題を空間の問題に拡張することによって問題が一気に解決することはよくある。その有名な例は射影幾何学におけるデザルグの定理である。

ただし、カリソンの問題に関しては、「立体的に見るとそう見えるから自明である」では証明にならな

い。この説明のどこが厳密性に欠けるのだろうか。
このことについては後述したい。

3 補題

ここでは、簡単な補題に注意する。

カリソンの問題が 2 次元のカリソンを 2 次元の箱に詰めることに関する問題であるとする、では、ここから導かれる 1 次元の直線上の問題とその解答は何だろうか。考察の結果、ある見地からは、次の問題がそれに当たると言える。

問題 B $2n$ 個の整数 x_1, x_2, \dots, x_{2n} があって、値はすべて 1 または -1 であり、総和が 0 であるならば、これらの中には、1 に等しいものと -1 に等しいものが同数存在することを示せ。

この問題の証明は簡単であるので、省略する。

例えば、次のようにこの問題を言い換えることができる。

問題 C 数直線上ではじめ原点に位置していた動く点が、1 秒ごとに右あるいは左に単位の長さだけ移動し、 $2n$ 秒後に原点に戻っていたとする。このとき、途中で右に移動した回数と左に移動した回数とは等しい。

次の問題はどうか。

問題 D 平面上にカリソン ABCD がある。これに隣接して、辺 CD を共有するカリソン CDEF がある。これに隣接して、辺 EF を共有するカリソン EFGH がある。以下同様に、 m 個のカリソンが繋がっているとす。最初の辺 AB とそれに平行な最後の辺 UV との間に $\angle ABV = \pi/2$ の関係があるならば、 m は偶数であり、これらのカリソンの半数は同じ向き、残りの半数は別の向きである (図 7 を参照)。

問題 D も問題 B と本質的に同じであることが分かるだろう。

決められた線分 AB を辺として含むカリソンは 2 通りの向きしか持ち得ない。いま、すべてのカリソ

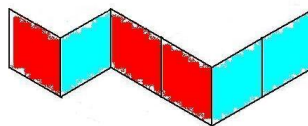


図 7 カリソンの問題に対応する 1 次元の問題

ンを直線 AB 上に正射影してみると、隣接するそれぞれのカリソンのつなげ方は、直線 AB を数直線とみなしたとき、その上の正または負の方向に向かう大きさ $\frac{1}{2}$ のベクトルに置き換えられる。このことから、問題 D は問題 C と本質的に同じであることが分かる。

このようなカリソンの列を以下では「線分 AB と線分 UV をつなぐ道」と呼ぶことにしよう。

4 証明

このセクションでは問題 A の解答を与える。

正六角形 ABCDEF の平行な一組の辺 AB と ED を考える。

線分 AB, 線分 ED をそれぞれ n 等分して、A の隣の分点を A_1 , E の隣の分点を E_1 とする。

正六角形 ABCDEF を充填するカリソンの任意の並べ方をひとつ考える。

このとき、線分 AA_1 を 1 辺とするカリソンが唯一つ存在する。そのカリソンにおいて、辺 AA_1 の対辺を考える。その辺を共有してそれに隣接する次のカリソンを考える。そのカリソンにおいて、いま考えた辺の対辺を考える。その対辺を共有してそれに隣接する次のカリソンを考える。このようにしてどんどん進んでいくと、いつかは正六角形の辺 ED に到達する。これは、 $2n$ 個のカリソンからなる道である。

こうして、線分 AB を n 等分してできる各線分から、線分 ED を n 等分してできるどれかの線分に至る道ができる。

それぞれの道は幅が 1 の帯状の領域をなしているので、互いに交叉することはありえない。

正六角形の中に並べたすべてのカリソンのうち、

AB に平行な辺を含むものは、これら n 個の道のどれかには必ず含まれる。なぜなら、AB に平行な辺を含むどのカリソンからも道を作り可能な限り延長していくと、必ず辺 AB および辺 EF 上にまで到達して止まるからである。

したがって、これらの n 本の道によって、線分 AA_1 は線分 EE_1 に、線分 A_1A_2 は線分 E_1E_2 に、 \dots 、線分 $A_{n-1}A_n$ は線分 $E_{n-1}E_n$ にいうように、順次に対応する。

ここで、問題 D の結果より、それぞれの道に含まれる ABCO と同じ向きのカリソンと EDCO と同じ向きのカリソンの個数は等しい^{*2}。

他の二つの向きの組み合わせについても同数性が同じようにいえる。これで、三つの向きのカリソンがそれぞれ同数存在することが証明された。

5 立体幾何的解釈はいつでも可能か

上の証明でもちいた「平行な線分をつなぐ道」の考え方をさらに用いると、カリソンの並べ方と、空間内で立方体を積み上げる積み方とが 1 対 1 に対応することが分かる。 n 本の「道」が互いに交差しないことから、立方体の積み上げ方を一意的に指定することができ、それぞれのカリソンを立方体の表面の正方形に対応させることができるのである。

例として、 $n = 10$ の場合に可能なカリソンの配置のひとつを図 8 に示しておいた。

さて、「幾何学的洞察」に頼ることについて、「危険である」とか、「厳密性に欠ける」と言われる理由は、たまたま目にしたカリソンの並べ方が立体的に見えたとしても、すべてのカリソンの配置が立体的配置と対応するかどうかは分からないからである。我々はたまたま都合のよい配置だけを目にしているのかもしれない。カリソンの配置はサイズが大きくなればまさに組み合わせ論的な個数になるので、人間の目が空間認識に優れているからといって、そのすべてを目で見てチェックするわけにはいかない。カリソンの 2 次元配置から立方体の空間配置を構成する一般的・具体的な方法を示さなければ、証明した

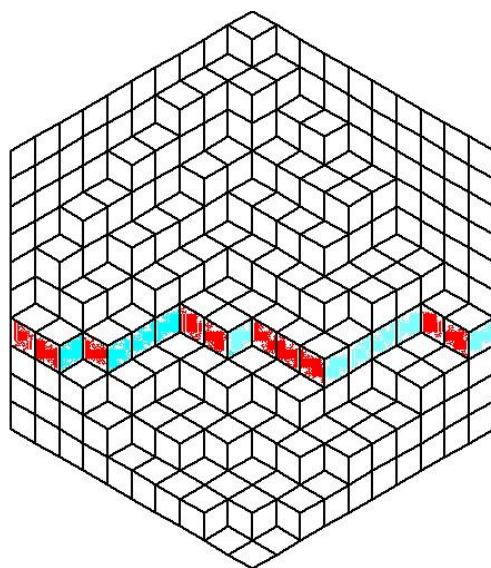


図 8 カリソンの並べ方の一例 ($n = 10$)

ことにならない。

このことに十分に注意を払うならば、与えられた問題の対象を空間の幾何学的配置と対応づけることは、むしろ発想を豊かにし、証明のヒントを得るための有効な手段になる。例えば、上記の正六角形に関する結果を少し拡張した次のような定理を発見することも可能となるのである。

定理

1. 各辺の長さが順に a, b, c, a, b, c であって、各頂点の内角が 120° である六角形の箱にカリソンを詰めることは常に可能である。

2. そのようなカリソンの並べ方と、 $a \times b \times c$ の直方体 $[0, a] \times [0, b] \times [0, c]$ の中に条件

立方体 $C(i, j, k)$ がそこにあれば、 $i \geq 1$ である限り、立方体 $C(i-1, j, k)$ も存在する。
 j, k についても同様である。

を満たすように $1 \times 1 \times 1$ の立方体 $C(i, j, k)$ を配置する方法とが 1 対 1 に対応する。

ただし、ここで立方体 $C(i, j, k)$ とは、空間内で $i-1 \leq x \leq i, j-1 \leq y \leq j, k-1 \leq z \leq k$ を

^{*2} ただし、正六角形の中心を O とした。

満たす点 (x, y) の全体 $[i-1, i] \times [j-1, j] \times [k-1, k]$ を表す。このような領域は平面分割 (plane partition) と言い、その総数については、マックメイヨン (MacMahon) による感動的に美しい公式

$$\prod_{i=0}^{a-1} \prod_{j=0}^{b-1} \prod_{k=0}^{c-1} \frac{i+j+k+2}{i+j+k+1}$$

が知られている^{*3}。組み合わせ論の歴史はこの公式によって始まったと言われている。

参考文献

- [1] G. David, C. Tomei, The problem of Calissons, American Mathematical Monthly, Volume 96, Issue 5 (May 1989), p.429 - 431.
- [2] P. A. MacMahon, Combinatory analysis, vol. 2, Cambridge University Press, 1916; reprinted by Chelsea, New York, 1960.
- [3] N. C. Saldanha and C. Tomei, An overview of domino and lozenge tilings, Resenhas IME-USP, 2(2), 239-252, (1995).
- [4] W. P. Thurston, Conway's tiling groups, Amer. Math. Monthly, 97, 8, 757-773 (1990).

^{*3} この積が整数になるということだけでも感動する。