

Grötzsch の欠損について

中根 静男*

On Grötzsch Defects

Shizuo NAKANE

abstract

In this note, defects of the dynamically defined moduli of annuli in the Grötzsch inequality are investigated. That is, the moduli of the fundamental annuli around repelling periodic points for polynomials are considered. Since their Julia sets are not smooth arcs, there exists an exact defect in the Grötzsch inequality. As a result, in some cases, its continuity as the repelling periodic point becomes parabolic is shown.

1 序

この小論では, Grötzsch の不等式に現れる modulus の欠損について考察する。

補題 1.1 $T = C/\Gamma$, $\Gamma = \{n\tau + 2m\pi i; m, n \in \mathbf{Z}\}$, $\operatorname{Re} \tau > 0$ をトーラス, $\alpha: S^1 \rightarrow T$ を自明でない Jordan 閉曲線で combinatorial rotation number p/q , $\sigma = q\tau - 2p\pi i$ を α に付随した線分とする。即ち, $\tilde{\alpha}$ を α の持ち上げとすると, $\tilde{\alpha}(1) = \tilde{\alpha}(0) + q\tau - 2p\pi i$ となる。 α にホモトピックな交わらぬ annulus の集合 $\{A_i\}_{i \in I}$ に対し,

$$\sum_{i \in I} \operatorname{mod}(A_i) \leq \operatorname{mod}(T, \alpha) = \frac{2\pi \sin|\beta|}{q|\sigma|},$$

が成り立つ。ここで β は σ と $2\pi i$ のなす角で, $\Pi: C \rightarrow T$ を自然な射影をすると, 等号が成り立つのは $\Pi^{-1}(\partial A_i)$ が直線で, $\bigcup_{i \in I} \overline{A_i} = T$ の場合に限る。

この補題より, $\bigcup_{i \in I} \overline{A_i} = T$ であっても ∂A_i がきれいでないと, 上式で等号が成り立たないことがある。そのとき, 両辺の差を Grötzsch の欠損という。Petersen[P] は 2 次多項式 $f_\lambda(z) = \lambda z + z^2$ の反発的不動点での Grötzsch の欠損を計算し, $\lambda \nearrow 1$ のとき, その連続性を示した。この小論では彼の先駆的な仕事に基づいて, 他の場合を計算してみる。我々の場合, Grötzsch の欠損は ∂A_i である Julia 集合の複雑さを表すと思われるので, その連続性は Julia 集合の連続性に関係すると思われる。

本小論では, $P_c(z) = z^d + c$ という形の多項式族を考える。第 3 節では, 一般の d 次多項式の場合の反発的不動点での Grötzsch の欠損を計算し, $c \nearrow c_0 = d^{-1/(d-1)}(1-d^{-1})$ のときの連続性を示す。第 4, 5 節ではそれぞれ d が偶数, 奇数の場合に P_c の反発的 2 周期点での Grötzsch の欠損を計算する。現時点では, $d \leq 4$ の場合しか完成していないが, その場合は境界でも連続になることがわかる。次節では後で必要になる事実を述べるが, 特に holomorphic index に注目する。実際, 放物的なパラメータに近い点で

* 本学 助教授

1997 年 8 月 26 日 受理

の Grötzsch 欠損の漸近的な性質は、放物的な点での holomorphic index によって記述されるのみならず、その計算を著しく容易にしてくれるのである。

2 準備

基本的な方法は Petersen [P] に基づいている。放物的な場合は、放物的不動点 x_0 の直接鉢を $A(x_0)$ として、Ecalte cylinder への $A(x_0)$ 及び $C-K(P_c)$ の射影を各々 A_0, A_∞ とする。この場合の Grötzsch 欠損は、Ecalte cylinder 上の annuli A_0, A_∞ から自然に定義される。 $mod(A_\infty)$ の計算は hyperbolic のときと同様である。Grötzsch 欠損を求めるために、 A_0 と、それと等角同値な平坦な annulus を較べる。そのために x_0 での Fatou coordinates と、やはり、単位開円板上での P_c の共役の放物的不動点 1 での Fatou coordinates を計算する。

hyperbolic な場合は、反発的な周期点の周りでの first return map から定義される力学系の基本領域であるトーラスを T とする。不動点の場合は、吸引的不動点 x の直接鉢を $A(x)$ とおくと $A_0 = T \cap \Pi(A(x))$, $A_\infty = T - \Pi(\overline{A(x)})$ が annulus である。 $mod(T, a)$ は P_c を線形化することにより、固有値から計算される。 $mod(A_0)$ を計算するためには、等角写像で A_0 を矩形に写す必要がある。そこで、 $A(x)$ を単位開円板 D に写す Riemann 写像を考える。この写像による共役は Blaschke 積になる。この Blaschke 積の Julia 集合は単位円周なので、その反発的不動点の固有値から $mod(A_0)$ が計算できる。 $mod(A_\infty)$ の計算には、充填 Julia 集合の外を単位開円板の外に等角に写す Böttcher coordinates を用いる。 P_c はこの写像で、 P_0 と共役になるので、その不動点 1 の固有値 d から $mod(A_\infty)$ は計算される。

本節では、Fatou coordinates の計算と、holomorphic index との関係について論じる。この議論は、以下の節で繰り返し使われるものである。

定義 2.1 z_0 を正則関数 f の不動点とするとき、

$$i(f, z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=r} \frac{dz}{z-f(z)},$$

を、 f の z_0 での holomorphic index と呼ぶ。

以下では、 z_0 が固有値 1 の放物的不動点の場合を扱うので、 $f(z) = \sum_{k \geq 0} a_k (z - z_0)^k$ とテイラー展開すると、 $a_1 = 1$ である。次の補題は留数計算から従う。

補題 2.1

$$i(f, z_0) = \begin{cases} a_3/a_2^2 & \text{if } a_2 \neq 0 \\ a_5/a_3^2 - a_4^2/a_3^3 & \text{if } a_2 = 0, a_3 \neq 0 \end{cases}$$

次に Fatou coordinates を計算する。アフィン変換により、 $z_0 = 0$ としてよい。 $a_2 \neq 0$ のときは、 $w = \varphi_1(z) = -1/a_2 z$ とおくと、

$$\begin{aligned} F(w) &= \varphi_1 \circ f \circ \varphi_1^{-1}(w) \\ &= w + 1 + \left(1 - \frac{a_3}{a_2^2}\right) \frac{1}{w} + \cdots \\ &= w + 1 + (1 - i(f, z)) \frac{1}{w} + \cdots \end{aligned}$$

となる。 $a_2 = 0, a_3 \neq 0$ のときは、まず原点の近傍での等角写像 $\varphi_2(z) = z + b_2 z^2 + b_3 z^3 + \cdots$ で共役をとった $f_0 = \varphi_2 \circ f \circ \varphi_2^{-1}$ が、 $f_0(z) = z + a_3 z^3 + c z^5 + \cdots$ となるようにしたい。そのためには、 $b_2 = -a_4/a_3$ とおけばよく、このとき $c = a_5 - a_4^2/a_3$ になる。そこで $w = \varphi_3(z) = -1/2 a_3 z^2$ とおくと、

$$\begin{aligned} F(w) &= \varphi_3 \circ f_0 \circ \varphi_3^{-1}(w) \\ &= w + 1 + \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}i(f, z)\right)\frac{1}{w} - \dots \end{aligned}$$

となる。この F の Fatou coordinates Φ_F^\pm は、 $\Phi_F^\pm \circ F(w) = \Phi_F^\pm(w) + 1$ を満たす等角写像だが、 $F(w) = w + 1 + a/w + O(1/w^2)$ が実軸に関して対称ならば、 $\Phi_F^\pm(w) = w - a \log(\pm w) + \dots$ と書ける。ここで対数は主枝をとるものとする。我々が必要なのは、Ecalte modulus:

$$\begin{aligned} \text{mod}(F) &= \lim_{Im w \rightarrow -\infty} \{\Phi_F^+ \circ (\Phi_F^-)^{-1}(w) - w\} \\ &= -a\pi \end{aligned}$$

である。上の F の場合は、

$$\text{mod}(F) = \begin{cases} -(1 - i(f, z_0))\pi & \text{if } a_2 \neq 0 \\ -(3/4 - i(f, z_0)/2)\pi & \text{if } a_2 = 0, a_3 \neq 0 \end{cases}$$

となる。

3 不動点での欠損

d 次多項式族 $P_c(z) = z^d + c$ を考える。この族の周期 1 の hyperbolic component の境界は $c = z - z^d$, $|z| = d^{-1/(d-1)}$ と表される。そこで、 $c \nearrow c_0 = d^{-1/(d-1)}(1 - d^{-1})$ のときの反発的不動点での Grötzsch の欠損の連続性について考察する。

まず、 $c = c_0$ のときの放物的不動点 $x_0 = d^{-1/(d-1)}$ でのそれを計算する。そのために、 P_{c_0} の Fatou coordinates を求める。 x_0 での holomorphic index は、

$$\begin{aligned} P'_{c_0}(x_0) &= 1 \\ P''_{c_0}(x_0) &= (d-1)d^{1/(d-1)} \\ P'''_{c_0}(x_0) &= (d-1)(d-2)d^{2/(d-1)} \end{aligned}$$

より、

$$i(P_{c_0}, x_0) = \frac{2(d-2)}{3(d-1)},$$

である。故に、前節の議論より、Ecalte modulus は

$$\text{mod}(F) = -(1 - i(P_{c_0}, x_0))\pi = -\frac{(d+1)\pi}{3(d-1)},$$

となる。

次に $A(x_0)$ を直接鉢とし、 $\phi: A(x_0) \rightarrow D$ を Riemann 写像で $\phi(0) = 0$, $\phi'(0) > 0$ を満たすものとする

と、

$$R(z) = \phi \circ P_{c_0} \circ \phi^{-1}(z) = \frac{z^d + \frac{d-1}{d+1}}{1 + \frac{d-1}{d+1}z^d}$$

となる。その Fatou coordinates を求める。 $w = \varphi_1(z) = \frac{1+z}{1-z}$ とおくと $z = \varphi_1^{-1}(w) = \frac{w-1}{w+1}$ で、

$$\begin{aligned}
R_1(w) &= \varphi_1 \circ R \circ \varphi_1^{-1}(w) = \frac{1 + \frac{\{(w-1)/(w+1)\}^d + (d-1)/(d+1)}{1 + (d-1)/(d+1)\{(w-1)/(w+1)\}^d}}{1 - \frac{\{(w-1)/(w+1)\}^d + (d-1)/(d+1)}{1 + (d-1)/(d+1)\{(w-1)/(w+1)\}^d}} \\
&= d \frac{(w+1)^d + (w-1)^d}{(w+1)^d - (w-1)^d} \\
&= w + \frac{d^2-1}{3w} - \frac{(d^2-1)(d^2-4)}{45w^3} + \dots,
\end{aligned}$$

とかける。 $W = \varphi_2(w) = w^2/b$ とおくと,

$$\begin{aligned}
G(W) &= \varphi_2 \circ R_1 \circ \varphi_2^{-1}(W) = \frac{(\sqrt{bW})^2}{b} \left\{ 1 + \frac{d^2-1}{3bW} - \frac{(d^2-1)(d^2-4)}{45b^2W^2} \right\}^2 \\
&= W + \frac{2(d^2-1)}{3b} + \frac{(d^2-1)(d^2+1)}{15b^2W} + O\left(\frac{1}{W^2}\right),
\end{aligned}$$

となる。 $b = 2(d^2-1)/3$ とおけば,

$$G(W) = W + 1 + \frac{3(d^2+1)}{20(d^2-1)W} + O\left(\frac{1}{W^2}\right),$$

より,

$$\text{mod}(G) = -\frac{3(d^2+1)}{20(d^2-1)}\pi,$$

が従う。しかも $S^1 = J(R)$ の $\varphi_2 \circ \varphi_1$ による像は負の実軸と原点になるので, 平坦な annulus が得られたことになる。一方, R の 1 での holomorphic index は,

$$\begin{aligned}
R'(1) &= 1 \\
R''(1) &= 0 \\
R'''(1) &= -(d^2-1)/2 \\
R^{(4)}(1) &= d^2-1 \\
R^{(5)}(1) &= (d^2-1)(d^2-4),
\end{aligned}$$

より,

$$i(R, 1) = \frac{3(2d^2-3)}{5(d^2-1)},$$

となるので,

$$\text{mod}(G) = -\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}i(R, 1)\right)\pi,$$

と表される。よって, x_0 での Grötzsch 欠損 $D(c_0)$ は,

$$\begin{aligned}
D(c_0) &= 2(\text{mod}(G) - \text{mod}(F)) - \frac{\pi}{\log d} \\
&= (i(R, 1) - 2i(P_{c_0}, x_0) + \frac{1}{2} - \frac{1}{\log d})\pi \\
&= \left(\frac{11d^2+40d+11}{30(d^2-1)} - \frac{1}{\log d}\right)\pi,
\end{aligned}$$

となる。

次に, $0 < c < c_0$ つまり hyperbolic の場合を考える。 P_c の吸引的不動点の固有値を λ とおくと, 反発的不動点の固有値 λ は, holomorphic index の指数公式から得られる。(もちろん, 直接計算することでも

きる。) x_0 を囲むループ上の積分 $\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-x_0|=\epsilon} \frac{dz}{z-P_c(z)}$ に対する留数定理から, c が c_0 に十分近ければ,

$$\frac{1}{1-\lambda} + \frac{1}{1-\Lambda} = i(P_{c_0}, x_0) + o(1),$$

が従う。これから Λ を λ で表すと,

$$\Lambda = 1 + (1-\lambda) + i(P_{c_0}, x_0)(1-\lambda)^2 + o((1-\lambda)^2),$$

となる。よって,

$$\begin{aligned} \text{mod}(T, a) &= \frac{2\pi}{\log \Lambda} \\ &= \frac{2\pi}{(1-\lambda) + (i(P_{c_0}, x_0) - 1/2)(1-\lambda)^2 + \dots} \\ &= \frac{2\pi}{1-\lambda} (1 - (i(P_{c_0}, x_0) - 1/2)(1-\lambda) + \dots) \\ &= \frac{2\pi}{1-\lambda} + (1 - 2i(P_{c_0}, x_0))\pi + o(1) \end{aligned}$$

が従う。次に吸引鉢上での P_c の表現は上と同様 Blaschke 関数 $R_a(z) = (z^d + a)/(1 + az^d)$ で表される。但し, $0 < a < (d-1)(d+1)$ である。 R_a の吸引的不動点の固有値は P_c のそれと同じ λ であるが, それと反発的不動点 1 の固有値 Λ_1 は同様に指数公式で結ばれる。Blaschke 積は単位円に関して対称なので, 1 の近くに同じ固有値 λ の吸引的不動点が 2 個ある。よって, 指数公式は

$$\frac{2}{1-\lambda} + \frac{1}{1-\Lambda_1} = i(R, 1) + o(1),$$

となるので,

$$\Lambda_1 = 1 + (1-\lambda)/2 + i(R, 1)(1-\lambda)^2/4 + o((1-\lambda)^2),$$

従って,

$$\begin{aligned} D(c) &= \frac{2\pi}{\log \Lambda} - \frac{\pi}{\log \Lambda_1} - \frac{\pi}{\log d} \\ &= \frac{2\pi}{1-\lambda} + (1 - 2i(P_{c_0}, x_0))\pi - \left\{ \frac{2\pi}{1-\lambda} + \left(\frac{1}{2} - i(R, 1) \right) \pi \right\} - \frac{\pi}{\log d} + o(1) \\ &= (i(R, 1) - 2i(P_{c_0}, x_0) + \frac{1}{2} - \frac{1}{\log d})\pi + o(1) \\ &= \frac{11d^2 + 40d + 11}{30(d^2 - 1)}\pi - \frac{\pi}{\log d} + o(1), \end{aligned}$$

となる。以上をまとめると次を得る。

定理 3.1

$$\lim_{c \nearrow c_0} D(c) = \frac{11d^2 + 40d + 11}{30(d^2 - 1)} \pi - \frac{\pi}{\log d} \\ = D(c_0).$$

4 2 周期点での欠損：偶数次の場合

本節では、偶数次多項式族に対し、2 周期点での Grötzsch 欠損を計算する。ただし、現時点で完成しているのは $d=2, 4$ の場合のみである。以下、 $d=2m$ は偶数とする。すると、 $c=c_1=x_1-x_1^d$, $x_1=-d^{-1/(d-1)}$ ならば、 P_c は固有値 -1 の放物的不動点 x_1 を持つ。そこで $c \searrow c_1$ のときの Grötzsch 欠損を計算する。 c が実数、 P_c 及び、その力学系は実軸に関して対称であることに注意する。まず、 c_1 での欠損を求める。そのために、holomorphic index $i(P_{c_1}, x_1)$ を計算する。直接計算により、

$$\begin{aligned} (P_{c_1}')'(x_1) &= 1 \\ (P_{c_1}'')'(x_1) &= 0 \\ (P_{c_1}''')'(x_1) &= -(d^2-1)d^{2/(d-1)} \\ (P_{c_1}^{(4)})'(x_1) &= (d-1)^2(d+1)d^{3/(d-1)} \\ (P_{c_1}^{(5)})'(x_1) &= 2(d^2-1)(d^2-4)d^{4/(d-1)}, \end{aligned}$$

から、

$$i(P_{c_1}^2, x_1) = \frac{3(13d^2 - 10d - 27)}{40(d^2 - 1)},$$

が従う。よって第 2 節の結果より、

$$\begin{aligned} \text{mod}(F) &= -\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}i(P_{c_1}^2, x_1)\right)\pi \\ &= -\left(\frac{3}{4} - \frac{3(13d^2 - 10d - 27)}{80(d^2 - 1)}\right)\pi, \end{aligned}$$

となる。次に、 A_0 を x_1 の原点を含む直接鉢とし、 $\phi: A_0 \rightarrow D$ を Riemann 写像で $\phi(0)=0$, $\phi'(0)<0$ を満たすものとする、対称性から、 $R=\phi \circ P_{c_1}^2 \circ \phi^{-1}$ は Blaschke 積

$$R(z) = \frac{z^d + \frac{d-1}{d+1}}{1 + \frac{d-1}{d+1}z^d},$$

で表される。これは、前節の R と全く同じなので、

$$\begin{aligned} \text{mod}(G) &= -\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}i(R, 1)\right)\pi \\ &= -\frac{3(d^2+1)}{20(d^2-1)}\pi \end{aligned}$$

が従う。よって、 c_1 での Grötzsch 欠損 $D(c_1)$ は

$$\begin{aligned}
D(c_1) &= 4(mod(G) - mod(F)) - 2\frac{\pi}{\log d^2} \\
&= 2(i(R, 1) - i(P_{c_1}^2, x_1))\pi - \frac{\pi}{\log d} \\
&= \frac{3(3d^2 + 10d + 3)}{20(d^2 - 1)}\pi - \frac{\pi}{\log d}
\end{aligned}$$

となる。特に $d=2, 4$ のときはそれぞれ $D(c_1)=7\pi/4 - \pi/\log 2, 91\pi/100 - \pi/\log 4$ である。

次に, hyperbolic な c に対し, 反発的 2 周期点での Grötzsch 欠損を計算する。 $c_1 < c < 0$ とすると, P_c は吸引的不動点を持つが, その固有値を λ とする。 $c \searrow c_1$ のとき, 放物的になるような反発的 2 周期点の固有値を A とすると, c が c_1 に近いときは, 指数公式を用いて

$$\frac{1}{1-\lambda^2} + \frac{2}{1-A} = i(P_{c_1}^2, x_1) + o(1).$$

という関係が示される。これより,

$$A = 1 + 2(1-\lambda^2) + 2i(P_{c_1}^2, x_1)(1-\lambda^2)^2 + o((1-\lambda^2)^2),$$

が導かれる。よって,

$$\begin{aligned}
\frac{2\pi}{\log A} &= \frac{\pi}{1-\lambda^2} + (1 - i(P_{c_1}^2, x_1))\pi + o(1) \\
&= \frac{\pi}{2(1+\lambda)} + \left(\frac{4}{5} - i(P_{c_1}^2, x_1)\right)\pi + o(1),
\end{aligned}$$

となる。次に, 吸引的不動点の直接鉢 A_0 を単位円板に写す Riemann 写像 ϕ を $\phi(0)=0, \phi'(0)>0$ になると, $\phi \circ P_{c_1} \circ \phi^{-1}$ は Blaschke 積で, 対称性より

$$R_a(z) = \frac{z^d + a}{1 + az^d}, \quad -1 < a < 0,$$

と書ける。 R_a の吸引的不動点 z_0 の固有値は λ である。 R_a の反発的 2 周期点 z_1, z_2 の固有値を A_1 とおいて, これらを求める。 z_0 は $z(z^{d-1}-1)=a(z^{d+1}-1)$ を満たすが, $|z_0|<1$ であることから,

$$z(z^{d-2} + z^{d-3} + \dots + z + 1) = a(z^d + z^{d-1} + \dots + z + 1),$$

の解である。残念ながら, この方程式は, $d=2, 4$ の場合しか解けていない。 $d=2$ ならば, 2 次方程式 $az^2 + (a-1)z + a = 0$ なので, 直接解けて, $z_0 = (1-a - \sqrt{1-2a-3a^2})/2a$ である。もう一方の解 $w_0 = 1/z_0$ は, 単位円に関して z_0 と対称な R_a の吸引的不動点であり, その固有値は z_0 のそれと等しい。故に解と係数の関係:

$$z_0 + w_0 = (1-a)/a, \quad z_0 w_0 = 1,$$

を用いると,

$$\begin{aligned}
\lambda^2 &= R'_a(z_0)R'_a(w_0) \\
&= \frac{4z_0w_0(1-a^2)^2}{(1-az_0^2)^2(1-aw_0^2)^2} \\
&= \frac{4(1-a^2)^2}{(1+a^2+a(z_0+w_0)^2-2a)^2} \\
&= \frac{4a^2}{(1-a)^2},
\end{aligned}$$

が従う。 $\lambda < 0$ より, $\lambda = 2a/(1-a)$, 従って $a = \lambda/(\lambda+2)$ である。 $d=4$ のときは, $t = z+1/z$ とおくと, t は, $at^2 + (a-1)t - (a+1) = 0$ を満たすが, $a \rightarrow -1$ のとき, $z \rightarrow -1$, $t \rightarrow -2$ となるはずなので, $t = (1-a + \sqrt{1+2a+5a^2})/2a$ でなくてはならない。よって, z は, $z^2 - (1-a + \sqrt{1+2a+5a^2})z/2a + 1 = 0$ を満たす。この方程式のもう一方の解 $w_0 = 1/z_0$ は, 上と同様に, z_0 と単位円に関して対称な, R_a の吸引的不動点である。故に解と係数の関係:

$$z_0 + w_0 = (1-a + \sqrt{1+2a+5a^2})/2a, \quad z_0 w_0 = 1,$$

から,

$$\begin{aligned}
\lambda^2 &= R'_a(z_0)R'_a(w_0) \\
&= \frac{16(z_0w_0)^3(1-a^2)^2}{(1+az_0^4)^2(1+aw_0^4)^2} \\
&= \frac{16(1-a^2)^2}{(1+a^2+a(z_0^4+w_0^4))^2},
\end{aligned}$$

となる。ここで,

$$\begin{aligned}
z_0^4 + w_0^4 &= (z_0 + w_0)^4 - 4(z_0 + w_0)^2 + 2 \\
&= (1-4a^3-a^4+(1-a^2)(1-a)\sqrt{1+2a+5a^2})/2a^4,
\end{aligned}$$

を用いると,

$$\lambda^2 = \frac{64a^6}{(1+a^2-2a^3+(1-a)\sqrt{1+2a+5a^2})^2},$$

となるが, $\lambda < 0$ なので, 結局,

$$\lambda = \frac{8a^3}{1+a^2-2a^3+(1-a)\sqrt{1+2a+5a^2}},$$

が従う。ここで, $a = -1 + \epsilon$ とおくと,

$$\lambda = -1 + 5\epsilon/4 + 3\epsilon^2/8 + o(\epsilon^2),$$

が導かれる。

2 周期点も同様に計算する。それは, $R_a(z) = \bar{z} = 1/z$ を満たすので, 結局, 方程式:

$$z^d + z^{d-1} + \dots + z + 1 = az(z^{d-2} + z^{d-3} + \dots + z + 1),$$

を満たすことになる。 $d=2$ ならば, それは, $z^2 + (1-a)z + 1 = 0$ 故, 解と係数の関係から,

$$z_1 + z_2 = a - 1, \quad z_1 z_2 = 1,$$

がわかる。 $d=4$ のときは、 $t = z + 1/z$ は $t^2 - (a-1)t - (a+1) = 0$ の解であるが、 $a \rightarrow -1$ のとき $z \rightarrow -1$, $t \rightarrow -2$ のため、 $t = (a-1 - \sqrt{a^2 + 2a + 5})/2$ でなくてはならない。よって、 z_1, z_2 は

$$z_1 + z_2 = (a-1 - \sqrt{a^2 + 2a + 5})/2, \quad z_1 z_2 = 1,$$

を満たす。求める固有値 Λ_1 は、上と同様にして、 $d=2$ ならば、

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= (R_a^2)'(z_1) = R_a'(z_1) R_a'(z_2) \\ &= \frac{4z_1 z_2 (1-a^2)^2}{1 + a(z_1^2 + z_2^2) + a^2(z_1 z_2)^2} \\ &= \frac{4}{(1-a)^2}, \end{aligned}$$

であり、 $d=4$ のときは、

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= (R_a^2)'(z_1) = R_a'(z_1) R_a'(z_2) \\ &= \frac{16(z_1 z_2)^3 (1-a^2)^2}{(1 + a(z_1^4 + z_2^4) + a^2(z_1 z_2)^4)^2} \\ &= \frac{64}{(a^3 + a - 2 - a(a-1)\sqrt{a^2 + 2a + 5})^2} \\ &= 1 + 5\epsilon/2 + 53\epsilon^2/16 + o(\epsilon^2), \end{aligned}$$

と書ける。ここで、 $a = -1 + \epsilon$ とおいた。これらより、 Λ_1 を λ を用いて表すと、

$$\Lambda_1 = \begin{cases} (\lambda+2)^2 & (d=2) \\ 1 + 2(\lambda+1) + \frac{41}{25}(\lambda+1)^2 + \dots & (d=4) \end{cases}$$

となる。こうして、 c での Grötzsch 欠損 $D(c)$ は、

$$D(c) = 2\left(\frac{2\pi}{\log \Lambda} - \frac{\pi}{\log \Lambda_1} - \frac{\pi}{\log d^2}\right),$$

故、

$$D(c) = \begin{cases} 7\pi/4 - \pi/\log 2 + o(1) & (d=2) \\ 91\pi/100 - \pi/\log 4 + o(1) & (d=4) \end{cases}$$

となることがわかる。以上をまとめて次を得る。

定理 4.1 d が偶数のとき、

$$\begin{aligned} D(c_1) &= 2(i(R, 1) - i(P_{c_1}^2, x_1))\pi - \frac{\pi}{\log d} \\ &= \frac{3(3d^2 + 10d + 3)\pi}{20(d^2 - 1)} - \frac{\pi}{\log d} \end{aligned}$$

が成り立つ。特に、

$$D(c_1) = \begin{cases} 7\pi/4 - \pi/\log 2 & (d=2) \\ 91\pi/100 - \pi/\log 4 & (d=4) \end{cases}$$

一方 $c \searrow c_1$ のとき,

$$D(c) = \begin{cases} 7\pi/4 - \pi/\log 2 + o(1) & (d=2) \\ 91\pi/100 - \pi/\log 4 + o(1) & (d=4) \end{cases}$$

である。よって, $d=2, 4$ のとき Grötzsch 欠損は $c \searrow c_1$ で連続である。

5 2 周期点での欠損: 3 次の場合

本節では $d=4m+3$ の場合に, 2 周期点での Grötzsch 欠損を計算する。このときは, 周期倍分岐が虚軸上で起こるので, 同様に扱える。但し, いくつかの計算は現時点では $d=3$ の場合しかできていないので, 途中からは $d=3$ に制限せざるを得ない。

以下, $d=4m+3$ とする。簡単な計算により, $c=c_2=y_1-y_1^d$, $y_1=d^{-1/(d-1)}i$ ならば, P_c は固有値 -1 の放物的不動点 y_1 を持つ。そこで, c が虚軸上で c_2 に近づくときの Grötzsch 欠損を計算する。 c が純虚数のとき, P_c は involution $I(z)=-\bar{z}$ と可換なので, Julia 集合は虚軸に関して対称であることに注意する。まず, c_2 での Grötzsch 欠損を計算する。そのために, holomorphic index $i(P_{c_2}^2, y_1)$ を計算する。直接計算により,

$$\begin{aligned} (P_{c_2}^2)'(y_1) &= 1, \\ (P_{c_2}^2)''(y_1) &= 0, \\ (P_{c_2}^2)'''(y_1) &= (d^2-1)d^{2/(d-1)}, \\ (P_{c_2}^2)^{(4)}(y_1) &= -(d-1)^2(d+1)d^{3/(d-1)}i, \\ (P_{c_2}^2)^{(5)}(y_1) &= 2(d^2-1)(d^2-4)d^{4/(d-1)}, \end{aligned}$$

が従う。よって,

$$i(P_{c_2}^2, y_1) = \frac{3(13d^2-10d-27)}{40(d^2-1)},$$

となる。これは, d が偶数のときの結果に一致することに注意する。従って, 前節と全く同じ計算により, 同じ結果:

$$\begin{aligned} \text{mod}(F) &= -\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}i(P_{c_2}^2, y_1)\right)\pi \\ &= -\left(\frac{3}{4} - \frac{3(13d^2-10d-27)}{80(d^2-1)}\right)\pi, \end{aligned}$$

が得られる。次に, A_0 を y_1 の原点を含むと直接鉢とし, $\phi: A_0 \rightarrow D$ を Riemann 写像で $\phi(0)=0$, $\phi'(0) \in \mathbf{R}$ を満たすものとする, 対称性から, $R = \phi \circ P_{c_2}^2 \circ \phi^{-1}$ は Blaschke 積

$$R(z) = \frac{z^d + \frac{d-1}{d+1}}{1 + \frac{d-1}{d+1}z^d},$$

で表される。これは, 第 3 節の R と全く同じなので,

$$\begin{aligned} \text{mod}(G) &= -\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}i(R, 1)\right)\pi \\ &= \frac{3(d^2+1)}{20(d^2-1)}\pi \end{aligned}$$

が従う。よって、Grötzsch 欠損は、

$$\begin{aligned} D(c_2) &= 4(\text{mod}(G) - \text{mod}(F)) - \frac{2\pi}{\log d^2} \\ &= 2(i(R, 1) - i(P_{c_2}^2, y_1))\pi - \frac{\pi}{\log d} \\ &= \frac{3(3d^2+10d+3)}{20(d^2-1)}\pi - \frac{\pi}{\log d}, \end{aligned}$$

となる。特に $d=3$ のとき、 $D(c_2)=(9/8-1/\log 3)\pi$ である。

次に、hyperbolic な c に対し、反発的 2 周期点での Grötzsch 欠損を計算する。 $c \in i\mathbf{R}$ を周期 1 の hyperbolic component 内の点とし、 P_c の吸引的不動点の固有値を λ とする。さらに、 $c \rightarrow c_2$ のとき、放物的になるような反発的 2 周期点の固有値を Λ とすると、 c が c_2 に近いときは、指数公式を用いて

$$\frac{1}{1-\lambda^2} + \frac{2}{1-\Lambda} = i(P_{c_2}^2, y_1) + o(1),$$

という関係が示される。これより、

$$\Lambda = 1 + 2(1-\lambda^2) + 2i(P_{c_2}^2, y_1)(1-\lambda^2)^2 + o((1-\lambda^2)^2),$$

が導かれる。よって、

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{\log \Lambda} &= \frac{\pi}{1-\lambda^2} + (1 - i(P_{c_2}^2, y_1))\pi + o(1) \\ &= \frac{\pi}{2(1+\lambda)} + \left(\frac{5}{4} - i(P_{c_2}^2, y_1)\right)\pi + o(1), \end{aligned}$$

となる。次に、吸引的不動点の直接鉢 Λ_0 を単位円板に写す Riemann 写像 ϕ を、 $\phi(0)=0$, $\phi'(0)>0$ にとると、 $R = \phi \circ P_c \circ \phi^{-1}$ は、Blaschke 積で、 I と可換故、

$$R_b(z) = \frac{z^d + ib}{1 - ibz^d}, \quad 0 < b < 1,$$

と書ける。この R_b の吸引的不動点 z_0 の固有値は P_c のそれと同じ λ である。そこで、 λ と、反発的 2 周期点 $z_1, z_2 \in \partial D$ の固有値 Λ_1 を計算する。 R_b の不動点 z は、 $ib(1+z^{d+1})=z(1-z^{d-1})$ を満たす。この解は現時点では $d=3$ の場合しか計算できていない。 $d=3$ とすると、これは、

$$b\left(\frac{z^2-1}{iz}\right)^2 - \frac{z^2-1}{iz} - 2b = 0,$$

と同値である。対称性より z_0 は正の虚軸上にあるので、 $(z^2-1)/iz = (1+\sqrt{1+8b^2})/2b$ が従う。この 2 次方程式のもう一方の解は、 z_0 と単位円に関して対称な R_b の吸引的不動点 w_0 で、 w_0 の固有値は z_0 のそれに等しい。よって、解と係数の関係：

$$z_0 + w_0 = i \frac{1+\sqrt{1+8b^2}}{2b}, \quad z_0 w_0 = -1$$

から、その固有値は

$$\begin{aligned}
\lambda^2 &= R'_b(z_0)R'_b(w_0) \\
&= \frac{9(z_0w_0)^2(1-b^2)^2}{(1-ib(z_0^3+w_0^3)-b^2(z_0w_0)^3)^2} \\
&= \frac{9(1-b^2)^2}{(1+b^2-ib(z_0+w_0)((z_0+w_0)^2-3z_0w_0))^2} \\
&= \frac{36b^2}{(2b^2+1+\sqrt{1+8b^2})^2},
\end{aligned}$$

と表されるが, $\lambda < 0$ より, $\lambda = -6b/(2b^2+1+\sqrt{1+8b^2})$ であることがわかる。一方, R の 2 周期点 $z_1, z_2 \in \partial D$ は, 対称性より, $R_b(z) = -\bar{z} = -1/\bar{z}$ を満たす。これは, $z^{d+1}+1=ibz(z^{d-1}-1)$ と同値である。この方程式も, 現時点では $d=3$ の場合しか計算できていない。 $d=3$ のときは, 上と同様の議論により, $(z^2-1)/iz = (b \pm \sqrt{b^2+8})/2$ となる。 $b \rightarrow 1$ のとき, この 2 解は z_0 に合体するはずなので, 判別式は 0 に近づかねばならない。よって, $(z^2-1)/iz = (b + \sqrt{b^2+8})/2$ が従う。解と係数の関係 $z_1+z_2=i(b+\sqrt{b^2+8})/2$, $z_1z_2=-1$ から, 求める固有値は

$$\begin{aligned}
\Lambda_1 &= (R_b^2)'(z_1) \\
&= R'_b(z_1)R'_b(z_2) \\
&= \frac{\{3z_1z_2(1-b^2)\}^2}{\{1-ib(z_1^3+z_2^3)-b^2(z_1z_2)^3\}^2} \\
&= \frac{36}{(b^2+2+b\sqrt{b^2+8})^2},
\end{aligned}$$

が成り立つ。 $b \nearrow 1$ のとき, Λ_1 を λ で表したい。 $b^2=1-\epsilon$ とおくと,

$$\lambda = -1 + 4\epsilon/9 + 16\epsilon^2/81 + \dots$$

$$\Lambda_1 = 1 + 8\epsilon/9 + 56\epsilon^2/81 + \dots,$$

より,

$$\Lambda_1 = 1 + 2(\lambda+1) + 3(\lambda+1)^2/2 + \dots,$$

と書けるので,

$$\frac{\pi}{\log \Lambda_1} = \frac{\pi}{2(\lambda+1)} + \frac{\pi}{8} + o(1),$$

が成り立つ。よって, Grötzsch 欠損は

$$\begin{aligned}
D(c) &= 2\left(\frac{2\pi}{\log \Lambda} - \frac{\pi}{\log \Lambda_1} - \frac{\pi}{\log 3^2}\right) + o(1) \\
&= \left(\frac{9}{8} - \frac{1}{\log 3}\right)\pi + o(1),
\end{aligned}$$

となる。以上をまとめて次を得る。

定理 5.1 $d=4m+3, m \geq 0$ のとき,

$$\begin{aligned}
D(c_2) &= 2(i(R, 1) - i(P_{c_2}^2, y_1))\pi - \frac{\pi}{\log d} \\
&= \frac{3(3d^2 + 10d + 3)}{20(d^2 - 1)}\pi - \frac{\pi}{\log d}
\end{aligned}$$

であり, $d=3$ のとき,

$$\lim_{c \rightarrow c_2} D(c) = \left(\frac{9}{8} - \frac{1}{\log 3}\right)\pi = D(c_2),$$

が成り立つ。よって, $d=3$ のとき, Grötzsch 欠損は $c \rightarrow c_2$ で連続である。

References

- [Rip] W. C. Crowe, R. Hasson, P. J. Rippon and P. E. D Strain-Clark : On the structure of the Mandelbar set. *Nonlinearity* 2 (1989), pp. 541-553.
- [DH] A. Douady and J. Hubbard : Etude dynamique des polynomes quadratiques complexes. *Publ. Math. Orsay* 84-02 (1er partie) and 85-02 (1985) (2eme partie).
- [M1] J. Milnor : Dynamics in one complex variable : introductory lectures. Stony Brook, Preprint 1990/5, 1990.
- [N1] S. Nakane : Connectedness of the tricorn. *Erg. Th. Dyn. Sys.* 13 (1993) pp. 349-356.
- [NS1] S. Nakane and D. Schleicher : Hyperbolic components of the multicorns. Manuscript in preparation.
- [P] C. Petersen : Grötzsch defect. Phd. Thesis 1993.