

ある種の Baker 領域について

中 根 静 男*

On a Certain Class of Baker Domains

Shizuo NAKANE

Abstract

The dynamics of transcendental entire functions is considered. An example of a Baker domain where the function is a covering of finite degree is given. An example is also given indicating that the Julia set of an entire function may be disconnected even if it has a Baker domain where it is univalent. In the end, examples of Baker domains of arbitrary periods are given.

1. 序

本小論では、超越整関数の力学系を考える。超越整関数の場合、無限遠点が真性特異点であり、Picard の定理よりその近傍において関数が拡大的になる。そのために超越整関数の力学系は多項式の場合よりもはるかに複雑になる。例えば、有理関数に対して成り立つ No wandering domain 定理はもはや成立しない。他にも、Baker 領域という新たな特徴を持った領域が登場する。しかし、遊走領域や Baker 領域については明らかでないことが多い。何故ならば、それらの領域と critical point の軌道との関係が不明なためである。

以下では Baker 領域について論じる。それは、木坂の問いに対する一つの回答である。木坂は、超越整関数の Julia 集合が連結になるための必要条件を与えたが、その際、その上で関数が有限次の被覆になるような Baker 領域が存在するかという問いを提出した。本小論では、任意の n に対し、関数が n 次の被覆になるような例を与える。更に、彼が与えた必要条件が十分でないこと示す Baker 領域の例を与える。最後に、一般の周期 n の Baker 領域を持つような整関数の例を与える。

2. 超越整関数の力学系

この節では、上田、谷口、諸澤 [UTM] に従って、超越整関数の力学系について概説し、次節への準備とする。 f を超越整関数とする。その近傍で局所的に関数族 $\{f^n\}_{n \geq 0}$ が正規族（広義一様収束位相でコンパクト）になるような点 $z \in \mathbb{C}$ の全体を f の Fatou 集合と呼び、 $F(f)$ と書く。その補集合を f の Julia 集合と呼び、 $J(f)$ と書く。 $F(f)$ の連結成分を Fatou 成分と呼ぶ。点 a の近傍で f^{-1} の全ての分枝が 1 価にとれるとき a を非特異値といい、そうでないとき特異値という。 f の特異値の集合を $\text{sing}(f^{-1})$ と書く。特異値には、いわゆる critical value と asymptotic value とがある。ある道 $\alpha: [0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$ で、 $\lim_{t \rightarrow 1} \alpha(t) = \infty$, $\lim_{t \rightarrow 1} f(\alpha(t)) = a$ をみたすものがあるとき、 a は f の asymptotic value であるといい、そのような道を critical path という。例えば、 $z=0$ は $f(z)=e^z$ の asymptotic value である。

補題 2.1 $M(f) = \mathbb{C} - \overline{\text{sing}(f^{-1})}$, $\tilde{M}(f) = f^{-1}(M(f))$ とおくと、 $f: \tilde{M}(f) \rightarrow M(f)$ は被覆写像である。

asymptotic value の近傍での f の振る舞いは一般にはよくわからないが、それが孤立していれば、 $f(z)=e^z$ のそれと、被覆写像としては同じで

* 本学工学部基礎・教養 助教授
1996 年 9 月 2 日受理

ある. asymptotic value a は, その単連結な近傍 U と非有界な単連結開集合 $V \subset f^{-1}(U)$ があって, $f: V \rightarrow U - \{a\}$ が被覆写像になるとき, 対数的という. $z=0$ は $f(z)=e^z$ の対数的な asymptotic value である.

補題 2.2 f の asymptotic value $z=a$ は, 孤立していれば対数的である.

証明. 単連結な a の近傍 U で, $U - \{a\}$ は asymptotic value を含まないものとする. critical path $\alpha: [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$, $f^{-1}(U)$ の連結成分で $\alpha(t)$, $t \sim 1$ を含むものを V , $V^* = V - f^{-1}(a) \subset f^{-1}(U - \{a\})$ とおく. $V^* = V$ をしめせばよい. $f: V^* \rightarrow U - \{a\}$ は被覆ゆえ, V^* は annulus か punctured disk か disk に同相. $V^* \sim \text{annulus}$ とすると, f が整関数より, 円板が一点につぶれることになり矛盾. $V^* \sim \text{punctured disk}$ とする. f から定義される基本群への作用を考えることにより, $f|V^*$ は有限対 1 の被覆写像となるが, それは V^* が非有界に矛盾. よって $V^* \sim \text{disk}$ すなわち $V^* = V$ でなければならぬ.

補題 2.3 $J(f)$ は \mathbb{C} の非有界集合である.

これは, 多項式の Julia 集合とは決定的に異なる性質である. さて, 超越整関数の Fatou 成分には, 多項式のそれである吸引鉢, 放物鉢, Siegel 円板に加えて, 遊走領域と Baker 領域が新たに登場する. 遊走領域とは前周期的でない Fatou 成分のことであり, Baker 領域とは, 各点の軌道が ∞ に近づいてゆくような周期的な Fatou 成分を意味する.

補題 2.4 $F(f)$ の非有界成分は単連結である.

補題 2.5 $F(f)$ の多重連結成分は遊走領域である.

単連結な遊走領域も存在することに注意する. 特異値集合の性質により, 次のように整関数の部分族を定義する.

$$S = \{f; \text{sing}(f^{-1}) \text{ が有限集合}\},$$

$$\mathcal{B} = \{f; \text{sing}(f^{-1}) \text{ 有界集合}\}.$$

これらの族は比較的扱いやすい族である. 特に, S は有理関数族と類似の性質を持つ.

補題 2.6 (Eremenko-Lyubich [EL]) $f \in \mathcal{B}$ ならば, 任意の $z \in F(f)$ に対し, $\{f^n(z)\}_{n \geq 0}$ は ∞ に収

束しない.

証明. $D(w, r) = \{z; |z - w| < r\}$ とおく. $\text{sing}(f^{-1}) \subset D(0, R/2)$ となるように $R > 0$ をとり, $A = \mathbb{C} - \overline{D(0, R)}$ とおく. ある点 $z_0 \in F(f)$ の軌道が ∞ に収束したとすると, 適当な $B_0 = D(z_0, r)$ 上, $\{f^n\}_{n \geq 0}$ は ∞ に一様収束する. 全ての n に対して $B_n = f^n(B_0) \subset G = f^{-1}(A)$ としてよい. $\log(B_0)$ の一つの成分を C_0 とし, $C_n = \Psi^n(C_0)$ とおく. ここで, Ψ は, f が $U = \log(G)$ 上 Ψ の対数持ち上げとなるような関数とする. すると $\exp(C_n) = \exp \circ \Psi^n(C_0) = f^n \circ \exp(C_0) = f^n(B_0) = B_n \subset G$ 故, $C_n \subset U$ である. $\zeta_0 \in C_0$ を任意にとり, $\zeta_n = \Psi^n(\zeta_0)$ とおく. ζ_n を中心とし C_n に含まれる円板の半径の上限を d_n とすると, Koebe の 1/4 定理により, $d_{n+1} \geq d_n |\Psi'(\zeta_n)|/4$ となる. 更に任意の $z \in U$ に対し Koebe の 1/4 定理を等角写像 $\Psi^{-1}: H = \log A = \{z; \Re z > \log R\} \rightarrow U$ に適用すると, $|\Psi'(z)| \geq (\Re \Psi(z) - \log R)/4\pi$ が成立する. 定義より $\Re \Psi^n$ は C_0 上 ∞ に一様収束するので $|\Psi'(\zeta_n)| \rightarrow \infty$ となる. よって $d_n \rightarrow \infty$ となるが, これは $C_n \subset U$ より $d_n \leq \pi$ に矛盾する.

系 2.1 $f \in \mathcal{B}$ ならば, $F(f)$ は Baker 領域を含まない.

系 2.2 $f \in \mathcal{B}$ ならば, $F(f)$ の全ての成分は単連結である.

補題 2.7 $f \in S$ ならば $F(f)$ は遊走領域を含まない. つまり, 全ての Fatou 成分は前周期的である.

超越整関数に対しても, 反発的周期点が Julia 集合内で稠密になる. 一方, 発散点集合を $I(f) = \{z \in \mathbb{C}; \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(z) = \infty\}$ とおく.

補題 2.8

$$I(f) \neq \emptyset, J(f) = \partial I(f), I(f) \cup J(f) \neq \emptyset.$$

証明. $J(f) = \partial I(f)$ のみ示す. $J(f) \supset \partial I(f)$ は明らか. $z \in J(f)$ とする. $I(f)$ は無限集合だから Montel の定理より, z の任意の近傍 V に対し $(\bigcup_{n \geq 0} f^n(V)) \cap I(f) \neq \emptyset$ が成り立つが, $I(f)$ は完全不変故, $V \cap I(f) \neq \emptyset$ が従う. V は任意故, $z \in \overline{I(f)}$ となる. $I(f)$ の内点は $F(f)$ の点だから, $z \in \partial I(f)$ を得る.

補題 2.6 と補題 2.8 より次を得る.

補題 2.9 (*Eremenko* [E]) $f \in \mathcal{B}$ とすると $J(f) = \overline{I(f)}$ である.

3. Baker 領域について

この節では, critical points を有限個含むような Baker 領域の例を挙げる. 今までに知られているのは, critical points を全く含まないか, 無限個含むようなものだけであった. 例えば, Fatou の例 $f(z) = z + e^{-z} + 1$ は全ての critical points $z = 2k\pi i$ を含む Baker 領域を持つ (図 1). また, Bergweiler [B2] の例 $f(z) = 2 - \log 2 + 2z - e^z$ は, その上で f が単葉な Baker 領域 U を持つ (図 2). 更に U と f の特異値集合の軌道は正の距離を持つ. このように Baker 領域は f の特異値の軌道とはなんら関係がない.

関数族 $f_c(z) = z + e^z + c$, $c \in \mathbf{R}$ を考える. 今, $h_c(z) = ze^{z+c}$ とおくと, $h_c(e^z) = \exp(f_c(z))$ が成り立つので, f_c は関数 h_c の対数持ち上げになっている. h_c の critical point は $z = -1$, asymptotic value は $z = 0$ 故, 特異値集合は $\text{sing}(h_c^{-1}) = \{-e^{c-1}, 0\}$ である. よって, $h_c \in \mathcal{B}$ である. f_c の critical points は $z = (2k+1)\pi i$, $k \in \mathbf{Z}$ で, 特異値集合は $\text{sing}(f_c^{-1}) = \{(2k+1)\pi i - 1 + c; k \in \mathbf{Z}\}$ である.

まず h_c の力学系を調べる. すると, それを対数持ち上げすることにより, f_c の力学系がわかる. 次は直接計算から明らかである.

補題 3.1 h_c の不動点は $z=0$, $-c$ の 2 点である. $z=0$ は $c < 0$ ならば吸引的, $c=0$ ならば放物的, $c > 0$ ならば反発的である. $z=-c$ は, $0 < c < 2$ ならば吸引的, $c=0, 2$ で放物的, それ以外で反発的である.

補題 3.2 $c \leq 0$ のとき, 実軸上の開区間 $(-\infty, -c)$ は $z=0$ の直接鉢に含まれ, $[-c, \infty)$ は Julia 集合 $J(h_c)$ に含まれる. $0 < c < 2$ のとき, $(-\infty, 0)$ は $-c$ の直接鉢に含まれ, $[0, \infty)$ は $J(h_c)$ に含まれる.

証明. 実軸上での h_c の形から $c \leq 0$ のとき, $x < -c$ ならば $\lim_{n \rightarrow \infty} h_c^n(x) = 0$, $x > -c$ ならば $\lim_{n \rightarrow \infty} h_c^n(x) = +\infty$ が容易に従う. $h_c \in \mathcal{B}$ より補題 2.9 を用いて $[-c, \infty) \subset J(h_c)$ が従う. $0 < c < 2$

のときも同様.

$\log([-c, \infty)) = \{z; \Re z > \log(-c), \Im z = 2k\pi, k \in \mathbf{Z}\}$ 等から, 次を得る.

補題 3.3 $k \in \mathbf{Z}$ とする.

1. $c < 0$ ならば, $\Im z = (2k+1)\pi$ 上の点の軌道は $-\infty + (2k+1)\pi i$ に近づく. $\{z; \Im z = 2k\pi, \Re z > \log(-c)\} \subset J(f_c)$ で, この集合内の点の軌道は $+\infty + 2k\pi i$ に近づく. $\{z; \Im z = 2k\pi, \Re z < \log(-c)\}$ の点の軌道は $+\infty + 2k\pi i$ に近づく.
2. $0 < c < 2$ ならば $z_c = \log c + (2k+1)\pi i$ は f_c の吸引的不動点で, $\{z; \Im z = (2k+1)\pi\}$ は z_c の直接吸引鉢に含まれる. $\{z; \Im z = 2k\pi\} \subset J(f_c)$ で, この集合内の点の軌道は $+\infty + 2k\pi i$ に近づく.
3. $c=0$ ならば, $\Im z = (2k+1)\pi$ 上の点の軌道は $-\infty + (2k+1)\pi i$ に近づく. $\{z; \Im z = 2k\pi\} \subset J(f_c)$ で, この集合内の点の軌道は $+\infty + 2k\pi i$ に近づく.

系 3.1 $c < 0$ ならば, f_c は Baker 領域を一つだけ持ち, そこで f_c は無限対 1 の写像である. $c=0$ ならば, f_0 は各帯状領域 $2k\pi < \Im z < 2(k+1)\pi$ に一つずつ Baker 領域を持つ. 各 Baker 領域はただ一つの critical point $(2k+1)\pi i$ を持つ. よって, f_0 はそこで 2 対 1 である. $J(f_0)$ は連結でない.

証明. f_0 が各 Baker 領域 U 上 2 対 1 であることは, $f_0: U \rightarrow U$ の被覆写像としての性質から従う. 補題 2.4 より U は単連結である. $V \subset U$ を f_0 の critical value を含まない開集合とすると, $f_0^{-1}(V)$ は単連結な開集合の和で各成分上 f_0 は単葉. 一つの成分 V' に着目する. V を U を内で広げてゆくと, V' も広がり, やがて他の成分 V'' とぶつかるが, そのときは V は critical value とぶつかり, V' と V'' は critical point で接する. さらに V を大きくすると, 再び $f_0^{-1}(V)$ の成分は単連結になるが, critical point を含む成分 V' 上 f_0 は 2 対 1 になる. 他には critical value はないので, これ以上 V を大きくしていても何もおこらない. よって, $f_0^{-1}(V)$ は連結であり, そこで f_0 は 2 対 1, 従って U 上でも 2 対 1 である.

$J(f_0)$ が連結でないことは, 木坂 [K] の一般的

な結果からも従うが、今の場合は明らかである。
図3は $J(f_0)$ 、図4は $J(h_0)$ 、図5, 6は $J(f_1)$ 、図7は $J(f_{-1})$ である。

全く同様にして、 $f_n(z) = z + \sum_{k=1}^n \frac{n!}{kk!(n-k)!} e^{kz}$ は、その上で f_n が $n+1$ 対1であるようなBaker領域を持つことが示せる。 $f'_n(z) = (1+e^z)^n$ 故、 f_n は $z = (2k+1)\pi i$ で n 位のcritical pointをもつことに注意する。この場合、 $h_n(z) = z \exp(\sum_{k=1}^n \frac{n!}{kk!(n-k)!} z^k)$ である。図8, 9は各々 $J(f_2)$, $J(f_3)$ である。

4. 木坂の定理に関する注意

この節では、木坂[K]の結果の特にBaker領域に関わる部分を紹介し、注意を与える。木坂の定理は超越関数のJulia集合が連結であるための必要条件を与えたものである。それは非有界な周期的な領域の性質として記述される。その領域が吸引鉢、放物鉢、Siegel円板、Baker領域の場合を別々に扱っているが、ここではBaker領域の場合のみを述べる。

定理 4.1 (木坂[K] 主定理, Baker領域の場合)
 U を超越整関数の周期 k のBaker領域,
 $\varphi: \mathbf{D} \rightarrow U$ を Riemann 写像, $P_{f^k} = \overline{\bigcup_{n \geq 0} f^{kn}(\text{sing}((f^k)^{-1}))}$ とおく. $f^k|_U$ が単葉でなく, ある点 $q \in \partial U - P_{f^k}$ と $l \in \mathbf{N}$, q を端点とする連続曲線 $C \subset U$ で $f^l(C) \supset C$ を満たすものがあると仮定する. すると, 集合

$$\Theta_\infty = \{e^{i\theta}; \varphi(e^{i\theta}) = \lim_{r \rightarrow 1} \varphi(re^{i\theta}) = \infty\}$$

の閉包は $\partial \mathbf{D}$ 内の完全集合を含む. 特に $J(f)$ は連結でない。

更に、木坂[K]はBergweiler[B2]の例のJulia集合が連結であることを示した。

補題 4.1 (木坂[K], 定理4) 関数 $f(z) = 2 - \log 2 + 2z - e^z$ の Fatou 成分の境界は \overline{C} 内のJordan曲線である. 特に $J(f)$ は連結である。

この例は、その上で f が単葉なBaker領域を持つので、上の定理には抵触しない。彼は更に次のように予想した。

予想 4.1 超越整関数 f が、その上で f^n が単葉であるような周期 n のBaker領域を持たないなら

ば $J(f)$ は連結でない。

逆に、その上で f が単葉なBaker領域を持つならば $J(f)$ は連結になるか、という問題も考えられるが、それも真ではない。反例を挙げる。

定理 4.2 $f(z) = 5 - \log 2 + 2z - e^z$ の Julia 集合は連結でない。

証明. f は左半平面を含むようなBaker領域 U を持ち、その上で f は単葉である。それは、 $h(z) = z^2 e^{5-z}/2$ の $z=0$ の吸引鉢を対数で持ち上げたものであることから従う。次に実軸上で f を考える。 $y = 5 - \log 2 + 2x - e^x$ は $y' = 2 - e^x$, $y'' = -e^x < 0$ より、下に凸で、 $x < \log 2$ で増加、 $x > \log 2$ で減少し、 $x = \log 2$ で最大値 $y = 3 + \log 2 > 0$ をとる。 y は $x < 0$, $x > 0$ に一つずつ不動点を持つが、負の不動点 x_0 は明らかに反発的である(正の不動点も反発的になることが、数値実験からわかる)。更に、 $x < x_0$ ならば $x \in U$ となること、 $f^{-1}(x_0)$ の内では正の実数は唯一なのでそれを x_1 とおくと、 $x > x_1$ を満たす実数 x は U の逆像の一つ U' に含まれること、critical point $z = \log 2$ が U' のある逆像 U'' に含まれることは容易にわかる。

我々は U'' に注目する。 $f^{-1}(\{x; x > x_1\})$ の $\log 2$ を含む連結成分は U'' に含まれる。それは、 $\Im f(z) = 2y - e^x \sin y = 0$ つまり $x = \log(2y/\sin y)$ の、点 $(\log 2, 0)$ を含む成分だが、この曲線は、 $\Im z = \pm \pi$ に漸近しつつ ∞ に近づく。明らかに、この曲線の両側には $J(f)$ の点 $z = x_0$ と $z = x_1$ があるので、 $J(f)$ は連結でない。

図10は $J(f)$ である。図11は $\log 2$ を中心とするその拡大図である。木坂の結果はBaker領域自身に着目し、それがJulia集合の連結性を破るような条件を与えているが、この例では、Baker領域の逆像達を考えることにより、その連結性を破るのである。この例では、 $\# \Theta_\infty = 2$ である。

5. 周期 n のBaker領域の例

今までに得られている超越整関数のBaker領域は全て周期が1である。そこで、周期が $n \geq 2$ のBaker領域の例は存在するかという問題が考えられる。有理型関数の場合は例が存在する。実際、Baker, Kotus and Lü[BKL]は、 $f(z) = 1/z - e^z$

が周期 2 の Baker 領域を持つことを示した。図 12, 13 はその Julia 集合である。

しかし、彼らの例は有理型関数である。我々は整関数の例をさがしたい。ここでは、その例として $f(z) = \omega g(z)$, $g(z) = z(1 + e^{-z^n})$, $\omega = e^{2\pi i/n}$ を考察する。 $f(\omega z) = \omega f(z)$ に注意すると、 $f^n(z) = \omega^n g^n(z) = g^n(z)$ より $J(f) = J(g)$ が従い、それは原点の周りの $1/n$ の回転で不変という対称性を持つことがわかる。原点は反発的な不動点である。我々は正の実軸が g の周期 1 の Baker 領域 D に含まれることを示す。すると D が f の周期 n の Baker 領域であることは容易にわかる。

正の実軸上 g は単調増加で、各点の軌道は $+\infty$ にゆっくりと発散する。一方、動径 $R = \{z = re^{\pi i/n}; r > 0\}$ 上 $g(z) = e^{\pi i/n} r(1 + e^{r^n})$ 故、 R 上の点の g による軌道は急激に ∞ に発散する。その発散の増大度を評価することにより、次が示される。

補題 5.1 動径 $\omega^k R$, $0 \leq k \leq n-1$ は $J(g)$ に含まれる。

証明。 $\omega^k R$ は明らかに g -不変である。それが $F(g)$ に含まれるとすると、次の補題を $\omega^k R$ を含む Baker 領域 G に適用すれば、そこでの発散の仕方はゆるやかでなくてはならない。それは、上の g の形に矛盾する。

補題 5.2 G を非有界な C の開集合で、境界は少なくとも 2 個の有限点を含むもの、 g を G 上の正則関数とする。 G の領域 D は、全ての k に対し $g^k(D) \subset G$ を満たし、 $\lim_{k \rightarrow \infty} g^k|_D = \infty$ とする。すると、任意のコンパクトな $K \subset D$ に対し定数 C, k_0 があって、

$$|g^k(z')| \leq |g^k(z)|^C, \quad z, z' \in K, k \geq k_0,$$

が成り立つ。更に $g(D) \subset D$ ならば、

$$\log \log |g^k(z)| = O(n), \quad z \in K, k \rightarrow \infty,$$

かつ、定数 $A > 1$ と曲線 $\gamma \subset D$ があって、

$$|z|^{1/A} \leq |g(z)| \leq |z|^A, \quad z \in \gamma,$$

が成り立つ。もし $\overline{C} - G$ が連結集合 Γ で、ある $a \in \mathbb{C}$ があって $\{a, \infty\} \subset \Gamma$ を満たすようなものを含むならば、上の 3 個の評価は各々次で置き換え

られる。

$$\begin{aligned} |g^k(z')| &\leq C|g^k(z)|, \\ \log |g^k(z)| &= O(k), \\ |z|/A &\leq |g(z)| \leq A|z|. \end{aligned}$$

次に正の実軸が $F(g)$ に含まれることを示す。すると、それらを含む Fatou 成分が周期 n の Baker 領域となることがわかる。

補題 5.3 $\epsilon > 0, K > 0$ を適当にとると、 $\{z = x + iy; |nx^{n-1}y| < \epsilon, x > K, |y| < 1/K\}$ は g -不変である。

証明。 $X + iY = z^n = (x + iy)^n$, $u + iv = w = g(z)$ とおくと、簡単な計算により、

$$\begin{aligned} Y &= x^n(1 + o(1)), \\ Y &= nx^{n-1}y(1 + o(1)), \\ u &= x + (x \cos Y + y \sin Y)e^{-X}, \\ v &= y - (x \sin Y - y \cos Y)e^{-X}, \end{aligned}$$

となることがわかる。簡単のため、 $y > 0$ で考える。 $nx^{n-1}y < \epsilon$ ならば、

$$\begin{aligned} nx^{n-1}y(1 - \epsilon^2/3) &\leq \sin Y \leq nx^{n-1}y, \\ 1 - \epsilon^2 &\leq \cos Y \leq 1, \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} |u| &\geq |x|\{1 + (1 - \epsilon^2 + nx^{n-2}y^2(1 - \epsilon^2/3))e^{-X}\} > |x|, \\ |v| &\leq |y|\{1 - (n(1 - \epsilon^2/3)x^n - 1)e^{-X}\} < |y|, \end{aligned}$$

が従い、更に、 $|u| \leq |x|\{1 + (1 + nx^{n-2}y^2)e^{-X}\}$ より、

$$\begin{aligned} |nu^{n-1}v| &\leq |nx^{n-1}y|\{1 - n((1 - \epsilon^2/3)x^n - 1 - (n-1)x^{n-2}y^2 + o(1))e^{-X}\} < |nx^{n-1}y|, \end{aligned}$$

も従う。

系 5.1 正の実軸は $F(g) = F(f)$ に含まれる。従って、 f の周期 n の Baker 領域に含まれる。

証明。 $J(g)$ は反発的な周期点の集合の閉包に一致する。前補題は正の実軸の遠方の部分の近傍 $\{z = x + iy; |nx^{n-1}y| < \epsilon, x > K, |y| < 1/K\}$ の中には周期点が存在し得ないことを意味する。従って、正の実軸の $x > K$ の部分は $F(g)$ に含まれる。正の実軸は g -不変故、それ自身が $F(g)$ に含まれる。

図 14, 15, 16 は各々 $n=2, 3, 4$ の場合の $J(f)$ で

ある.

References

- [BKL] I.N. Baker, J. Kotus and Y. Lü: Iterates of meromorphic functions III: Preperiodic domains. Erg. Th. Dyn. Sys. 11 (1991) pp.603-618.
- [B1] W. Bergweiler: Iteration of meromorphic functions. Bull. Amer. Math. Soc. 29 (1993) pp.151-188.
- [B2] W. Bergweiler: Invariant domains and singularities. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 117 (1995) pp.525-532.
- [E] A.E. Eremenko: On the iteration of entire functions. Dynamical systems and Ergodic theory, Banach center Publ. 23 (1989) pp.339-344.
- [EL] A.E. Eremenko and M. Yu. Lyubich: Dynamical properties of some classes of entire functions. Ann. Inst. Fourier Grenoble. 42 (1992) pp.989-1020.
- [K] M. Kisaka: On the connectivity of Julia sets of transcendental entire functions. Preprint 1995.
- [M1] J. Milnor: Dynamics in one complex variable: introductory lectures. Stony Brook Preprint, 1990/5.
- [UTM] 上田哲生, 谷口正彦, 諸澤俊介: 複素力学系序説, 培風館, 1995.

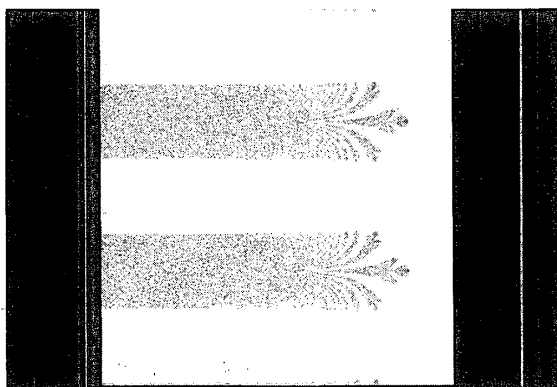


図 1

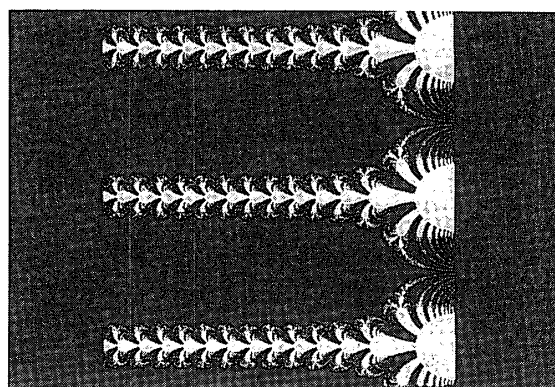


図 5

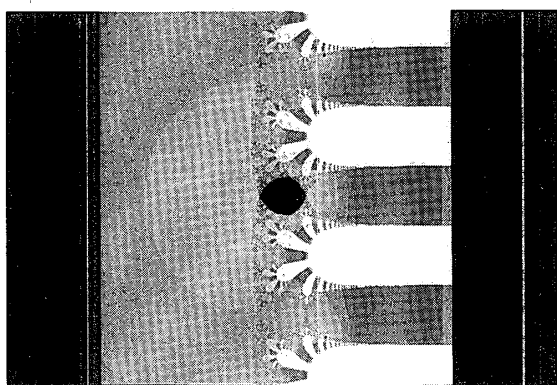


図 2

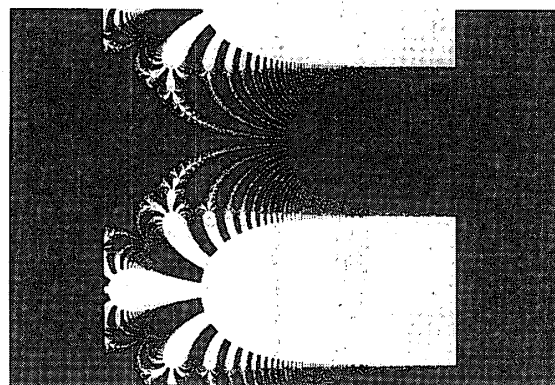


図 6

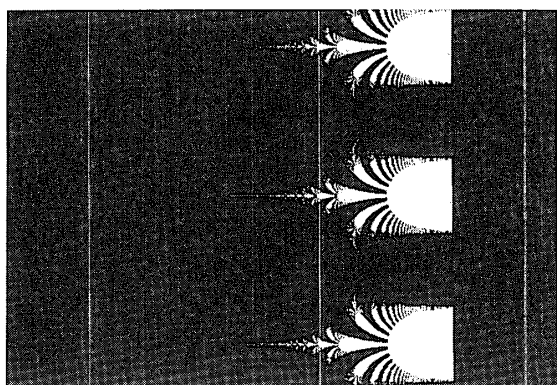


図 3

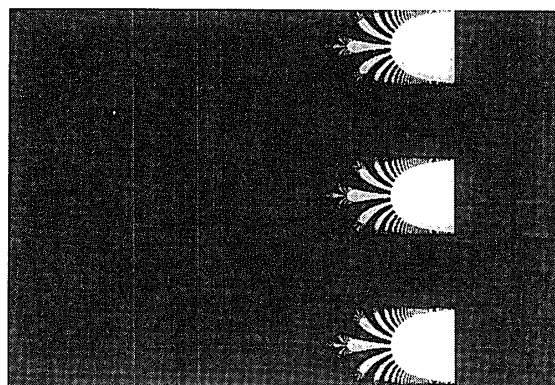


図 7

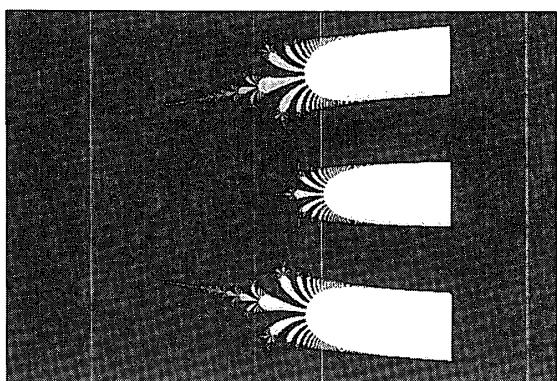


図 4

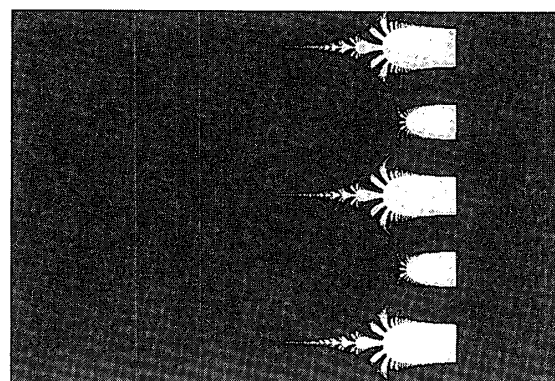


図 8

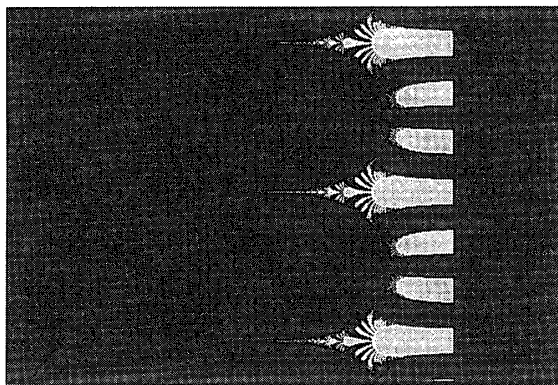


図 9

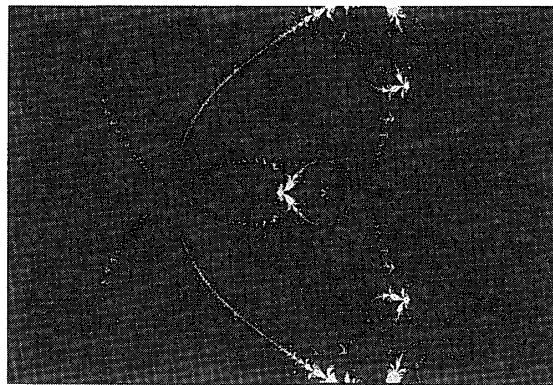


図 13

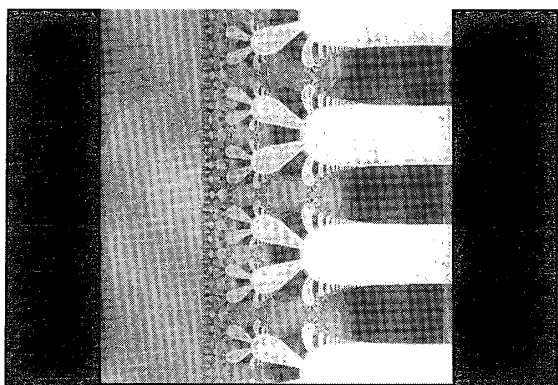


図 10

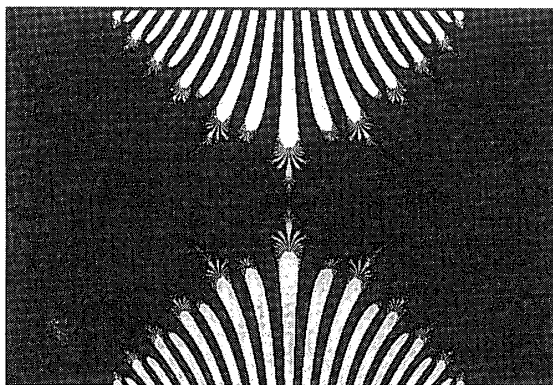


図 14

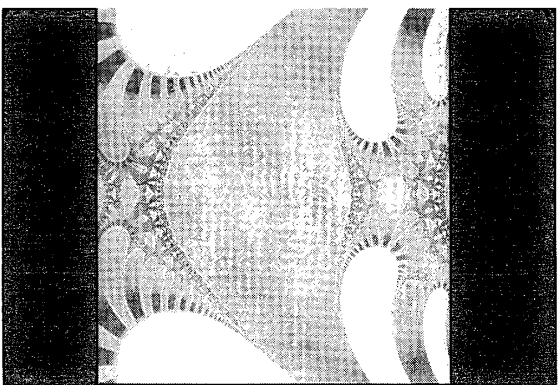


図 11

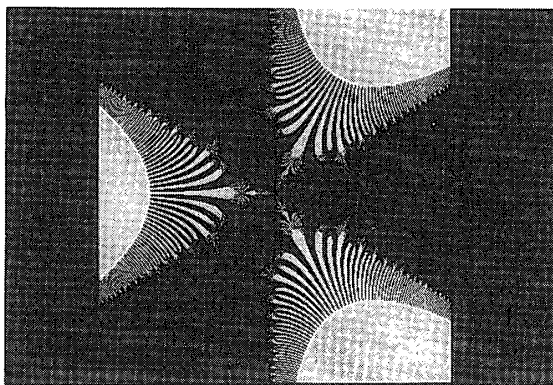


図 15

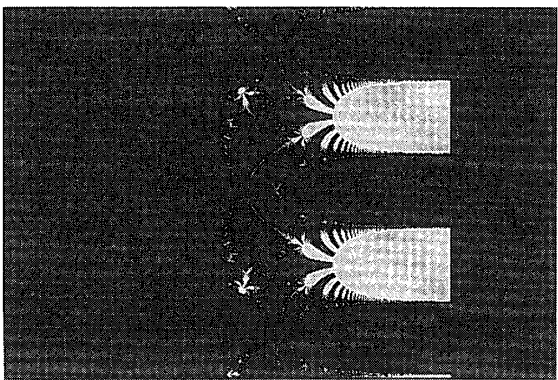


図 12

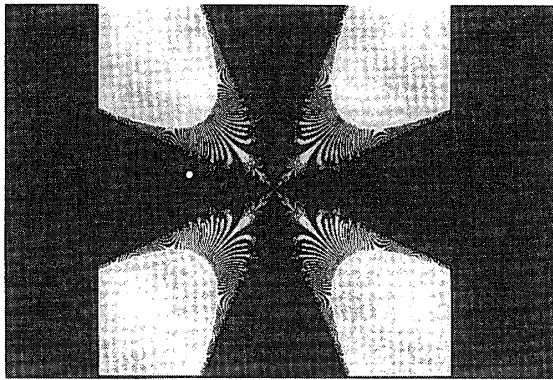


図 16