

放物型周期点の分岐について

中 根 静 男*

On Bifurcation of Parabolic Periodic Points

Shizuo NAKANE

abstract: Bifurcation phenomena of parabolic periodic points for antipolynomials are considered. In the parameter plane, at a parabolic point of even period k with multiplier $e^{2\pi i p/q}$, a period q -tupling bifurcation is shown to occur by virtue of the method of quasiconformal surgery. Bifurcations through the boundaries of hyperbolic components of odd periods are also considered, which are characteristic to the antiholomorphic dynamics.

§1. 序

反多項式写像族 $f_c(z) = \bar{z}^d + c$, $c \in \mathbb{C}$ の力学系を考える. f_c は反正則だが, その2回合成 $f_c^2(z) = (z^d + \bar{c})^d + c$ は正則なので, f_c の充填 Julia 集合 K_c と Julia 集合 J_c は多項式の場合と同様に定義できる:

$$K_c = \{z \in \mathbb{C}; z \text{ の軌道 } \{f_c^n(z); n \geq 0\} \text{ が有界}\}, \\ J_c = \partial K_c.$$

この族の connectedness locus:

$$M_d^* \equiv \{c \in \mathbb{C}; J_c \text{ が連結}\}$$

$$= \{c \in \mathbb{C}; 0 \text{ の軌道 } \{f_c^n(0); n \geq 0\} \text{ が有界}\}$$

は multicorn と呼ばれ, 最近研究が進みつつある.

特に $d=2$ のとき, M_2^* は [1] では Mandelbar 集合, [3] では tricorn と呼ばれ, よく研究されている. tricorn は 3 次多項式写像族の研究と関係が深く, [3] では, その 3 次写像族の connectedness locus の, ある実 2 次元の断面に tricorn 状の集合が現れることを数値実験で示した. それが本当に tricorn と同相であることを示すのは興味深い問題であり, 筆者の目標でもあるのだが, それは将

来の課題である. 実際, $d=2$ のとき, 本研究の写像族は 3 次写像族の力学系の一つのモデルとなっている. この意味で本研究は重要であろう.

反正則写像族の力学系が正則写像族のそれと決定的に異なるのは, パラメータに関する正則性が失われることである. 従って, z 平面では問題はないが, パラメータ平面では正則関数の諸性質が使えない所に困難がある. 容易に分かるように, 反正則写像の偶数回の合成は正則に, 奇数回の合成は反正則になる. 従って, 偶数周期に関係する場合は, 正則写像族のときと同様の結果が得られるが, 奇数周期の場合は全く様子が異なってくる. 詳細は [6] に発表する予定である.

この小論では, f_c の放物型周期点の分岐を考える. $f_c^k(z_0) = z_0$ を満たすような k があるとき z_0 は f_c の周期点といい, その様な最小の k を z_0 の周期という. このときは z_0 を f_c の k 周期点ともいう. f_c の k 周期点 z_0 の固有値 $\rho = \rho(z_0)$ を次のように定義する.

$$\rho = \begin{cases} \left(\frac{d}{dz} f_c^k\right)(z_0) & (k \text{ が偶数}), \\ \left(\frac{d}{dz} f_c^{2k}\right)(z_0) & (k \text{ が奇数}). \end{cases}$$

* 本学基礎・教養・助教授
1994 年 8 月 29 日受理

$|\rho|=0, <1, =1, >1$ のとき, z_0 は各々超吸引的, 吸引的, 無関心的, 反発的という. 無関心的であって, 更に $\rho^q=1$ を満たす q があるとき, z_0 は放物型という. k が奇数ならば, 簡単な計算により常に $\rho \geq 0$ が従うので, 無関心的ならば $\rho=1$ となり, 常に放物型である.

f_c の危点 0 の軌道 $\{f_c^n(0); n \geq 0\}$, が, 吸引的周期点に収束するとき, f_c は双曲的という. 特に f_c が有限な吸引的周期点を持てば, 0 の軌道は必ずそれに収束するので, f_c は双曲的であり, c は M_d^* に入る. M_d^* の双曲的なもの全体 H_d を双曲的部分といい, その連結成分を双曲的成分という. 各双曲的成分には, ある周期 k があって, そこでは f_c は吸引的 k 周期点 z_c を持つ. 各成分 W_k の元 c に対し, z_c の固有値を対応させる写像:

$$\Lambda: W_k \rightarrow D = \{|\rho| < 1\}$$

を固有値写像という. これについては次の結果がある.

定理 1. ([6] Nakane & Schleicher)

k は偶数とする. Λ は $\Lambda^{-1}(0)$ で分岐する $d-1$ 次の分岐被覆である. $\Lambda^{-1}(0)$ は超吸引的 k 周期点をもつ唯一の元からなる. その元を W_k の中心という. また, Λ は W_k の境界 ∂W_k にまで連続に拡張され, $\Lambda: \partial W_k \rightarrow S^1$ は奇数周期の成分の境界との交わりを除いて, 局所的に単射である.

この定理は, 多項式写像族 $P_c(z) = z^d + c$, $c \in \mathbb{C}$ の connectedness locus M_d (一般化された Mandelbrot 集合) の場合には, 全ての周期 k に対して成り立つ.

さて, 定理 1 から, 双曲的成分の境界は無関心的周期点を持つような f_c から成ることが分かるが, 逆も正しい. 即ち, パラメータ c をうまく変えることにより, 無関心的周期点を同じ周期の吸引的周期点に変形することができる. これは次節において surgery によって示される. 特に周期 k の放物的点 c (即ち f_c が放物型 k 周期点を持つ様な点 c) は周期 k の双曲的成分の境界上にある. M_d の場合には更に次のことが分かっている.

定理 2. ($d=2$ のとき [2] Douady & Hubbard)

M_d 内の周期 k の放物的点 a が $\Lambda(a) = e^{2\pi i p/q}$ を満たすならば, a は周期 kq の双曲的成分の境界

上にもある. つまり, $c=a$ で周期 q 倍分岐が起こる.

証明は, $c=a$ の近くで kq 周期点の固有値 $\rho = \rho(c)$ を見ればよい. P_c の場合, $\rho(c)$ が c の正則関数なので開写像であり, $\rho(a)=1$ なので, $c=a$ の付近でその絶対値が 1 より小になる点があるからである.

しかし, 我々の場合, $\rho = \rho(c, \bar{c})$ は c の正則関数ではないので, 同様には証明できない. 実際, $k=1$ のときは奇妙なことが起こる. Winters [8] は, 周期 1 の双曲的成分の境界は他のどんな成分も付いていない弧を含むことを示した. にも関わらず, 偶数周期の場合には, M_d^* でも定理 2 と同じことが成り立つ (定理 4). それを示すのがこの小論の目的である.

同時に, 奇数周期の場合, 特に $k=1$ の場合に何が起きているかを明らかにする. 奇数周期の双曲的成分の境界は有限個のカusp点と, それを結ぶ非カusp点から成る弧から構成される. カusp点では偶数周期の場合と同様の周期倍分岐が起こるが, 非カuspな弧の上では周期倍分岐というより, saddle-node 分岐が生じる. そのある部分は 2 倍の周期の成分と境界を共有することも示される.

§ 2. 無関心的周期点の分岐

この節では f_c の無関心的 k 周期点が, パラメータ c を変えることにより吸引的 k 周期点に変形されることを示す. z_0 を f_a の固有値 ρ の無関心的 k 周期点とし, $z_j = f_a^j(z_0)$, $0 \leq j \leq k-1$ とおく. 反多項式 $g(z)$ を, $g(z_j) = 0$, $0 \leq j \leq k-1$ かつ $g(z) = O(\bar{z}^d)(z \rightarrow 0)$ とする.

$F_\epsilon(z) = f_a(z) + \epsilon g(z)$ とおく. $F_\epsilon(z_j) = f_a(z_j) = z_{j+1}$ 故, z_0 は F_ϵ の k 周期点でもある. その固有値 λ_ϵ を計算する. k が偶数 $2n$ のとき,

$$\begin{aligned} \lambda_\epsilon &= \left(\frac{d}{dz} F_\epsilon^{2n} \right) (z_0) = \prod_{j=0}^{n-1} \left(\frac{d}{dz} F_\epsilon^2 \right) (z_{2j}) \\ &= \prod_{j=0}^{n-1} F'_\epsilon(z_{2j+1}) \overline{F'_\epsilon(z_{2j})} \\ &= \prod_{j=0}^{n-1} (f'_a(z_{2j+1}) + \epsilon g'(z_{2j+1})) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \overline{(f_a'(z_{2j}) + \varepsilon g'(z_{2j}))} \\
& = \prod_{j=0}^{n-1} f_a'(z_{2j+1}) \overline{f_a'(z_{2j})} \left(1 + \frac{g'(z_{2j+1})}{f_a'(z_{2j+1})} \varepsilon\right) \times \\
& \quad \times \overline{\left(1 + \frac{g'(z_{2j})}{f_a'(z_{2j})} \varepsilon\right)} \\
& \equiv \left(\frac{d}{dz} f_a^{2n}\right)(z_0) \{1 + A\varepsilon + B\bar{\varepsilon} + O(|\varepsilon|^2)\} \\
& \equiv \rho \{1 + A\varepsilon + B\bar{\varepsilon} + O(|\varepsilon|^2)\}.
\end{aligned}$$

ここで、 g' 等は $\bar{\varepsilon}$ についての微分である。以下も同様。 $g'(z_j)$ を適当にとることにより、

$$A = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{g'(z_{2j+1})}{f_a'(z_{2j+1})} \neq 0, \quad B = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{g'(z_{2j})}{f_a'(z_{2j})} = 0,$$

とできるので、 $|\varepsilon|$ が十分小さいとき、 $|\lambda_\varepsilon| < 1$ にできる。従って、 F_ε は z_0 を吸引的 k 周期点に持つ。 F_ε の次数は d より大きくなっているかも知れないが、 R を大に、 $|\varepsilon|$ を十分小にとると、

$$F_\varepsilon|_{D_R} : D_R \equiv \{|z| < R\} \rightarrow F_\varepsilon(D_R)$$

は d 次のantipolynomial-like mapになる。Straightening Theoremにより、それは d 次反多項式とハイブリッド同値になるが、 g の性質から、その反多項式は $f_{c(\varepsilon)}$ の形をしていることが分かる。ここで $c(\varepsilon)$ は ε の連続関数であり、明らかに $c(0) = a$ となるので、 ε を実パラメータにとると、 $c = a$ の近傍に吸引的なパラメータの弧 $c = c(\varepsilon)$ が存在することが分かった。 k が奇数のときも同様にして示される。このとき、固有値 $\lambda_\varepsilon = \left(\frac{d}{dz} F_\varepsilon^{2k}\right)(z_0)$ は実数で、 $B = \bar{A}$ となる。こうして次が証明された。

定理 3. f_a が無関心的 k 周期点を持てば、 a は M_d^* の周期 k の双曲的成分の境界上にもある。

§ 3. 放物型周期点の分岐

この節では次の主結果を証明する。

定理 4. f_a が偶数周期 $2k$ で固有値 $\rho = e^{2\pi i p/q}$ の放物型周期点 z_0 を持つならば、 a は周期 $2kq$ の双曲的成分の境界上にある。実は、 a は、その成分の“principal root”である。

証明は定理 3 のそれと同様に surgery を用いるが、 z_0 から分岐する $2kq$ 周期点の固有値の評価をする必要がある。仮定より

$$f_a^{2k}(z) = z_0 + \rho(z - z_0) + O((z - z_0)^2).$$

従って、

$$f_a^{2kq}(z) = z - b(z - z_0)^{q+1} + O((z - z_0)^{q+2}), \quad b \neq 0.$$

と表される。ここで $z - z_0$ の2次から q 次の項がないのは、 $z = z_0$ の周りに q 個のpetal (花弁) があるからで、 $q+1$ 次の項が消えないのは、危点 z_0 ただ一つだからである。

さて、 $z_j = f_a^j(z_0)$, $0 \leq j \leq 2k-1$ とし、反多項式 $g(z)$ を、 $g(z_j) = 0$, かつ $g(z) = O(\bar{z}^d)$ ($z \rightarrow 0$) を満たすものとして、 $F_\varepsilon(z) = f_a(z) + \varepsilon g(z)$ とおく。 $F_\varepsilon(z_j) = f_a(z_j) = z_{j+1}$ より、 z_0 は F_ε の $2k$ 周期点でもある。その固有値 ρ_ε とおくと、

$$F_\varepsilon^{2k}(z) = z_0 + \rho_\varepsilon(z - z_0) + O((z - z_0)^2), \quad \rho_0 = \rho,$$

$$F_\varepsilon^{2kq}(z) = z_0 + (1 + A_\varepsilon)(z - z_0) - b(z - z_0)^{q+1} + O(|\varepsilon|(z - z_0)^2).$$

ここで、 A_ε を見てみる。

$$\begin{aligned}
1 + A_\varepsilon &= \rho_\varepsilon^q = \left(\frac{d}{dz} F_\varepsilon^{2kq}\right)(z_0) \\
&= \prod_{j=0}^{kq-1} F_\varepsilon'(z_{2j+1}) \overline{F_\varepsilon'(z_{2j})} \\
&= \prod_{j=0}^{kq-1} (f_a'(z_{2j+1}) + \varepsilon g'(z_{2j+1})) \\
& \quad \times \overline{(f_a'(z_{2j}) + \varepsilon g'(z_{2j}))} \\
&= \prod_{j=0}^{kq-1} f_a'(z_{2j+1}) \overline{f_a'(z_{2j})} \left(1 + \frac{g'(z_{2j+1})}{f_a'(z_{2j+1})} \varepsilon\right) \\
& \quad \times \overline{\left(1 + \frac{g'(z_{2j})}{f_a'(z_{2j})} \varepsilon\right)} \\
&\equiv \left(\frac{d}{dz} f_a^{2kq}\right)(z_0) (1 + C\varepsilon + D\bar{\varepsilon} + O(|\varepsilon|^2)) \\
&= 1 + C\varepsilon + D\bar{\varepsilon} + O(|\varepsilon|^2).
\end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned}
C &= \sum_{j=0}^{kq-1} \frac{g'(z_{2j+1})}{f_a'(z_{2j+1})} = q \sum_{j=0}^{k-1} \frac{g'(z_{2j+1})}{f_a'(z_{2j+1})}, \\
D &= \sum_{j=0}^{kq-1} \frac{\overline{g'(z_{2j})}}{\overline{f_a'(z_{2j})}} = q \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\overline{g'(z_{2j})}}{\overline{f_a'(z_{2j})}},
\end{aligned}$$

であるが、 $g'(z_j)$ は任意にとれるので、 $A_\varepsilon = C\varepsilon + O(|\varepsilon|^2)$, $C \neq 0$ とできる。実際、 $g'(z_j) = 0$ ($j \neq 1$), $g'(z_1) \neq 0$ とすると、 $z_{2k+j} = z_j$ に注意して、 $D = 0$, $C = 2qg'(z_1)/f_a'(z_1) \neq 0$ が従う。よって、 z_0 から分岐する F_ε の $2kq$ 周期点 $z = w_\varepsilon$ は

$$\begin{aligned} 0 &= F_{\varepsilon}^{2kq}(z) - z \\ &= (z - z_0)\{A_{\varepsilon} - b(z - z_0)^q + O(|\varepsilon|(z - z_0))\} \end{aligned}$$

を満たすので, $w_{\varepsilon} = z_0 + \left(\frac{C\varepsilon}{b}\right)^{1/q}(1 + O(|\varepsilon|))$ となり, その固有値 λ_{ε} は

$$\begin{aligned} \lambda_{\varepsilon} &= \left(\frac{d}{dz} F_{\varepsilon}^{2kq}\right)(w_{\varepsilon}) \\ &= 1 + A_{\varepsilon} - (q+1)b(w_{\varepsilon} - z_0)^q \\ &\quad + O(|\varepsilon|(w_{\varepsilon} - z_0)) \\ &= 1 - qC\varepsilon(1 + O(|\varepsilon|)). \end{aligned}$$

となる. ε を実パラメータとし, $g'(z_1)$ をうまくとることによって, $|\varepsilon|$ が十分小のとき $|\lambda_{\varepsilon}| < 1$ とできる. 即ち, w_{ε} は F_{ε} の吸引的 $2kq$ 周期点になる. あとは前節と同様にして, $c = a$ の近傍に吸引的な点の弧 $c = c(\varepsilon)$ を得る.

注意. 奇数周期の場合でも, カスパ点では同様に議論できる. §5 を見よ.

§4. 反正則分岐について

前節では偶数周期の双曲的成分の境界上での放物型周期点の分岐について考察した. しかし, 奇数周期の成分の場合は様相が全く異なる. その境界上の点は全て放物型であることに注意する. 数値実験によれば, その境界は $d+1$ 本の弧と $d+1$ 個のカスパ点から成っている. ($k=1$ のときは証明できる.) 各々の弧は Mandelbrot 集合のカスパ点に対応する. 正確には, カスパ点がブローアップしたものというべきであろう. この事実が, 起こり得る分岐に大きな制限を与えるのみならず, 反正則写像族の力学系を正則写像族のそれと著しく異ならせる元凶となっている.

ここで, カスパ点を定義しよう. 奇数周期 k の双曲的成分の境界上では f_c は固有値 1 の k 周期点 z_c をもち, z_c の近傍での f_c^{2k} の標準形は

$$z \rightarrow z + az^2 + bz^3 + O(z^4)$$

と表せるが, 次が示せる.

補題 5. $a=0$ ならば $b \neq 0$.

$a=0$ のとき c をカスパと呼ぶことにする. この定義は, いわゆる幾何学的な意味でのカスパと一致すると予想されるが, $k=1$ のときを除いては, まだ完全には示されていない. また, カスパ点は

各成分上 $d+1$ 個と予想されるが, $k=1$ のときしか示されていない. 但し, 高々有限個しかないことは分かっている.

分岐に関していえば, 周期倍分岐(というより, saddle-node 分岐というべきであろう)のみが起こり, 周期 q 倍分岐 ($q \geq 3$) は起こらない. 更に「周期倍分岐」は 1 点においてでなく, 弧に沿って起こる. この様な分岐を反正則分岐ということにする. 反正則分岐は, $d=1, k=1$ の場合に [1] においてカスパ点の近くでのみ示された. 一方, [8] は, やはり $d=2, k=1$ のときに, 境界のある部分ではそれすら起こらないことを示した. 即ち, tricorn の境界は滑らかな弧を含むのである.

[1] 及び [8] で示されたこれらの端緒的な結果は, [6], [7] で一層精密化されたが, それも $k=1$ のときのみで, 一般の奇数 k に対しては未完成である.

従って, 前節の議論はこの場合には通用しない. 実際, パラメータを変えたときの固有値の変化は非常に微妙で, 前節の様な荒っぽい評価ではうまく分岐の本質をつかめないのである.

以下では $k=1$ の場合についての結果を述べる. M_d^* の周期 1 の成分 W_1 の境界 ∂W_1 は次のように表示される.

$$\begin{aligned} \partial W_1 : c = c(t) &= z(t) - \overline{z(t)}^d, \\ z(t) &= d^{-1/(d-1)} e^{2\pi i t}, \quad 0 \leq t \leq 1. \end{aligned} \quad (1)$$

カスパ点は $t = \frac{2j+1}{2(d+1)}$, $0 \leq j \leq d$, に対応する点である.

定理 6. ([7]) 反正則分岐は $c = c(t)$ の,

$$\begin{aligned} \frac{4j+1}{4(d+1)} < t < \frac{2j+1}{2(d+1)}, \\ \frac{2j+1}{2(d+1)} < t < \frac{4j+3}{4(d+1)}, \\ 0 \leq j \leq d. \end{aligned}$$

の部分で起こる.

注意. 上の t は, ∂W_1 の内周角とみなせよう. すると, 上の定理は, この内周角の意味で, ∂W_1 の丁度半分の部分で反正則分岐が起こることを意味する. 一般の奇数周期の場合についても同様の結果が期待されるが, まだ示されていない. そもそも内周角が定義されるかも分かっていない.

以下に定理 6 の証明の概略を述べる．途中の計算は任意の奇数 k に対しても可能なので，一般的な状況で説明する．奇数周期 k の双曲的成分 W_k の境界 ∂W_k は局所的には実解析的曲線故， $c=c(t)$ と表せる．その微小変形を

$$c=c(t)+s, \quad s=r\omega, \quad r>0, \quad \omega=e^{2\pi i\theta}$$

とし，次のようにおく．但し， z_t を $f_{c(t)}$ の無関心的 k 周期点とする．

$$F(\bar{z}, c, \bar{c})=f_c^k(z),$$

$$G(z, c, \bar{c})=f_c^{2k}(z),$$

$$H(x)=G(x+z_t, c(t)+s, \overline{c(t)}+\bar{s})-z_t.$$

H を x について Taylor 展開すると，

$$H(x)=G_c s + G_{\bar{c}} \bar{s} + (G_z + G_{zc} s + G_{z\bar{c}} \bar{s})x + G_{zz} x^2/2 + G_{zzz} x^3/6 + \cdots$$

となる．ここで， $G_c=G_c(z_t, c(t), \overline{c(t)})$ 等と略記した． $G_z=1$ に注意して， H の不動点 x (それは f_c の $2k$ 周期点に対応する) を r について以下のように Puiseux 展開する．

$$x=ar^{1/2}+br+O(r^{3/2}). \quad (2)$$

これを H に代入すると，

$$\begin{aligned} 0 &= H(x) - x \\ &= (G_c \omega + G_{\bar{c}} \bar{\omega})r \\ &\quad + (G_{zc} \omega + G_{z\bar{c}} \bar{\omega})r(ar^{1/2} + br + \cdots) \\ &\quad + G_{zz}(a^2 r + 2abr^{3/2} + \cdots)/2 \\ &\quad + G_{zzz} a^3 r^{3/2}/6 + \cdots. \end{aligned}$$

r と $r^{3/2}$ の係数を比較して次を得る．

$$\begin{aligned} G_c \omega + G_{\bar{c}} \bar{\omega} + G_{zz} a^2/2 &= 0, \\ (G_{zc} \omega + G_{z\bar{c}} \bar{\omega})a + G_{zz} ab + G_{zzz} a^3/6 &= 0. \end{aligned}$$

非カスプ点という仮定から $G_{zz} \neq 0$ に注意する．これから，

$$\begin{aligned} a^2 &= a(t)^2 = -2(G_c \omega + G_{\bar{c}} \bar{\omega})/G_{zz}, \\ b &= b(t) = -(G_{zc} \omega + G_{z\bar{c}} \bar{\omega} \\ &\quad + G_{zzz} a^2/6)/G_{zz}, \end{aligned}$$

が従う． $\rho=\rho(t)$ を H の不動点 x の固有値，即ち f_c の $2k$ 周期点の固有値とおく．

補題 7. $\rho=1+iAr^{1/2}+Br+O(r^{3/2})$ ．但し，

$$\begin{aligned} A^2 &= A(t)^2 = 2G_{zz}(G_c \omega + G_{\bar{c}} \bar{\omega}), \\ B &= B(t) = -2G_{zzz}(G_c \omega + G_{\bar{c}} \bar{\omega})/3G_{zz}. \end{aligned}$$

更に $A=A(t)$ と $B=B(t)$ は実数値関数である．

さて， ρ の絶対値を評価しよう．

$$|\rho|^2 = |1+iAr^{1/2}+Br+O(r^{3/2})|^2$$

$$\begin{aligned} &= (1+Br+O(r^{3/2}))^2 \\ &\quad + (Ar^{1/2}+O(r^{3/2}))^2 \\ &= 1+(2B+A^2)r+O(r^{3/2}). \end{aligned}$$

従って，十分小さい $r>0$ に対し， $|\rho|<1$ は $2B+A^2<0$ と同値である．

$$\begin{aligned} 2B+A^2 &= 2(G_c \omega + G_{\bar{c}} \bar{\omega}) \times \\ &\quad \times (3G_{zz}^2 - 2G_{zzz})/3G_{zz} \end{aligned}$$

であるから，次を得る．

定理 8. 一般の奇数 k に対し，今 $A \neq 0$ と仮定する．反正則分岐が起こるのは ∂W_k の非カスプ点で $(2B+A^2)/A^2 = 1 - 2G_{zzz}/3G_{zz}^2 < 0$

を満たす部分である．

注意．現時点では，上の仮定 $A \neq 0$ が満たされるかどうかは， $k=1$ のときしか分かっていない． $k=1$ のときは， A を実際に計算できる．

このときは，原点に関する M_d^* の回転対称性から，(1)式において， $t \in I \equiv \left[0, \frac{1}{2(d+1)}\right)$ で考えればよく， $\theta=0$ とできる．そこでは

$$\begin{aligned} A^2 &= 4(d-1)d^{2/(d-1)} \times \\ &\quad \cos((d-1)\pi t + 2\pi\theta) \cos((d+1)\pi t) \neq 0 \end{aligned}$$

と言える．これが 0 になるのは丁度 $t=1/2(d+1)$ のとき，つまりカスプ点のときである．このときは $G_{zz}=0$ となるので別の形の Puiseux 展開を考えなくては行けない．

さて，定理 6 を証明するには，定理 8 の量を計算すればよい． $\theta=0$ とおくと，

$$1 - 2G_{zzz}/3G_{zz}^2 = \frac{(3d-5) \cos(2(d+1)\pi t)}{3(d-1)(\cos(2(d+1)\pi t) + 1)}$$

故，定理 6 が従う．

注意．写像族 $P_c(z)=z^d+c$ に対しては， $A \neq 0$ が示せる．これから，実軸上では f_c に対しても $A \neq 0$ が成り立つことが従う．

$P_a^k(z_0)=z_0$ ， $(P_a^k)'(z_0)=1$ とすると，危点が 0 ただ一つ故， $(P_a^k)''(z_0) \neq 0$ がいえる．よって $z=x+z_0$ ， $c=a+s$ とおくと，Weierstrass の予備定理から

$$\begin{aligned} H(x) &\equiv P_c^k(z) - z \\ &= h(x, s)(x^2 + 2a(s)x + b(s)) \end{aligned}$$

と書ける．ここで h, a, b は $(x, s)=(0, 0)$ の近傍で正則で $h(0, 0) \neq a(0) = b(0) = 0$ を満たす．これより， $c=a$ の近くで P_c の k 周期点の固有値 ρ が計

算できる:

$$\begin{aligned}\rho &= 1 + H'(x) = 1 + 2h(x, s)(x + a(s)) \\ &= 1 \pm 2h(x, s)\{a(s)^2 - b(s)\}^{1/2}.\end{aligned}$$

今, $a(s)^2 - b(s) = C^2 s^m + O(s^{m+1})$ とすると, $\rho = 1 \pm 2hCs^{m/2} + \dots$ となるので, k 周期点が吸引的になる各領域が m 個あることになる. 明らかに $m = 1$, よって $b'(0) \neq 0$ でなくてはならない. これは上の表示では $G_c \neq 0$ に対応する. $G_c \neq 0$ と $A \neq 0$ が同値であることは容易に分かる.

さて, c が実数なら $f_c^{2k} = P_c^{2k}$ 故, もし $G_c = 0$ とすると $G_{\bar{c}} = 0$, よって $b'(0) = 0$ となり矛盾である.

注意. 定理 8 の条件 $1 - 2G_{zzz}/3G_{zz}^2 < 0$ は G の Schwartz 微分が正と同値である. 一方, P_c の Schwartz 微分が常に負であることは容易に分かる. よって, c が実軸上にあれば $1 - 2G_{zzz}/3G_{zz}^2 > 0$ が従う.

§ 5. カсп点での分岐

最後にカсп点 a で考えてみよう. この場合, § 3 の議論が使える. z_0 を f_a の無関心的 k 周期点とすると, カсп点という仮定から,

$$f_a^{2k}(z) = z - b(z - z_0)^3 + O((z - z_0)^4), \quad b \neq 0.$$

従って, § 3 と全く同じ論法で, $c = a$ の近傍に吸引的 $2k$ 周期点をもつパラメータの弧 $c = c(t)$ を得る.

定理 9. カсп点は周期 $2k$ の双曲的成分の境界上にもある.

証明. 定理 4 の証明と同様であるが, この場合, § 3 の ρ_c は実数で, $C = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{g'(z_j)}{f_a'(z_j)}$, $D = \bar{C}$ となる. あとは $f_{c(t)}$ の吸引的周期点の周期が $2k$ であることを示せばよい. そうでないとすると, それは k でなくてはならないが, すると吸引的 k 周期点が 2 個あることになって矛盾である. よって定理 9 は示された. (終)

次に定理 6, 8 をカсп点で考えてみよう. (2) 式のかわりに

$$x = ar^{1/3} + br^{2/3} + O(r)$$

という形の Puiseux 展開を考えればよい. $G_{zz} = 0$ に注意して,

$$0 = H(x) - x$$

$$\begin{aligned}&= (G_c \omega + G_{\bar{c}} \bar{\omega})r \\ &\quad + (G_{zc} \omega + G_{z\bar{c}} \bar{\omega})r(ar^{1/3} + br^{2/3} + \dots) \\ &\quad + G_{zzz} a^3 r/6 + \dots\end{aligned}$$

を得る. r の係数を比較して,

$$G_c \omega + G_{\bar{c}} \bar{\omega} + G_{zzz} a^2/6 = 0, \quad i. e.$$

$$a = -\{6(G_c \omega + G_{\bar{c}} \bar{\omega})/G_{zzz}\}^{1/3}$$

が従う. H の不動点 x の固有値 ρ は

$$\begin{aligned}\rho &= 1 + (G_{zc} \omega + G_{z\bar{c}} \bar{\omega})r \\ &\quad + (G_{zzc} \omega + G_{zz\bar{c}} \bar{\omega})rx + G_{zzz} x^2/2 + \dots \\ &= 1 + Er^{2/3} + O(r)\end{aligned}$$

と書ける. ここで

$$\begin{aligned}E &= G_{zzz} a^2/2 \\ &= (36(G_c \omega + G_{\bar{c}} \bar{\omega})^2 G_{zzz})^{1/3}/2,\end{aligned}$$

である.

補題 10. E^3 は実数である.

証明. (詳しくは [6] 参照)

$$\begin{aligned}G_c \omega + G_{\bar{c}} \bar{\omega} &= (F_c + F_{\bar{z}} \bar{F}_{\bar{c}}) \omega + (F_{\bar{c}} + F_{\bar{z}} \bar{F}_{\bar{c}}) \bar{\omega} \\ &= 2F_{\bar{z}}^{1/2} \operatorname{Re}\{(F_c \omega + F_{\bar{c}} \bar{\omega}) \bar{F}_{\bar{z}}^{1/2}\}, \\ G_{zzz} &= \bar{F}_{\bar{z}} \{3|F_{\bar{z}\bar{z}}|^2 + 2 \operatorname{Re}(F_{\bar{z}\bar{z}\bar{z}} \bar{F}_{\bar{z}}^2)\},\end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned}E^3 &= 18|F_{\bar{z}}|^2 \{3|F_{\bar{z}\bar{z}}|^2 + 2 \operatorname{Re}(F_{\bar{z}\bar{z}\bar{z}} \bar{F}_{\bar{z}}^2)\} \\ &\quad \times (\operatorname{Re}\{(F_c \omega + F_{\bar{c}} \bar{\omega}) \bar{F}_{\bar{z}}^{1/2}\})^2 \in \mathbf{R}\end{aligned}$$

が従う. (終)

よって次を得る.

定理 11. $E > 0$ ならば周期 $2k$ の, $E < 0$ ならば周期 k の吸引的周期点が存在する.

証明. $E > 0$ ならば, 他の 2 個の立方根に対応する点は, 固有値が 1 より小になるので, 吸引的 $2k$ 周期点になる. $E < 0$ ならばその 1 点の固有値が 1 より小になるので, 吸引的 k 周期点になる. (終)
注意. 任意の奇数 k に対し, $A \neq 0$ 及び $E \neq 0$ は条件 $G_c \omega + G_{\bar{c}} \bar{\omega} \neq 0$, そして $G_c \neq 0$ にも同値である.

$$\begin{aligned}\text{特に } k=1 \text{ のときは, (1) において } t &= \frac{2j+1}{2(d+1)}, \quad 0 \leq j \leq d \text{ で} \\ G_c \omega + G_{\bar{c}} \bar{\omega} &= \omega + d \bar{z}_t^{d-1} \bar{\omega} \\ &= 2e^{-(d-1)\pi i t} \cos(2\pi\theta + (d-1)\pi t), \\ G_{zzz} &= (d-1)d^{2/(d-1)} \{(d-2)e^{-4\pi i t} \\ &\quad + 3(d-1)e^{2(d-1)\pi i t} + (d-2)e^{4\pi i t}\},\end{aligned}$$

より,

$$E = [18(d-1)d^{2/(d-1)} \{3(d-1) + 2(d-2) \times \cos(2(d+1)\pi t)\} \cos^2(2\pi\theta + (d-1)\pi t)]^{1/3}$$

が従う。確かにこの立方根の一つは非負実数である。容易に分かるように、 $E=0$ となるのは、

$$2\pi\theta + \frac{d-1}{d+1}\left(j + \frac{1}{2}\right)\pi \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi},$$

$$\begin{aligned} 2\theta &\equiv \frac{1}{2} - \left(1 - \frac{2}{d+1}\right)\left(j + \frac{1}{2}\right) \\ &\equiv \frac{2j+1}{d+1} \pmod{1}, \end{aligned}$$

より、 $\theta \equiv \frac{2j+1}{2(d+1)} = t \pmod{1/2}$ のときである。よって、 $\theta \neq t$, $t+1/2$ ならば a から θ 方向に少し動かすと、周期 2 の双曲的成分に入ることが分かる。

更に $\theta=t$ の場合は直接に除けることが分かる。 $c = se^{2\pi it}$, $z = re^{2\pi it}$, $w = Re^{2\pi it}$ ($s, r, R \in \mathbf{R}$) とおくと $w = f_c(z) = \bar{z}^d + c$ は $R = -r^d + s$ となる。一方、 $t' = \frac{2j+1}{2(d-1)}$, $0 \leq j \leq d-2$, $c = se^{2\pi it'}$, $z = re^{2\pi it'}$, $w = Re^{2\pi it'}$ ($s, r, R \in \mathbf{R}$) とおくと $w = P_c(z) = z^d + c$ も $R = -r^d + s$ となる。よって P_c の力学系から f_c のそれが従うが、明らかに P_c では $s = d^{-d/(d-1)}(d-1)$ で周期倍分岐を起こすので f_c でもそれが起こることになる。 $\theta = t+1/2$ のときは周期 1 の成分に入ってしまうので除外できない。故に $k=1$ の場合は定理 9 より強いことが言える。

定理 12. $k=1$ のとき、カusp点から周期 1 の成分の外に直線に沿って微小変形すると、周期 2 の成分に入る。

定理 12 ではカusp点から分岐する周期 2 の成分が得られたが、これは定理 6 で得られた周期 2 の成分と同じものであるはずである。実際、 $d=2$ のときは [1] の結果から従う。それを示そう。

補題 13. M_d^* の周期 2 の双曲的成分は $d+1$ 個ある。

証明. その中心の個数を調べる。それは $0 = f_c^2(0) = \bar{c}^d + c$ を満たすので、 $|c|=1$ である。 $c = e^{i\theta}$ とおくと、 $\theta = \frac{(2j+1)\pi}{d+1}$, $0 \leq j \leq d$ の $d+1$ 個である。(終)

よって、カusp点に付く成分と、非カuspな弧

に付く成分はつながっているはずである。また、定理 1 より、その成分と周期 1 の成分の間には何もないことが分かる。故に定理 12 を更に強くできた。

定理 14. カusp点の近傍は W_1 , W_2 とその境界 W_1 からなる。

謝辞. 本小論は筆者が東京工芸大学コニカ海外派遣研修制度を利用して 1993 年 4 月から 1 年間、フランスの高等科学研究所 IHES (Institut des Hautes Etudes Scientifiques) に滞在した間に得た成果と、それ以後に得たものの一部である。ここで東京工芸大学及び IHES の協力に感謝の意を表したい。また、この間に東京工芸大学及び、IHES の人々には大変お世話になった。これらの人達にも感謝したい。

文献

- [1] W. D. Crowe, R. Hasson, P. J. Rippon & P. E. D. Strain-Clark: On the structure of the Mandelbar set. *Nonlinearity* 2 (1989), 541-553.
- [2] A. Douady & J. Hubbard: Etude dynamique des polynomes complexes. *Publ. Math. Orsay*, 1er partie, 84-02; 2eme partie, 85-04.
- [3] J. Milnor: Remarks on iterated cubic maps. *Experimental Math.* 1 (1992), 5-24.
- [4] S. Nakane: Connectedness of the tricorn. *Erg. Th. Dyn. Sys.* 13 (1993), 349-356.
- [5] S. Nakane: On quasiconformal equivalence on the boundary of the tricorn. in "Structure and Bifurcation of Dynamical Systems," edited by S. Ushiki, World Sci. Publ. (1993), 154-167.
- [6] S. Nakane & D. Schleicher: On unicorns and multicornes: Dynamics of antiholomorphic polynomials, in preparation.
- [7] S. Nakane & D. Schleicher: Non-local connectivity of the tricorn and multicornes. To appear in *Proceeding of the International Conference on Dynamical Systems and Chaos*, 1994.
- [8] R. Winters: Bifurcation in families of antiholomorphic and biquadratic maps. Thesis at Boston Univ. 1990.