

ある 3 次多項式族のパラメータ空間について

中 根 静 男

On the Parameter Space of a Family of Cubic Polynomials

Shizuo NAKANE

In this note, the dynamics of a family of cubic polynomials with a parabolic fixed point of multiplier 1 are considered. Especially, the structure of parabolic components of its connectedness locus is investigated. It turns out that all parabolic components are parametrized by the Fatou vectors. This corresponds to the fact that hyperbolic components are parametrized by the multipliers of the attracting cycles. Some boundary properties are also investigated.

1 序

この小論では固有値 1 の放物的な不動点を持つような 3 次多項式の族 $Per_1(1)$ を考える。その不動点を平行移動によって 0 に写すことにより $P_a(z) = z^3 + az^2 + z$, $a \in \mathbf{C}$ を考えればよい。 P_a の危点は

$$c_{\pm} = c_{\pm}(a) = (-a \pm \sqrt{a^2 - 3})/3 = (-1 \pm \sqrt{1 - 3/a^2})a/3$$

であり、 $a = \pm\sqrt{3}$ で分岐する。従って、危点 $c_{\pm}(a)$ は $\overline{\mathbf{C}} - \{\pm\sqrt{3}\}$ の 2 重被覆空間上の正則関数であり、通常の実素平面での扱いには注意を要する。ただし、 $|a|$ が十分大きいところでは $c_{\pm}(a)$ は 1 価正則である。そこでは漸近的に

$$c_+(a) = -\frac{1}{2a} + O\left(\frac{1}{a^3}\right), \quad c_-(a) = -\frac{2a}{3} + \frac{1}{2a} + O\left(\frac{1}{a^3}\right)$$

故、危値は

$$P_a(c_+(a)) = O\left(\frac{1}{a}\right), \quad P_a(c_-(a)) \approx \frac{4a^3}{27}$$

となる。従って $|a|$ が十分大きいところでは $c_-(a)$ が escape し、 $c_+(a)$ は放物的不動点 0 の直接鉢 $\mathcal{B}_a^*(0)$ に含まれる。この性質は stretching という操作で不変なので、結局 connectedness locus $M_1(1)$ の外では常に $c_-(a)$ が escape することになる。実は次が成り立つ。

命題 1.1 族 $Per_1(1)$ の connectedness locus $M_1(1)$ は

$$M_1(1) = \{a \in \mathbf{C}; c_-(a) \in K_a = K(P_a)\}$$

と特徴づけられる。

* 工学部 基礎教養 助教授
1998 年 8 月 5 日 受理

まず Zakeri [Z] の定理 3.1 と同様の議論により次が示される。

補題 1.1 $\mathbb{C} - \partial M_1(1) = \{a \in \text{Per}_1(1); P_a \text{ は } J\text{-安定}\}$

証明. まず $m_a = 3\max(|a|, 1)$ とおいて $K_a \subset D(0, m_a)$ を示す。 $|z| \geq m_a$ ならば

$$\begin{aligned} |P_a(z)| &\geq \{(|z| - |a|)|z| - 1\}|z| \\ &\geq \{(|z| - m_a/3)|z| - 1\}|z| \\ &\geq (2m_a|z|/3 - 1)|z| \geq 5|z| \end{aligned}$$

が成り立つので $K_a \subset D(0, m_a)$ が従う。次に P_{a_0} が J -安定であるための必要十分条件は族 $\{P_a^k(c_{\pm}(a)); k \geq 0\}$ が a_0 の近傍で正規族をなすことであるという McMullen [Mc] の定理を用いると $\text{Int}(M_1(1))$ での J -安定性が容易に従う。 $\mathbb{C} - M_1(1)$ での J -安定性と $\partial M_1(1)$ での J -不安定性も容易である。■

補題 1.2 $a_0 \in \partial M_1(1)$ ならば $c_+(a_0) \in \mathcal{B}_{a_0}^*(0)$ が成り立つ。

証明. $a_n \in \mathbb{C} - M_1(1)$ を a_0 に収束する点列とする。 $\mathcal{B}_{a_0}^*(0)$ の Riemann 写像 $\phi_a : D \rightarrow \mathcal{B}_{a_0}^*(0)$ を $\phi_a(0) = c_+(a)$, $\phi_a(1) = 0$ を満たすようにとる。 $\phi_n = \phi_{a_n}$ と略記すると Montel の定理より D 上 $\phi_{n(j)}$ がある単葉関数 ϕ に広義一様に収束するような a_n の部分列 $a_{n(j)}$ がとれる。 $D(0, r) = \{|z| < r\}$ とおくと、全ての $r < 1$ に対して $\phi(\overline{D(0, r)}) \subset \mathcal{B}_{a_0}^*(0)$ が成り立つ。実際、そうでないとすると、ある $r < 1$ があって $w_0 \in \phi(\overline{D(0, r)}) \cap J(P_{a_0})$ が存在する。 w_0 の任意の近傍には P_{a_0} の反発的な周期点 w_1 が存在するが、陰関数定理よりこの周期点は a_0 の近傍の正則関数 $w(a)$ に延長される。しかも $w(a)$ は P_a の反発的な周期点なので $w(a) \in J(P_a)$ である。しかし十分大きい j に対し $\phi_{n(j)}(\overline{D(0, r)}) \subset \mathcal{B}_{a_{n(j)}}^*(0)$ より $w(a_{n(j)}) \in \mathcal{B}_{a_{n(j)}}^*(0)$ となり矛盾する。従って $c_+(a_0) = \lim_{j \rightarrow \infty} c_+(a_{n(j)}) = \lim_{j \rightarrow \infty} \phi_{n(j)}(0) = \phi(0) \in \mathcal{B}_{a_0}^*(0)$ がいえた。■

一方、後の定理 2.1 より $\partial M_1(1)$ 上 $c_-(a)$ は $\mathcal{B}_a(0)$ には属し得ない。というのは、もし属したら、その点 a の近傍でも属することになり、点 a が境界上の点であることに反するからである。今、ある $a_0 \in \text{Int}(M_1(1))$ で $c_+(a_0) \notin \mathcal{B}_{a_0}^*(0)$ とすると $c_-(a_0) \in \mathcal{B}_{a_0}^*(0)$ であり、補題 1.1 より $\text{Int}(M_1(1))$ の a_0 を含む成分上でもそれが成り立つが、すると補題 1.2 の証明で $c_+(a_0)$ を $c_-(a_0)$ で置き換えることにより $\partial M_1(1)$ 上でも $c_-(a) \in \mathcal{B}_a^*(0)$ となり矛盾する。従って、 $M_1(1)$ 上であつても $c_+(a)$ と $c_-(a)$ が入れ替わらない限り $c_+(a) \in \mathcal{B}_a^*(0)$ という性質は保たれる。こうして命題 1.1 は示された。

以後、 $c_{\pm}(a)$ の枝としては上で定義したものをとることにする。従って線分 $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ を横切ると $c_+(a)$ と $c_-(a)$ が入れ替わる。なお、 $P_{-a}(-z) = -P_a(z)$ が成り立つので $P_{-a} \sim_{\text{affine}} P_a$ であるが、 $c_{\pm}(-a) = -c_{\pm}(a)$ なので、この affine 同値は我々の考えているパラメータ空間の枝に依らないことに注意する。

線分 $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ が $M_1(1)$ に含まれることは容易にわかるので、上の命題は意味を持つことに注意しよう。さて c_- の余危点を \tilde{c}_- とかくと、 $P_a(c_-) = 4a^3/27 + \dots = P_a(\tilde{c}_-)$ より $\tilde{c}_- \approx a/3$ が従う。そこで $\varphi_a(\tilde{c}_-) = \varphi_a(P_a(\tilde{c}_-)) \approx 4a^3/27$ となる。よって 1 の原始 3 乗根 ω の一つを ω とし $\varphi_a(\tilde{c}_-) \approx \sqrt[3]{4a\omega}/3$ が従うので $\Phi(a) = 3\varphi_a(c_-(a))/\sqrt[3]{4\omega}$ とおくと、これは ω のとりかたによらず、次が成り立つ。

定理 1.1 $\Phi : \overline{\mathbb{C}} - M_1(1) \rightarrow \overline{\mathbb{C}} - \overline{D_{3/\sqrt[3]{4}}}$ は上への等角同型で $\lim_{a \rightarrow \infty} \Phi(a)/a = 1$ を満たす。

系 1.1 $M_1(1)$ は連結である。

Φ により $M_1(1)$ に対して外射線が定義される。その着地性に関しても Mandelbrot 集合の場合と同様の議論が可能であろう。ただし、相空間との対応は余危点を通じて行われることに注意しよう。さて、 $M_1(1)$ の内部には吸引的なサイクルを持つような写像がある。ここではそのような写像を hyperbolic ということにする。この場合はその直接鉢は危点 c_- を含む。更に危点 c_- が放物的な不動点 0 の鉢 $B_a(0)$ に含まれるような写像もある。このような写像をここでは parabolic といい parabolic な写像の全体を parabolic set, その連結成分を parabolic component と呼ぶ。この小論の目的は parabolic component の構造を解析することである。図 1 は $M_1(1)$ を表している。その中で黒い部分が hyperbolic components であり、灰色の部分が parabolic components である。 $M_1(1)$ の補集合は 3 進分割してある。そのおかげで外射線と外周角そして等ポテンシャル線を見ることができる。

歴史的には Lavaurs [L] が 3 次多項式族の connectedness locus が局所連結でないことを示す際に、 $Per_1(1)$ を考えた。Douady-Hubbard [DH] は 3 次の polynomial-like maps の straightening map が $Per_1(1)$ で不連続であることを示した。Milnor [M1] は [L] に刺激されて、特に実 3 次多項式族を考えた。 $Per_1(1)$ というのも彼の命名である。最近 Epstein-Yampolsky [EY] はやはり $Per_1(1)$ を研究することにより実 3 次多項式族の connectedness locus が局所連結でないという [M1] の予想を証明した。このように $Per_1(1)$ は 3 次多項式族が持つ 2 次多項式族とは違う側面をよく表しているといえよう。また Willumsen [W] は 3 次多項式族の stretching rays の着地性、特に $Per_1(1)$ への着地性について考察した。本小論も彼女の結果に示唆されて生まれたものである。

2 Fatou vectors

この節では parabolic component の parametrization を与える。hyperbolic component の場合は吸引的なサイクルの固有値がその parametrization を与えた。parabolic の場合にこれに対応するのは Fatou vector である。parabolic components には二つのタイプが存在する。 $c_-(a)$ が 0 の直接鉢 $B_a^*(0)$ に含まれるような parabolic component を adjacent component という。そうでないとき、つまり $c_-(a) \in B_a(0) - B_a^*(0)$ のとき capture component という。いずれにせよ 0 の Fatou 座標 $\Phi_{a,\pm}$ を考える。 0 の吸引的及び反発的花弁を $\Omega_{a,\pm}$ とおくと、 $\Phi_{a,\pm} : \Omega_{a,\pm} \rightarrow \mathbb{C}$ は中への正則同型で、関数等式 $\Phi_{a,\pm}(P_a(z)) = \Phi_{a,\pm}(z) + 1$ を満たす。従って $\Omega_{a,\pm}$ 内での P_a の力学系の基本領域は cylinder \mathbb{C}/\mathbb{Z} に同型である。この cylinder を Ecalle cylinder と呼ぶ。さて、二つの危点 $c_{\pm}(a)$ の軌道はやがて吸引的花弁 $\Omega_{a,-}$ に入ってくるので、その軌道 $[c_{\pm}(a)]$ の Fatou 座標 $\Phi_{a,-}([c_{\pm}(a)])$ を考えることができる。図 2 は adjacent component 内のある点の充填 Julia 集合である。後の補題 2.1 で示すように、Julia 集合は Jordan 閉曲線になっていることがわかる。充填 Julia 集合の内部は直接鉢 $B_a^*(0)$ に一致する。その内部は Fatou 座標で色分けしてある。図 3 はその 0 の付近の拡大図である。 0 の近傍では Ecalle cylinders を見ることができる。それを P_a で引き戻してゆくと、やがて危点に出くわすので cylinder 状でなくなってしまう。

定義 2.1 その差 $\tau(a) = \Phi_{a,-}([c_-(a)]) - \Phi_{a,-}([c_+(a)]) \in \mathbb{C}/\mathbb{Z}$ を P_a の Fatou vector という。

Fatou 座標には定数を加えるだけの任意性があるが、差をとることによりその任意性は消滅する。更に危点の軌道上の点のとり方にも任意性があるが、その差は整数なので \mathbb{C}/\mathbb{Z} で考えれば曖昧さは消える。こうして Fatou vector map は正則写像 $\tau : W_0 \rightarrow \mathbb{C}/\mathbb{Z}$ を与える。 τ による 0 の原像 $\tau^{-1}(0)$ は critical orbit relation $P_a^j(c_-(a)) = P_a^k(c_+(a))$ を満たすような点からなる。従ってそれは局所有限である。 $(\tau$ が正則写像故明らかである。) さて、我々は基本的には \mathbb{C} で考えるが、次の定理は写像 τ の被覆としての性質を述べる

ので、 $\overline{\mathbf{C}} - \{\pm\sqrt{3}\}$ の2重被覆上で考える必要がある。そこで adjacent component W が $\sqrt{3}$ または $-\sqrt{3}$ を含むときは W 及び τ の代わりに、その2重被覆 \hat{W} 及びそこへの τ の持ち上げ $\hat{\tau}$ を考えることにする。

定理 2.1 全ての parabolic component W に対し、 $\tau: W \rightarrow \tau^{-1}(0) \rightarrow \mathbf{C}/\mathbf{Z} - \{0\}$ は局所的に可逆である。つまり $\tau: W \rightarrow \mathbf{C}/\mathbf{Z}$ は分岐被覆を与える。

証明. hyperbolic component の場合と同様に qc-deformation の方法による。議論は全て局所的なので W は capture とする。adjacent の場合も同様である。 $\tau(a_0) = \tau_0 \neq 0$ とする。Fatou vector を cylinder 上で $\tau = T(\tau_0)$ と変形する。この変形が qc-map ならばこの変形により cylinder 上で複素構造を $\sigma = T^*\sigma_0$ と変形する。ここで σ_0 は標準的な複素構造である。次に Fatou 座標でこの構造を $\Omega_{a_0,-}$ 内の基本領域に $\sigma = \Phi_{a_0,-}^*\sigma$ と持ち上げる。更に P_{a_0} により $\mathcal{B}_{a_0}(0) = \mathcal{B}_{a_0}^*(0)$ まで持ち上げる。 $K_{a_0} = \overline{\mathcal{B}_{a_0}(0)}$ の外では σ_0 と定義することにより P_{a_0} 不変な複素構造 σ を得る。Measurable Riemann Mapping Theorem により、この複素構造を積分すると、qc-map $\phi = \phi_\tau$ で、

$$\phi^*\sigma_0 = \sigma, \quad \phi(0) = 0, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \phi(z)/z = 1$$

を満たすものがユニークに存在する。 $P = \phi \circ P_{a_0} \circ \phi^{-1}$ とおくと P は

$$P^*\sigma_0 = (\phi^*)^{-1}P_{a_0}^*\phi^*\sigma_0 = (\phi^*)^{-1}P_{a_0}^*\sigma = (\phi^*)^{-1}\sigma = \sigma_0$$

を満たすので正則写像であるが、 ϕ のとり方から P は P_a の形をした3次多項式である。 $a = a(\tau)$ は $a(\tau_0) = a_0$ を満たす τ の関数であるが T が τ に連続 (正則) に依存すれば連続 (正則) になる。この $a = a(\tau)$ が Fatou vector map $\tau = \tau(a)$ の局所的な逆であることは明らかであろう。そこで残る問題は cylinder 上で Fatou vector を qc-変形することである。

ここでは Fatou 座標を $\Phi_{a,-}([c_+]) = 0$ と正規化する。まず $\tau_0 = t \in (0, 1)$ とする。 $T(w) = \varphi(x) + i\psi(x, y)$, $w = x + iy \in \mathbf{C}/\mathbf{Z}$ を

$$\varphi(x) = \begin{cases} ux/t & \text{if } 0 \leq x \leq t \\ 1 + \frac{1-u}{1-t}(x-1) & \text{if } t \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$\psi(x, y) = \begin{cases} y + vx/t & \text{if } 0 \leq x \leq t \\ y + \frac{v}{t-1}(x-1) & \text{if } t \leq x \leq 1 \end{cases}$$

と定義する。 $T(t) = T_\tau(t) = u + iv \equiv \tau$ である。すると

$$T(w) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{\tau+t}{\tau+t} w + \frac{\tau-t}{t} \bar{w} \right) & \text{if } 0 \leq x \leq t \\ \frac{1}{2} \left(\frac{2-t-\tau-t}{1-t} w + \frac{t-\tau}{1-t} \bar{w} \right) + \frac{\tau-t}{1-t} & \text{if } t \leq x \leq 1 \end{cases}$$

が成り立つので T_τ は τ に関して正則である。その dilatation は

$$\left| \frac{\partial T_\tau}{\partial T_\tau} \right| = \begin{cases} \left| \frac{\tau-t}{\tau+t} \right| = \left| \frac{u-t+iv}{u+t+iv} \right| < 1 & \text{if } 0 \leq x \leq t \\ \left| \frac{t-\tau}{2-t-\tau-t} \right| = \left| \frac{t-u-iv}{2-t-u-iv} \right| < 1 & \text{if } t \leq x \leq 1 \end{cases}$$

をみためので T_τ は $0 < u < 1$ ならば qc である。我々は $\Phi_{a,-}([c_+]) = 0$ と正規化したので $\tau(a) = \Phi_{a,-}([c_-])$ と表される。よって cylinder 上の変換 T_τ により Fatou vector も同様に変換される。こうして $0 < \Re \tau < 1$ を満たす Fatou vector τ は T_τ で qc-変形される。残るは $\Re \tau = 0$ の場合である。qc-map $x + iy \mapsto x + ity$ により、Fatou vector i は it に変換される。更に $-1/2 < s < 1/2$ を満たす s に対し it を $s + it$ に写すように写像

$S(x+iy) = \psi(x,y) + iy$ を定義する。 ψ は 4 直線 $y = \pm 2tx, y = \pm 2tx + 2t$ で囲まれる菱形 L の外では恒等写像で、その内部では

$$\psi(x,y) = \begin{cases} x + s(y - 2tx)/t & \text{if } x \geq 0, y \leq t \\ x + s(y + 2tx)/t & \text{if } x \leq 0, y \leq t \\ x + s(2t - y - 2tx)/t & \text{if } x \geq 0, y \geq t \\ x + s(2t - y + 2tx)/t & \text{if } x \leq 0, y \geq t \end{cases}$$

とおく。 $S(w) = (1 \pm s - is/2t)w + (is/2t \pm s)\bar{w}$ より、その dilatation は $|s| < 1/2$ 故

$$\left| \frac{\partial \bar{S}}{\partial S} \right| = \left| \frac{\pm s + is/2t}{1 \pm s - is/2t} \right| < 1$$

を満たすので $S = S_s$ は qc であり、 $S(it) = s + it$ を満たす。更に S_s は s に関して実解析的である。 S の逆を考えれば $S^{-1}(s + it) = it$ となる。

以上をまとめると、集合 $\{a \in W; \Re \tau(a) \neq 0\}$ の各成分は Fatou vector によって正則に parametrize される。 $\{a \in W; \Re \tau(a) = 0, \tau(a) \neq 0\}$ の各成分は Fatou vector によって実解析的な parametrization を持つ。更にこの parametrization は、その柱状近傍まで実解析的に延ばせる。この二つの parametrization を張り合わせると、結局 Fatou vector は $W - \tau^{-1}(0)$ の局所的に正則な parametrization を与えることがわかる。■

この定理により $c_-(a) \in \mathcal{B}_a(0)$ という性質が開であることが従う。よって parabolic set の連結成分は $Int(M_1(1))$ の連結成分でもあることがわかる。更に上の証明から次のように W 内での qc- 及び J- 安定性が従う。補題 1.1 も見よ。

補題 2.1 $W - \tau^{-1}(0)$ の任意の 2 点 a, b に対し P_a と P_b は qc- 同値である。更に W の任意の 2 点 a, b に対し Julia 集合 J_a と J_b は同相である。それらは Jordan 閉曲線である。

証明. 前補題の証明から、 $W - \tau^{-1}(0)$ の各点 a はある近傍 U_a を持ち、全ての $b \in U_a$ に対し $P_b \sim_{qc} P_a$ となる。従って $W - \tau^{-1}(0)$ の中で qc-同値な写像全体は開集合である。一方、それは明らかに閉集合である。従ってそれは $W - \tau^{-1}(0)$ 全体に一致する。次に P_a と P_b が qc-同値ならそれらの Julia 集合が同相になるのは明らか。しかし Mane-Sad-Sullivan [MSS] の結果より W の任意の 2 点は Julia 集合上位相同値であることがわかるので後半も従う。特に $a = \sqrt{3}$ は $Q(z) = z^3 + 2/3\sqrt{3}$ と affine 同値であり、 J_Q が Jordan 閉曲線であることは 2 次関数のときと同様に容易に示されるので最後の主張も示された。■

図 4 は adjacent component を Fatou vector の虚部が正か負かで色分けしたものである。このような図を最初に描いたのは Willumsen [W] である。しかし彼女は Fatou vector の実部を無視しているので cylinder の構造が現れない。実部も考慮して色分けしたのが図 5 で、図 6 - 7 はその拡大図である。これらの図では実軸上の区間 $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ 上で Fatou vector map が不連続になっていることに注意する。これは最初に述べたように危点の多価性によるもので、本来はその 2 重被覆空間上で考えなくてはならないのを無理矢理 1 価にしているためである。図 5 から $\Re \tau(a)$ が一定という曲線の到達点の位置が分かり、図 1 からその点に到達する外射線の外周角がわかるので、次の補題は直観的には明らかであるろう。

補題 2.2 $\Re \tau(a)$ を一定に保ちながら $\Im \tau(a)$ が $\pm\infty$ に近づくとき a は 0 か $P_a^k(c_-(a)) = 0$ を満たす点 a_0 に近づく。

証明. まず $\Phi_{a,-}([c_+])$ は有界とする。すると危点 c_+ は $B^*(0)$ に留まり、Fatou 座標は少なくとも危点 c_+ の近くでは連続に変化することに注意する。そして $\Im \Phi_{a,-}([c_-]) \rightarrow \pm\infty$ であるが、ここで $\Im \Phi_{a,-}(z) = \pm\infty$ を満たす点は 0 しかないので、 $\Im \tau(a_j) \rightarrow \infty$ のとき

a_j の集積点 a_0 とすると、ある k があって $P_{a_0}^k(c_-) = 0$ を満たす。今 $\Re\tau$ を固定しているので、この k も一定にとれることに注意する。しかし固定した k に対しこの性質を満たす a_0 は有限個しかないので a_j は a_0 に収束する。

次に $\Im\Phi_{a,-}([c_{\pm}]) \rightarrow \pm\infty$ or $\mp\infty$ とする。Fatou 座標が連続的に変化するとすれば、これは危点 c_+ さえもが $\mathcal{B}_a^*(0)$ 内には存在しなくなることを意味するが、それはありえないので結局 Fatou 座標が不連続になること、つまり分岐が起こることを意味する。しかし 0 は常に parabolic なので、考えられるのは 0 の multiplicity が変わる場合、よって $a = 0$ の場合のみである。従って、この場合は a は 0 に近づく。■

補題 2.3 $k \geq 0$ を固定する。各 j に対し $P_a^{k+1}(c_-(a)) = P_a^j(c_+(a))$ を満たす点 $a = a_j$ とする。点列 a_j は $P_a^{k+1}(c_-(a)) = 0$ を満たすような点 $a = a_0$ に収束する。特に $\Im\hat{\tau}(a) = 0$ 上 $\Re\hat{\tau}(a) \rightarrow +\infty$ のとき a は $P_a^{k+1}(c_-(a)) = 0$ を満たすような点 $a = a_0$ に収束する。

証明. 全ての a に対し $c_+(a) \in \mathcal{B}_a^*(0)$ 故、全ての a に対し $\lim_{j \rightarrow \infty} P_a^j(c_+(a)) = 0$ が成り立つ。しかも $P_a^j(c_+(a))$ は a の正則関数なのでこの収束は a に関して局所一様収束である。従って a_j の集積点を a_0 とおくと $P_{a_0}^{k+1}(c_-(a_0)) = \lim_{j \rightarrow \infty} P_{a_j}^j(c_+(a_j)) = 0$ が成り立つ。この性質を満たす点 a_0 は有限個しかないので点列 a_j は a_0 に収束しなければならない。■

これは $\Im\tau(a) = 0$ 上 $\hat{\tau}(a_j) \rightarrow +\infty$ となる場合である。また補題 2.3 の点 a_0 には $p/3^k$ という形の外周角の外射線が着地すると思われる。この外射線上、危点 c_- の軌道はやがて外周角が 0 の外射線上に達する。逆に外周角が $p/3^k$ の外射線は parabolic component の境界上 $P_a^{k+1}(c_-(a)) = 0$ を満たす点 a に着地すると予想される。つまり $P_a^{k+1}(c_-(a)) = 0$ を満たす点は parabolic component の境界上にあると予想される。

補題 1.1 より、任意の parabolic component W に対し、 $a \in W$ ならば $P_a^k(c_-(a)) \in \mathcal{B}_a^*(0)$ となるような最小の k が W 内で共通にとれる。この k を W の preperiod という。更にこのとき $P_a^k(c_-(a)) = c_+(a)$ を満たす a を W の中心という。例えば、実軸と交わる adjacent component W_0 の場合、 $k = 0$ であり、中心は $a = \pm\sqrt{3}$ である。しかし $k > 0$ つまり capture component の場合には中心の存在は自明ではない。一方数値実験は全ての parabolic component が単連結であることを示唆している。

予想 2.1 全ての parabolic component W は単連結である。

更に図 5-7 より $\tau^{-1}(0)$ 上での Fatou vector map τ の性質については次が予想される。

予想 2.2 W を parabolic capture component とする。 $P_{a_0}^n(c_-(a_0)) = c_+(a_0)$ を満たす点 $a_0 \in W$ をとると、Fatou vector map τ の a_0 での局所的な次数は 2 である。また $P_{a_0}^{n+1}(c_-(a_0)) = P_{a_0}^j(c_+(a_0))$, $n \geq k, j \geq 1$ を満たすような点 $a_0 \in W$ での τ の局所的な次数は 1 である。adjacent parabolic component W_0 の場合、 $a = \pm\sqrt{3}$ つまり $c_+(a) = c_-(a)$ を満たす点では $\hat{\tau}$ は 3 対 1 で、他の点では capture と同様である。

これらの予想が示せないのは Fatou vector map が proper であるとは限らないからである。実際次は容易に示される。

補題 2.4 実軸と交わる adjacent component W_0 に対し、 $\tau: W_0 \rightarrow \mathbf{C}/\mathbf{Z}$ は proper ではない。

証明. 実軸上の開区間 $I = (\sqrt{3}, 2)$ は W_0 に含まれ $2 \in \partial W_0$ である。(実は $2 \in \partial M_1(1)$ である。) I 上 c_{\pm} は実故、その Fatou 座標も実にとれる。従って τ も I 上実数、つまり $\tau(I) \subset \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ である。よって \mathbf{C}/\mathbf{Z} のコンパクト集合 \mathbf{R}/\mathbf{Z} の原像 $\tau^{-1}(\mathbf{R}/\mathbf{Z})$ は W_0 の境界に達するのでコンパクトではない。故に τ は proper でない。■

parabolic component の境界についてはわからないことが多い。hyperbolic component の場合、その境界は実解析的であったが、parabolic component の場合はそうとは限らない。境界の parametrization があるのか。内部から近づいたときの性質や外部から近づいたときの性質、それは外射線の着地性の問題である。

命題 2.1 *parabolic component* W の境界上の点 a に対し P_a は Siegel 周期点と Cremer 周期点を持たない。更に W が capture ならば P_a は 0 以外に放物的な周期点を持たない。

証明. P_a が Siegel または Cremer 周期点 z_0 を持ったとすると、次の補題 2.5 より、 z_0 と 0 はその補題の \mathcal{R} で分離される。ここで前周期的な外射線は反発的か放物的な前周期点にしか達しないことに注意する。 P_a は他には非反発的な周期点を持たないので \mathcal{R} の元の到達点は反発的である。よって摂動に対して安定であるので $a \in \partial W$ を W 内に摂動しても同様に分離される。しかし W 内では $c_-(a)$ の軌道はやがて $B_a^*(0)$ に落ちるので矛盾。従って P_a は Siegel, Cremer 点を持たない。 W が capture のとき、 \mathcal{R} が放物的な周期点を含まなければ上と同様の議論により放物的な周期点は 0 以外にないことが示される。 \mathcal{R} が放物的な周期点を含むとき、危点 c_- をその直接鉢 U_0 に含む周期点 z_0 と z_0 に着地する外射線がとれる。 a を W 内に摂動すると z_0 は反発的な周期点 z'_j 達に分岐するが、外射線は z'_j のどれかに着地し続ける。逆にパラメータが W 内から a に近づくと z'_j 達が z_0 に合体する。従って z'_j 達は $c_-(a)$ を含む放物鉢 U' の境界上にあることになるが、 U' は前周期的なので矛盾である。■

補題 2.5 (Kiwi [K]) $J(P)$ が連結な多項式 P に対し、前周期的な閉外射線の有限和 \mathcal{R} が存在して \mathbb{C} を $\cup_{j=1}^n U_j$ と分割し、更に

1. 各 U_j は非反発的な周期点や周期的な Fatou 成分を高々 1 個しか含まぬ。
2. 非反発的な k -サイクル $z_j \in U_j$ とすると $\cup_{j=1}^k U_j$ は少なくとも 1 個の危点の全軌道を含む。

capture でない、つまり adjacent parabolic component W_0 の場合には U' が不変なので上の証明は使えない。実際、 W_0 の境界には hyperbolic component が付着している。例えば図 7 の右上の部分には小さな Mandelbrot 集合のコピーが見受けられる。従ってその根にあたる点は高い周期の放物的周期点を持つ。図 8 は capture component であるが、これには Mandelbrot 集合は付着してない。

References

- [DH] A. Douady and J. Hubbard: On the dynamics of polynomial-like mappings. Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. 18 (1985), pp. 287-343.
- [EY] A. Epstein and M. Yampolsky: Geography of the cubic connectedness locus I: Intertwining surgery. Stony Brook IMS Preprint 1996/10, 1996.
- [K] J. Kiwi: Non-accessible critical points of Cremer polynomials. Stony Brook IMS Preprint 1996/2.
- [L] P. Lavaurs: Systèmes dynamiques holomorphes: explosion de points periodiques paraboliques. thèse Univ. Paris-Sud, 1989.
- [Mc] C. McMullen: Complex Dynamics and Renormalization. Annals of Math. Studies, vol. 135, 1994.

- [MSS] R. Mane, P. Sad and D. Sullivan: On the dynamics of rational maps. *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.* 16 (1983), pp. 193–217.
- [M1] J. Milnor: Remarks on iterated cubic maps. *Experimental Math.* 1 (1992), pp. 5–23.
- [Sh] M. Shishikura: The Hausdorff dimension of the boundary of the Mandelbrot set and Julia sets. *Stony Brook IMS Preprint 1991/7*, 1991.
- [W] P. Willumsen: *Holomorphic Dynamics: On accumulation of stretching rays*. Ph.D. thesis Tech. Univ. Denmark, 1997.
- [Z] S. Zakeri: On dynamics of cubic Siegel polynomials. *Stony Brook IMS Preprint 1998/4*, 1998.

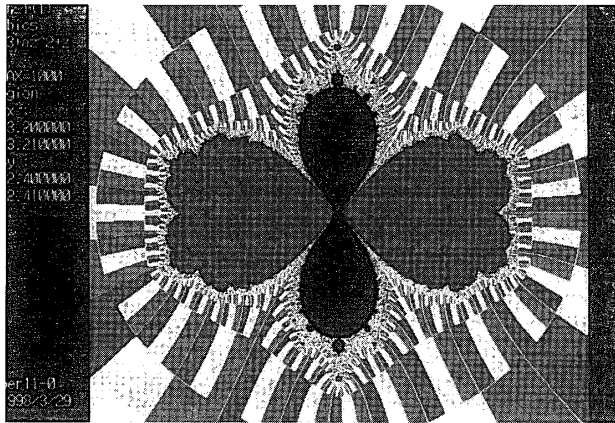


図 1

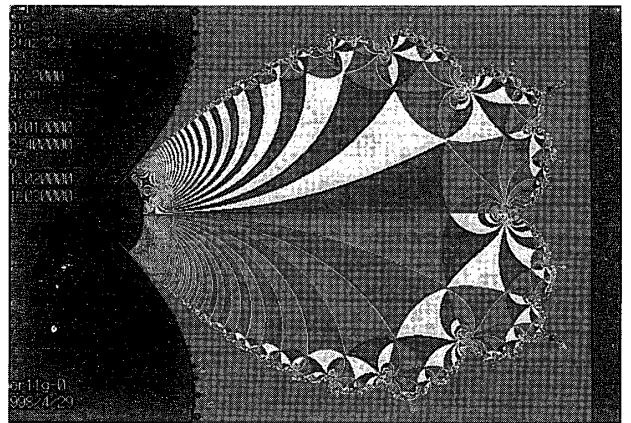


図 5

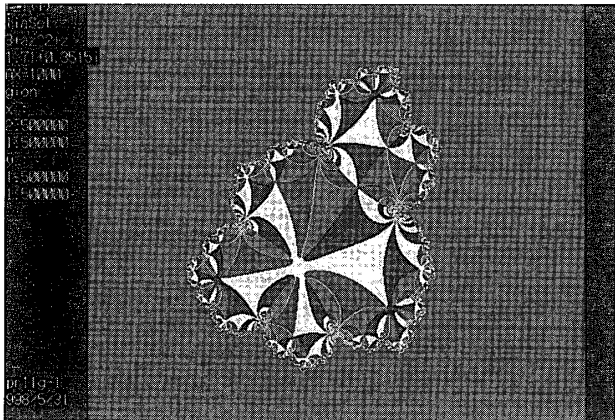


図 2

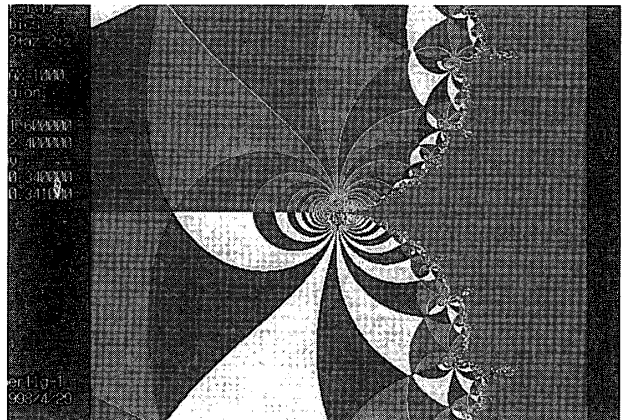


図 6

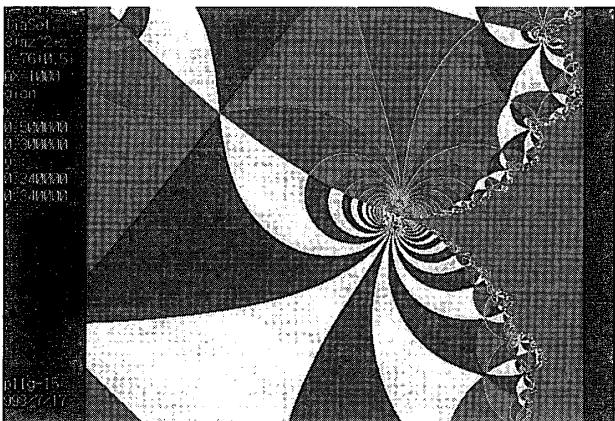


図 3

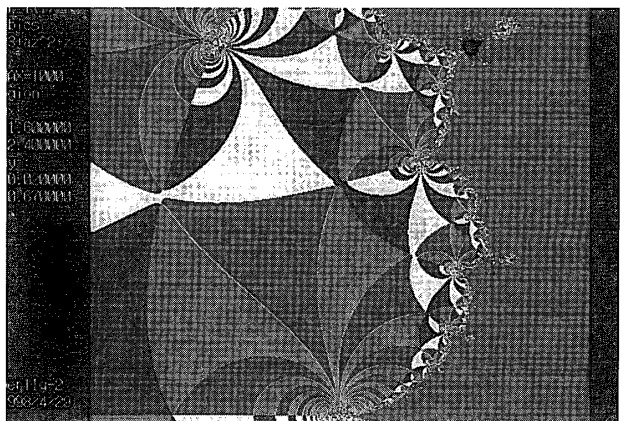


図 7

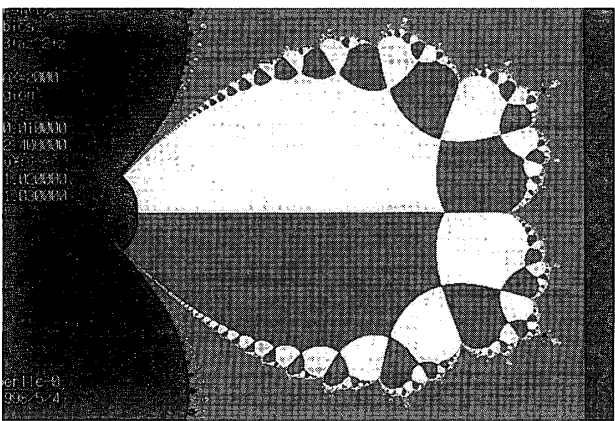


図 4

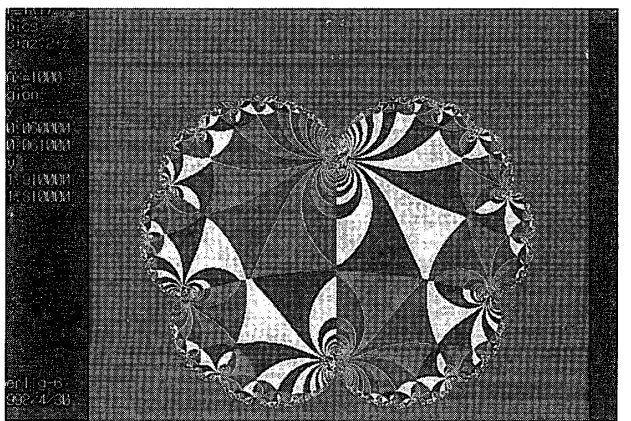


図 8