

An Elementary Proof of the Generalized Laplace Expansion Formula for Permanents

Yoshiaki UENO *, Kazuhisa MAEHARA †

概要

In the previous article (2002), we gave an elementary proof of the generalized Laplace expansion formula for determinants. In this article we prove the generalized Laplace-type development and the formula for the permanent of products of matrices, which share the same tune with the formulas for determinants.

1 パーマネントの定義

行列式の定義において $\text{sgn} : S_n \rightarrow \{\pm 1\}$ の代わりに自明な準同型 $S_n \rightarrow \{1\}$ を用いるとパーマネント (permanent) が得られる。

Definition 1.1. [1] $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ を標準基底とする。 $\mathbf{a}_1 = \sum_j x_{1j} \mathbf{e}_j, \dots, \mathbf{a}_n = \sum_j x_{nj} \mathbf{e}_j$ と任意のベクトルを 1 次結合でかくとき、

$$\text{Per}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n) = \sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

をパーマネントという。

[2] 与えられた基底に対して、パーマネントは対称 n 重線形形式である。

[3] すべての $\sigma \in S_n$ に対して $\text{Per}(\mathbf{e}_{\sigma(1)}, \mathbf{e}_{\sigma(2)}, \dots, \mathbf{e}_{\sigma(n)}) = \text{Per}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n)$ かつ ρ が $\text{Map}(\{1, \dots, \}, \{1, \dots, n\})$ の全射ではないとき、 $\text{Per}(\mathbf{e}_{\rho(1)}, \dots, \mathbf{e}_{\rho(n)}) = 0$ とする。…… (*)

[4] $\text{Per}(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n) = 1$ を正規性という。

[5] $\{1, 2, \dots, n\}$ の s 個の部分集合 Y, X の順列 $I = (i_1 i_2 \cdots i_s), J = (j_1 j_2 \cdots j_s)$ に対して、 $a_{I,J} = a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \cdots a_{i_s j_s}$ と記す。 $\sum_{\sigma \in S_Y} a_{\sigma I, J}$ を (I, J) 小パーマネント (minor permanents) といい、 $A_{I,J}$ とかく。実際は順列のとりかたによらないので、 $A_{Y,X}$ と書いてもよい。

2 パーマネントの性質

命題 1. [1] 逆に f が n 重線形形式かつ標準基底に対して (*) の性質がみたされるなら

$$\begin{aligned} f(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n) &= \sum_{\sigma \in \text{Map}(\{1, \dots, n\}, \{1, \dots, n\})} f(\mathbf{e}_{\sigma(1)}, \mathbf{e}_{\sigma(2)}, \dots, \mathbf{e}_{\sigma(n)}) a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} \\ &= f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n) \sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} \\ &= f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n) \text{Per}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n) \end{aligned}$$

[2] よって、 n 重線形形式かつ (*) の性質と正規性 $f(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n) = 1$ によってパーマネントが特徴づけられる。

[3] 正方行列 A から $I = (i_1 \cdots i_p)$ 行、 $J = (j_1 \cdots j_p)$ 列を取り出した行列のパーマネントを小パーマネント (Minor permanent) といい、 $A_{I,J}$ とかく。

* Associate professor, General Education and Research Center, Tokyo Polytechnic University

† Associate professor, General Education and Research Center, Tokyo Polytechnic University

Received Sept. 20, 2007

命題 2. [1] 行列の転置に関する不変性, すなわち

$$\text{Per}({}^t A) = \text{Per}(A)$$

[2] n 次正方行列 A が与えられたとする。 $(A$ の列の分割) n を自然数 n_1, n_2, \dots, n_s に分割すると $n = n_1 + n_2 + \dots + n_s$ となる。そのとき, 集合 $\{1, 2, \dots, n\}$ を n_1 個, n_2 個, \dots, n_s 個の部分集合 X_1, X_2, \dots, X_s に分割する。 X_1, X_2, \dots, X_s の順列 J_1, J_2, \dots, J_s を固定する。(たとえば, J_i は X_i の各元を小さい順に並べてできる順列とする。) そのとき, 次の展開式を得る。

$$\text{Per}(A) = \sum_{(I_1, I_2, \dots, I_s)} A_{I_1 J_1} A_{I_2 J_2} \cdots A_{I_s J_s}$$

ここに, $(A$ の行の分割) 和の項数は $n!/(n_1! n_2! \cdots n_s!)$ であり, $\{1, 2, \dots, n\}$ の n_1 個, n_2 個, \dots, n_s 個の部分集合 Y_1, Y_2, \dots, Y_s への分割の数である。 I_1, I_2, \dots, I_s は Y_1, Y_2, \dots, Y_s の順列のひとつとする。そして, A_{IJ} は小パーマメントとする。行と列の役割を代えてもよいので, つぎも成り立つ。

$$\text{Per}(A) = \sum_{(J_1, J_2, \dots, J_s)} A_{I_1 J_1} A_{I_2 J_2} \cdots A_{I_s J_s}$$

(証明) A の列を n_1, n_2, \dots, n_s と分割する。分割のそれぞれに対するひとつの順列を J_1, \dots, J_s として固定する。パーマメントの定義

$$\text{Per}(A) = \sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} a_{\sigma(3)3} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

において, 積の順番は交換可能であることに注意すると, パーマメントは次のようにかける。

$$\text{Per}(A) = \sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma J_1 J_1} a_{\sigma J_2 J_2} \cdots a_{\sigma J_s J_s}$$

$\{1, 2, 3, \dots, n\}$ を $n_1, n_2, n_3, \dots, n_s$ ($n = n_1 + n_2 + n_3 + \dots + n_s$) に分割する。そのときの分割の数は $n!/(n_1! n_2! n_3! \cdots n_s!)$ である。その分割の 1 つを Y_1, Y_2, \dots, Y_s とする。 Y_1, Y_2, \dots, Y_s の順列 $I_1, I_2, I_3, \dots, I_s$ をそれぞれ 1 つとる。すなわち, $(I_1, I_2, I_3, \dots, I_s)$ は $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ の順列である。このとき, $n! = n!/(n_1! n_2! n_3! \cdots n_s!) \times n_1! n_2! n_3! \cdots n_s!$ に注意する。

$$\text{Per}(A) = \sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma J_1 J_1} a_{\sigma J_2 J_2} \cdots a_{\sigma J_s J_s}$$

$\{\sigma \in S_n \mid \sigma(J_1) = I_1, \sigma(J_2) = I_2, \dots, \sigma(J_s) = I_s\} \cong S_{Y_1} \times S_{Y_2} \times S_{Y_3} \cdots \times S_{Y_s}$ の個数は $n_1! n_2! n_3! \cdots n_s!$ である。

$$\text{Per}(A) = \sum_{(I_1, I_2, I_3, \dots, I_s)} \sum_{\sigma_1 \in S_{Y_1}} \sum_{\sigma_2 \in S_{Y_2}} \cdots \sum_{\sigma_s \in S_{Y_s}} a_{\sigma_1 I_1 J_1} a_{\sigma_2 I_2 J_2} \cdots a_{\sigma_s I_s J_s}$$

ここに, $\sum_{\sigma_i \in S_{Y_i}} a_{\sigma_i(I_i)J_i} = A_{I_i, J_i}$ である。

$$\text{Per}(A) = \sum_{(I_1, I_2, \dots, I_s)} A_{I_1 J_1} A_{I_2 J_2} \cdots A_{I_s J_s}$$

[3] 各型がそれぞれ $(n, \alpha), (\alpha, \beta), \dots, (\gamma, n)$ 型の行列 A, B, \dots, C が与えられたとする。 $AB \cdots C$ の ij 成分は $x_{ij} = \sum_{1 \leq s \leq \alpha} \sum_{1 \leq t \leq \beta} \cdots \sum_{1 \leq u \leq \gamma} a_{is} b_{st} \cdots c_{uj}$ で与えられる。

$$\text{Per}(AB \cdots C) = \sum_{\sigma \in S_n} x_{\sigma(1)1} x_{\sigma(2)2} \cdots x_{\sigma(n)n}$$

である。さて, $I = (12 \cdots n)$ として,

$$\text{Per}(AB \cdots C) = \sum_{\sigma \in S_n} \sum_{J \in \{1, 2, \dots, \alpha\}^n} \sum_{K \in \{1, 2, \dots, \beta\}^n} \cdots \sum_{L \in \{1, 2, \dots, \gamma\}^n} a_{\sigma I J} b_{J K} \cdots c_{L I}$$

となる。 $J = (j_1 j_2 \cdots j_n)$ のとき,

$$A_{\sigma I J} = \text{Per} \begin{pmatrix} a_{\sigma(1)j_1} & a_{\sigma(1)j_2} & \cdots & a_{\sigma(1)j_n} \\ a_{\sigma(2)j_1} & a_{\sigma(2)j_2} & \cdots & a_{\sigma(2)j_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{\sigma(n)j_1} & a_{\sigma(n)j_2} & \cdots & a_{\sigma(n)j_n} \end{pmatrix} = \sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma I J}$$

と置く。

$$\text{Per}(AB \cdots C) = \sum_{J \in \{1, 2, \dots, \alpha\}^n} \sum_{K \in \{1, 2, \dots, \beta\}^n} \cdots \sum_{L \in \{1, 2, \dots, \gamma\}^n} a_{IJ} b_{JK} \cdots c_{LI}$$

J が $\{1, 2, \dots, \alpha\}^n$ に含まれるとき, J に n_1, n_2, \dots, n_p 個の重複元がそれぞれあるとする。ここに, $n_1 + n_2 + \cdots + n_p = n$ である。 $n_J! = n_1! n_2! \cdots n_p!$ とかく。そのとき,

$$\text{Per}(AB \cdots C) = \sum_J \sum_K \cdots \sum_L A_{IJ} \frac{1}{n_J!} B_{JK} \cdots \frac{1}{n_L!} C_{LI}$$

ここに, J は ${}_{\alpha}H_n$ 通りの $\{1, 2, \dots, \alpha\}$ から n 個重複を許して取り出す組み合わせの集合の元を並べた 1 つの組, 重複順列とする。同様に, K は ${}_{\beta}H_n$ 通りの $\{1, 2, \dots, \beta\}$ から n 個重複を許して取り出す組み合わせの集合の元を並べた 1 つの組, 重複順列とする。 L は ${}_{\gamma}H_n$ 通りの $\{1, 2, \dots, \gamma\}$ から n 個重複を許して取り出す組み合わせの集合の元を並べた 1 つの組, 重複順列とする。 $n^{\alpha} = \sum_J \frac{\alpha!}{n_J!}$ に注意する。ただし, J は ${}_{\alpha}H_n$ 通りの和にわたる。

3 Remarks

注意 1. S_n から, 可換環 R の乗法群 R^{\times} への群の準同型 $\phi: S_n \rightarrow R^{\times}$ を考えると, S_n の交換子群 $[S_n, S_n]$ が A_n なので準同型 $S_n/A_n \rightarrow R^{\times}$ を通る。 $S_n/A_n \cong \{\pm 1\}$ なので, ϕ は sgn か自明な表現しかない。

注意 2. [1] $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ を標準基底とする。 $\mathbf{a}_1 = \sum_j x_{1j} \mathbf{e}_j, \dots, \mathbf{a}_n = \sum_j x_{nj} \mathbf{e}_j$ と任意のベクトルを 1 次結合でかくとき,

$$\text{sym}(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n) = \sum_{\sigma \in \text{Map}(\{1, 2, \dots, n\}, \{1, 2, \dots, n\})} a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n}$$

は列についての 1 つの対称形式である。 $\text{sym}({}^t A) \neq \text{sym}(A)$ に注意する。

[2] n 次正方向行列 A に対して, $n = n_1 + n_2 + \cdots + n_s$ と分割する。 A の列を n_1, n_2, \dots, n_s 個の列に分割する。それを X_1, X_2, \dots, X_s の集合とし, J_1, J_2, \dots, J_s をそれぞれ 1 つの順列とする。 $\{1, 2, \dots, n\}$ から重複を許して n_1 個の元を取り出した集合を Y_1 , 独立に, 重複を許して n_2 個の元を取り出した集合を Y_2 , 同様にして繰り返して, 最後に, 独立に, 重複を許して n_s 個の元を取り出した集合を Y_s とする。そのとき, Y_i の重複順列を I_i とし, Y_i の元の重複を重複 $m_{i1}, m_{i2}, \dots, m_{it_i}, m_{i1} + m_{i2} + \cdots + m_{it_i} = n_i$ とする。 $m_{I_i}! = m_{i1}! m_{i2}! \cdots m_{it_i}!$ とする。このとき次が成り立つ。

$$\text{sym}(A) = \sum_{(I_1, I_2, \dots, I_s)} \frac{1}{m_{I_1}!} A_{I_1 J_1} \frac{1}{m_{I_2}!} A_{I_2 J_2} \cdots \frac{1}{m_{I_s}!} A_{I_s J_s}$$

[3] 各型がそれぞれ $(n, \alpha), (\alpha, \beta), \dots, (\gamma, n)$ 型の行列 A, B, \dots, C が与えられたとする。このとき次が成り立つ。

$$\text{sym}(AB \cdots C) = \sum_I \sum_J \sum_K \cdots \sum_L \frac{1}{n_I!} A_{IJ} \frac{1}{n_J!} B_{JK} \cdots \frac{1}{n_L!} C_{LI}$$

参考文献

- [Bour] Nicolas Bourbaki, Algebra I: Chapters 1-3 (Elements of Mathematics), Springer, 1989 (reprint version, 1999).
- [UM] Yoshiaki Ueno and Kazuhisa Maehara, An elementary proof of the generalized Laplace Expansion Formula, Academic Reports, vol.25, no.1(2002), Faculty of Engineering, Tokyo Polytechnic University, pp.61-63.