

教養の数学と魔方陣—4 次の超魔方陣の解明

植 野 義 明*

Super Magic Squares of Size 4—a new Mathematics Course for Non-Science Majors

Yoshiaki UENO

This paper will present an overview plot of a new discrete mathematics course. Its intended audience is non-science majors. The unique feature of this course is its use of computer algebra. After creating some super magic squares of size 5 by hand, super magic squares of size 4 are classified with the aid of *Mathematica*. Then the mathematical structure of these magic squares will be examined through an innovative approach by the author. Students can learn the use of arithmetic of modulo m , and the 4-dimensional geometry over the field with two elements. Overall, the goal of this course is to make the student a critical consumer of mathematical games, to understand what a mathematical structure is and how it works. We also mention that magic squares will provide good examples ‘in nature’ to motivate the student in a linear algebra course.

1 魔方陣簡解

1 から n^2 までの自然数を $n \times n$ の正方形の形に並べて、各行、各列、および 2 本の対角線上の数の和がすべて等しくなるようにしたものを n 次の魔方陣、または n -方陣¹⁾という。

今年の 1 年生の線形代数の授業で、黒板に行列の例として 3 次の魔方陣（これは本質的にひととおりしかない）を書いてみたところ、ある学生が、中学校の授業で習ったと言って、魔方陣の作り方を説明してくれた。

3 次の魔方陣は、歴史的に易学家たちによって“洛書”と呼ばれ、神秘主義的な色彩をおびて扱われてきたが、1260 年代から 70 年代に活躍した南宋時代の数学者楊輝（Yáng Huī）は『続古摘奇算法』（1275）の中でこれを数学的に研究した。彼

は 20 次までの魔方陣を規則的に作り出す方法を述べ、これによって組合せ数学（combinatorics）という新分野を創始したといわれている。楊輝は南宋の地方官吏として現在の蘇州のあたりに赴任していたが、その土地の人から数学の問題を教わったのが数学の研究を始めるきっかけだったとも言われている²⁾。

西洋の伝統世界でも魔方陣は宗教的なシンボルとして扱われた。また、政治家が趣味として研究した例もある³⁾。現在も魔方陣の研究および類似したパズルの製作が行われている^{5,6)}。

奇数次の魔方陣については、小学生でも覚えられる簡単な作り方が存在する。偶数次の魔方陣についても、奇数次の場合よりはやや複雑であるが、ほぼ同様の方法が知られているようである。これらは、まず規則的に数を並べ、それを一定の手続きに従って並べ替えていくことで達成される^{4,5,6)}。

* 本学工学部基礎・教養 講師
1998 年 9 月 16 日 受理

2 魔方陣に対する誤解

ところで、魔方陣について、2つの大きな誤解があるようである。

ひとつは、魔方陣はパズル的なもの、あるいは趣味の数学であって、学校教育で取り上げられるべき数学の本流ではないという誤解。もうひとつは、コンピュータの威力をもってすれば魔方陣をすべて調べあげるなどの問題はたちどころに解かれてしまうから、人間が苦勞して研究をする価値はないという誤解である。

第1の誤解が誤解であることは、歴史上、偉大な数学者であって、魔方陣を研究したひとが幾人もいることをみれば明らかであろう。

魔方陣の数学教育上の価値として、誰でもすぐに問題の意味を理解でき、興味をもつことができるばかりでなく、次の節でみるように、数学的思考の訓練、そして整数の理論への動機付けを与える題材としてもすぐれている点あげられる。また、東洋と西洋とにまたがる文化的伝統への興味を起こさせる題材としてみることもできる。

第2の誤解が誤解であることは、これから教育の場面でコンピュータを使って数学的問題を解決していく実践を積み重ねていくことで徐々に明らかになっていくだろう。これは、数学的思考とはどのような実践なのか、それをコンピュータはどのように手助けすることができるのかという問題でもある。

3 魔方陣から整数論へ

柴岡はその著書において、1つの章を魔方陣の解明に当てている⁷⁾。以下の話への導入として、その内容を要約しておこう。これは、青山学院大学での全学共通科目「数学」のプリントを教科書にまとめたもので、発見的学習に適した教材配列がとられており、興味深い⁸⁾。

* * *

1. はじめに n^2 までの自然数を自然な順序で並べた自然方陣（これは魔方陣ではない！）の性質を調べ、これを‘45°回転’することによって奇数次の魔方陣が作られる。受講者（読

者）は $n=5$ ですべて手作業によってこのプロセスを確認する。

2. ‘回転’に伴っては、行和、列和を変えないように数の配置替えが行われるが、その要請から‘縦横方向へ n マス移動したセルは同一視する’という考え（約束事）が自然に発生し、読者は巧妙かつ滑らかに **mod n の算術世界**へと誘われる。これは、魔方陣の描かれる正方形の面をトーラス面とみなすことと同値である。
3. ひとたび、正方形の外部の点を内部の点に同一視することに馴れてしまうと、数の並べ替えを経ずに、直接正方形内部に1から順に数を書き入れることによって奇数次の魔方陣を作ることができる。
4. 次に、**超魔方陣**（完全方陣と呼ぶ文献もある⁹⁾）が登場する。これは、有限幾何の用語でいえば、トーラス面上で対角線に平行な直線（広義対角線と呼ばれる）上の数の和も一定であるとの条件を追加したものである。
5. はじめに5次の超魔方陣の実例がひとつ与えられ、受講者は、それが確かに魔方陣であることを5進法表記を巧妙に用いて確認しながら、超魔方陣としての性質をも発見する。さらに、そこでの数の並び方の規則を観察することによって、いわゆる**桂馬跳び法**を発見する。
6. 次に、こうして $n=5$ の場合に手中にした桂馬跳び法を $n=6, 7, 8, 9$ の場合にまでナイーヴに適用することを試み、そこでの成功または失敗の体験から、次のステップである桂馬跳び法の一般化—**PQ法**と命名される—が首尾よく成功するための条件の解明へと進む。
7. PQ法で超魔方陣が作られるかどうかは、桂馬跳びにかわる2つの移動のベクトル P , Q の成分がみたすある条件で判定できる。それは、移動を定めるパラメーターで決まるいくつかの量が、mod n の算法の乗法表において**逆元**を有するかどうか、言い換えると、 n を法とする **\mathbf{Z} の剰余環の単元**であるかどうかという言葉で記述できる。

8. こうして、互いに素という概念がキーワードとして浮上し、最大公約数、そしてイデアルの理論へと学習を進める動機付けが与えられる。

* * *

ここでは、魔方陣はあくまでも数学的思考の訓練の題材として扱われている。数学的知識を魔方陣に適用するのではなく、魔方陣という具体的な題材を使い、受講者自らが手作業による試行錯誤を通して、規則を発見したり、概念を拡張したり、本質を見抜いたりすること—数学的思考—の訓練を行うことを意図して書かれた教科書であることが、その構成から明らかに読み取れるのである。

4 4 次の超魔方陣の解明

次に、4 次の超魔方陣の数学的構造に簡単に触れよう¹⁰⁾。4 次の超魔方陣の全体がある 16 次の置換群のひとつの軌道になっていることは、パズル愛好家の間ではすでに有名な事実であるが、ここでは、さらに踏み込んで、有限体 F_2 上の幾何学の観点からこの問題を完全に解決する。なお、以下の考察は、前節で紹介した柴岡による PQ 法がある意味で拡張したものである。

$\text{mod } 4$ の世界の単位は 1, 3 のみであり、そのことが原因となって、残念ながら PQ 法による超魔方陣の構成は 4 次では破綻することが分かる。

大森によると、4 次の魔方陣は(回転と裏返しを除いて) 880 個あり、そのうちで超魔方陣は(回転や裏返しも含めて) 384 個ある¹¹⁾。これらは、後述する連立方程式を用いれば、数式処理システム *Mathematica* version 3.0 で数秒のうちに求められる。ここで、 $384 = 16 \times 24 = 4^2 \times 4!$ と書いてみると、この数字には何か意味があるのではないかと思われてくる。

まず、超魔方陣では、最初の数字 1 をどこに書いても本質的には同じ(平行移動!)であるから、1 を左上端に固定しても一般性を失わないことに注意しよう。

16 個の変数 $a_{ij} (i, j = 1, 2, 3, 4)$ を未知数として、行列 (a_{ij}) が 4 次の超魔方陣となる条件(行和、列和、広義対角成分和がいずれも 34)を書き

下すと 16 個の 1 次方程式からなる連立方程式を得る。これを掃き出し法で解いていくと、成分の間に面白い関係があることが見いだされる。すなわち、

1. 2×2 のサイズの正方形の成分の和はどこでも 34 である。以下ではこれを**ブロック**と呼ぶ。
2. ある成分と、それから上下にも左右にも 2 マス離れた成分との和はどこでも 17 である。以下ではこれを**超対称ペア**と呼ぶ。

したがって、

1. 行、列に 16 個のブロック¹²⁾を加えると、和が 34 となる単位が 24 個ある。
2. 上記の他に、和が 17 となる単位として、超対称ペアが 8 組ある。広義対角線は、それぞれ超対称ペア 2 組からできている。

PQ 法におけるのと同様に、何らかの幾何学的構造をこの超魔方陣にも認めようとする、超対称ペアはその構造における特別の位置関係、すなわち対角線の両端もどきの位置にあるだろうと予想される。

PQ 法では、 $n \times n$ の魔方陣の縦と横を剰余環 $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ に同一視するのだった。これは幾何学的には円周上に並んだ n 点である。 $n=4$ のとき、円周上の 4 点は正方形をなす。これを $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ と思えばどうか。

もちろん、環 $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ と、環 $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ とでは、環構造が異なっている。ここでは、PQ 法がうまく機能しない場合に、魔方陣の正方形の縦と横、すなわち行列成分 a_{ij} の添え字 i と j がそれぞれが属する代数系の環構造を別のものに取り替えてみようというのである。

このようにすると、 4×4 の正方形の面上にある 16 点からなる集合は

$$(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) \times (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) = (\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^4$$

の構造をもつことになる。すなわち、幾何学的にいうと、2 元体 F_2 上 4 次元の線形空間になる。

まず、正方形の 2 つの辺がそれぞれ 2×2 の正方形に対応するように、16 個の枠目の全体をそれぞれ 4 次元の超立方体の頂点に対応させる。左上端に 1 をもつ 24 個の 4 次の超魔方陣の任意のひとつをとり、対応先の頂点に、超魔方陣の各セルに記入されている自然数を記入する (図 1)。

つぎに、いま記入した整数からそれぞれ 1 を減じて 0 から 15 までの整数に直したものをさらに 2 進 4 桁表記に直す (図 2)。これら 2 進 4 桁の数値を 0-1 成分の 4 次元ベクトルだと思えば、うまいことに、4 つの 4 次元ベクトル $(0,1,1,1)$, $(1,0,1,1)$, $(1,1,0,1)$, $(1,1,1,0)$ で張られる 4 次元超立方体の各頂点の座標と一致している。

この 4 次元超立方体のすべての 2 次元面において、条件

その 4 つの頂点の座標成分には、どの座標についても 0 が 2 つ、1 が 2 つ含まれている。

が満たされていることが容易に分かる。従って、

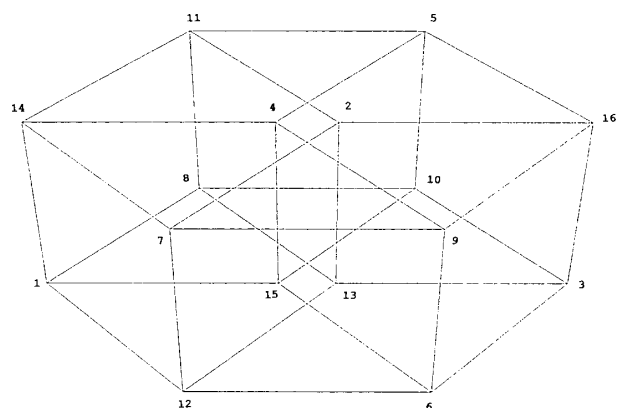


図 1 超魔方陣から作った超立方体陣

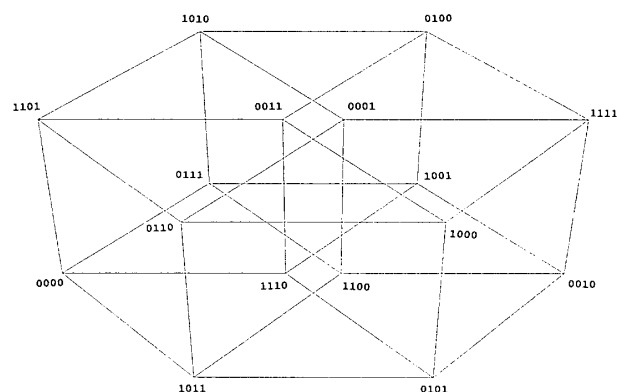


図 2 2 進数表記による超立方体陣

これらの頂点に記入される数の和はどの 2 次元面でも一定である。これらの 24 個の 2 次元面が 4 次の超魔方陣の行、列、およびブロックに対応する。また、この 4 次元超立方体の 8 本の超対角線はすべて平行で、同じベクトル $(1,1,1,1)$ で表される。このことから、4 次の超魔方陣の超対称ペアの和が 17 となること (したがって、広義対角線に沿った和も 34 であること) が直ちに説明できる。

4 次元空間の中で頂点 $(0,0,0,0)$ を固定するような 4 次元超立方体の置き直し (鏡映を含む) をすると、上記の 4 つのベクトルで表される辺が互いに入れ替わり、対応する超魔方陣として別のものが現れる。4 つのベクトルの置換は全部で $4! = 24$ 個あり、それが、左上端に 1 をもつ超魔方陣の個数である。

以上が 4 次の超魔方陣の、我々の立場からみた‘解明’である。

筆者は本年度、青山学院大学全学共通科目「数学」の前期の授業において PQ 法までを扱い、後期の最初の 3 回の授業で本節に紹介した 4 次の超魔方陣の話を、*Mathematica* の出力結果を用い、実際に手作業をさせながら行った。15 名ほどの出席者の感想のうちからいくつかを紹介する。

- ④ 魔方陣から 4 次元への発想の飛躍はすごい。数学には柔らかい頭が必要だと思った。(機械工学科, 1 年, 男子)
- ⑤ 興味深いテーマではあるけれど、かなり難しくなってきた。次回のテーマも楽しみだが、なるべく短い話がよい。(同)
- ⑥ すべての完全方陣が 4 次元の超立方体で表せて、かつ、2 進法で表示することで和に関する 3 つの性質が見出せることに感動した。このように立体的に考察することは、専門を学ぶ上にも役に立つと思う。(同)
- ⑦ 数字の面白さに魅せられました。これからいろいろな視点から数学を勉強していきたい。(同)
- ⑧ 3 次元や 4 次元でも超魔方陣のように作れるなんてすごい。その時、その時によって、いろいろなルールがあって、それを知ることによって簡単に書きやすくなるのがすごい。

(同)

- 4次元超立方体というのがどうもしっくりしません。なんとなく分かったようで分かってない。(経済学科, 1年, 男子)

5 魔方陣と線形代数

最後に、理工系・経済系大学の線形代数において、授業を活性化する素材として魔方陣がもっている可能性について論じてみたい¹³⁾。

5.1 数学の授業における動機づけ

線形代数では、行列、行列式、連立方程式、掃き出し法、逆行列、固有値、固有ベクトルなどの概念や計算アルゴリズムを学習する。

一般的に行われている授業では、これらの項目のひとつひとつについて順番に、まず概念の説明や定理の証明を行い、つぎに適当な例題を演習する。しかし、受講者(学生)はたとえ理論が理論としては理解できたとしても、行列が何のためにあるのか、なぜ連立方程式をわざわざ掃き出し法という面倒な方法で解かなければならないのか(いわゆる‘普通の方法’ではなぜいけないのか)が理解できず、腑に落ちない気持ちのまま履修を修了する結果になりがちである。論理の細部を理解することと、理論全体の‘枠組み’について納得することとは、イコールではないのである。

最近、大学理工系における**専門教育と基礎教育の融合**、あるいは連携化がよく話題にのぼる。専門との融合といっても、現実の技術的な問題に触れようとすれば、お話だけに終わってしまうか、もしくは、おびただしい専門用語や複雑な計算に迷い込む結果になりかねない。むしろ大切なのは、数学で獲得される概念や知識が、他の分野に転用可能な内容をもっていること(数学の**転用可能性**とでも呼ぶべき性格)を感覚として理解させることによって数学への親近感をいだかせることだろう。そのためには、高校程度の内容の物理現象における意味づけや応用例、あるいは、簡単な逆行列の計算から積分公式を導くなどの、数学内部での他分野への転用例をいくつか示すだけでも十分に効果があると思われる。

5.2 魔方陣と掃き出し法

たとえば、3次の魔方陣を探索するのに、成分が1から9の整数の範囲にある3次正方行列全体(これは $9^9=3\,784\,204\,89$ 個ある)から条件に合うものを選択するよりも、まず掃き出し法によってパラメータの個数を絞ってから探索を始める方がはるかに効率的である。このようにして、‘普通の方法’では知らないうちに堂々めぐりになって手に負えないけれども、掃き出し法であればなんとか取り組めるという)境界線上ぎりぎりのサイズの‘実際に意味のある’問題を提示することができる。この事実は掃き出し法の学習に動機付けを与えるひとつの例として、注目に値する。

また、問題のサイズがより大きくなった場合も、**数式処理システム**を用いるならば、コンピュータの画面上で容易に掃き出し法を行うことができる。その際に、**基本変形**を行列のかけ算で表現することが、問題解決手順をいかに簡明ならしめるか、その利益は計り知れないということも体験できるだろう。

数式処理システムの教育利用では、段階を追って納得しながら操作を進めることができ、都合が悪くなったら途中で引き返したり、はじめからやり直したり、一度解き終ってからまた別経路を試みたりといったことが自由にできることが重要である。そのような環境の中ではじめてひとはある操作を自分の手中の物とする感覚を体験できるのである。*Mathematica* 環境では(おそらく *Maple* でも)そのことが可能である。また、必要があれば、途中経過なしに、直接に結果(連立方程式の解、逆行列など)を出すことも可能となっている。

5.3 魔方陣と逆行列・固有値

逆行列を求める演習問題としても魔方陣は有効である。

教科書に載っている例題は行列式が ± 1 または比較的小さな整数であるものが多いが、これでは計算練習にすぎず、現実界に存在する自然を扱っている感覚に乏しい。一方、魔方陣の数字は解きやすいように適当に並べた数字ではなく、自然界に現実に存在する数字としての存在感をもっている。

る。

現在、理工系学部ではほとんどの学生が 10 桁の電卓を所持している。この現状を考えると、4 桁程度までの整数計算は苦ではないし、その過程で、最小公倍数の性質などにも注意が向けられるという利点がある。

実際に授業で逆行列の計算練習として魔方陣をとりあげてみたところ、思わぬ効果があった。すなわち、計算結果の美しさが計算の動機づけと発見の喜びを与えるのである。計算の結果、逆行列が得られたら、その行和、列和を求めるようにながした。すると、学生は相当に面倒な計算になっても興味をもって計算を遂行し、行和、列和が一定にならなければ、計算違いをしていることを自ら悟りもした。

さらに、魔方陣の逆行列の計算で観察される事実は、理論的な再考を加える材料としても適切である。すなわち、行和や列和に関し、逆行列もやはり魔方陣の性質をもつことは、逆行列の基本的性質（行列とベクトルの積において、逆行列を掛けると元のベクトルに戻る）を使って簡単に示すことができるし、その計算は固有値や固有ベクトルの導入部分で再び利用できる。たとえば、3 次の魔方陣の行和は 15 であるが、その逆行列の行和がすべて等しく $1/15$ であることは、実は計算しなくてもわかるのである。

なお、不思議なことに、3 次の魔方陣の逆行列では、対角成分和も $1/15$ になる。また、その成分は、集合として、ある等差数列の項の集合と一致する。この他にも、*Mathematica* に組み込まれている行列式、余因子行列、固有値などの関数を利用して、いくつかの美しい関係や法則らしきものが発見できた。

5.4 行列を定義すること

実際に *Mathematica* で掃き出し法を step by step の操作によって行う場合、*Mathematica* の上で基本行列を定義しなければならない。黒板上の説明では、いくつかの具体的な基本行列の例を挙げるだけにとどめることもできるが、コンピュータに計算させる場合は、論理的にきちんと定義し

なければならない。

従来の授業では、与えられた行列を計算する練習が主であり、学習者が自分で新しく行列を定義する場面に乏しかった。しかし、必要に応じて対象を自ら定義することは、数学的思考の中で重要な位置を占める。きちんと対象を定義してやらなければならない仕事をしないコンピュータを道具とすることによって、対象を定義することの難しさや面白さを体験するチャンスが増える。これは、数学教育にコンピュータを用いることの利点であろう。

注と参考文献

- 1) 英語 magic square, 中国語 幻方 (huànfāng)
- 2) 同瀬光「数学史話」上海古籍出版社 (上海), 1997, pp.83-88.
- 3) 平山諦, 阿部楽方「方陣の研究」大阪教育図書, 1983, pp.1-19.
- 4) 大森清美「新編 魔方陣」富山房, 1992, pp.21-45.
- 5) 加納敏「数の遊び 魔方陣・図形陣の作り方」富山房, 1980.
- 6) J.S. マダチ「数学レクリエーション」啓学出版, 1987.
- 7) 柴岡泰光「教養の数学」東京図書, 1984, 第 2 章.
- 8) 柴岡泰光「一般教育の数学：一つの試み」数学教育学会研究紀要 Vol.28, No.3-4, pp.4-13, 1987.
- 9) 大森, 前掲書, pp.109-120.
- 10) 数学を専門としない一般読者向けのより詳しい解説が次の記事の中にある：植野義明「数学教育と *Mathematica*—魔方陣に遊ぶ」コンピュータ&エデュケーション, Vol.5 (1998.11).
- 11) 大森, 前掲書, pp.51-120.

- 12) たとえば、超魔方陣 $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 10 & 15 \\ 9 & 16 & 3 & 6 \\ 7 & 2 & 13 & 12 \\ 14 & 11 & 8 & 1 \end{pmatrix}$ のブロックと

して

$$\begin{pmatrix} \blacksquare & \blacksquare & \square & \square \\ \blacksquare & \blacksquare & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \square & \square & \square & \square \\ \square & \blacksquare & \blacksquare & \square \\ \square & \blacksquare & \blacksquare & \square \\ \square & \square & \square & \square \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \blacksquare & \blacksquare \\ \square & \square & \blacksquare & \blacksquare \\ \square & \square & \square & \square \end{pmatrix}$$

などや、境界に跨った

$$\begin{pmatrix} \blacksquare & \square & \square & \blacksquare \\ \blacksquare & \square & \square & \blacksquare \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \square & \blacksquare & \blacksquare & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \blacksquare & \blacksquare & \square \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \blacksquare & \square & \square & \blacksquare \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \blacksquare & \square & \blacksquare \end{pmatrix}$$

などがある。読者はここに示した 4 数の和がいずれも 34 であることを確かめられたい。

- 13) 次の教科書の演習問題には魔方陣がさりげなくふんだんに取り入れられている：西尾和弘「教養線形代数学」, 新評論, 1969.

著者の連絡先

厚木市飯山 1583 東京工芸大学工学部数学教室 (〒 243-0297)

E-mail address: ueno@gen.t-kougei.ac.jp