

# $\lambda/4$ 板の不完全性の要因について

川 畑 州 一

## Analysis of the imperfection factors of quarter-wave plates

Shuichi KAWABATA

Actual phase retardation plates have imperfections in the amplitude transmission ratio and the phase retardation. We discuss the imperfection factors of quarter-wave plates made of mica and quartz. We evidence that a mica retardation plate has its imperfections due to the internal reflections in the mica plate. We also consider the mismatching of the neutral axes between the first and the second quartz plate as the imperfection factors of the First-Order retardation plates of quartz.

### 1. はじめに

光の偏光状態を変換する素子として、四分の一波長板 ( $\lambda/4$  板) や二分の一波長板 ( $\lambda/2$  板) は大切な役割を果たしている。なかでも、 $\lambda/4$  板は直線偏光を円偏光に、あるいは円偏光を直線偏光に変換する場合に用いられる。さらに  $\lambda/4$  板は、楕円偏光を直線偏光に変換し検光子と共にその偏光状態を決定する上でも不可欠な素子である。 $\lambda/4$  板は、透過光に対し、その fast 軸成分と slow 軸成分との間に  $\pi/2$  の位相差を与え、しかもその振幅透過率比が 1 であるものを理想とするが、実際は必ずしもそうっていないのが実状である。

波長板は、適当な厚さに劈開した雲母や薄く研磨した水晶などから作られるが、その位相差や振幅透過率比において、理想的な値からのずれが見られる。 $\lambda/4$  板や  $\lambda/2$  板などの波長板において、その位相差が理想的な値の  $\pi/2$  や  $\pi$  から多少ずれるのは、その厚さの精度から考えて容易に納得できる事柄であるが、fast 軸成分と slow 軸成分

ではわずかな屈折率差なので、大きく透過率が異なることは、一見不可解な事柄である。

雲母の  $\lambda/4$  板における不完全性の要因については、1967 年に Yolken 等が雲母板の多重反射干渉によることを指摘した<sup>1)</sup>。我々もまた実験的に、その不完全性が多重反射干渉を考慮することにより、説明できることを確認した。しかし、水晶においてはその厚みが厚い ( $\sim$  数 mm) のので多重反射干渉によりその不完全性を説明するには難点がある。

水晶の  $\lambda/4$  板にはその位相差が  $\pi/2$  の First-Order plates と位相差が  $2m\pi + \pi/2$  の Multiple-Order plates とに区別される。Multiple-Order plates は、薄く研磨した一枚の水晶板からできており、特定の単一波長またはとびとびの波長に対して  $\lambda/4$  板として機能する。しかし Multiple-Order plates は、温度変化や入射角に敏感で、熱膨張により水晶板の厚みが変化したり、光が斜めに入射したりするとその位相差は大きく変化してしまう。そのため、高精度な測定には不向きである。

一方 First-Order plates は、厚みがほぼ等しい

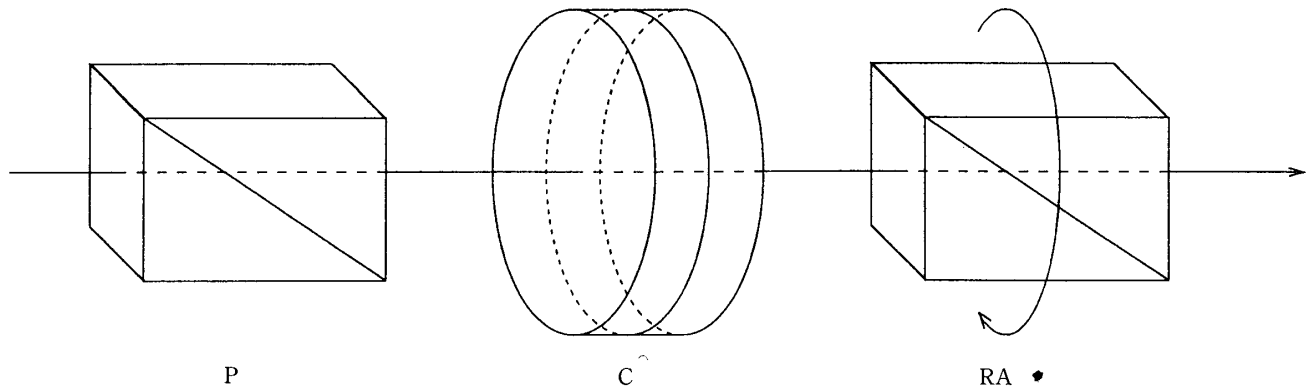


Fig. 1 Schematic diagram of the optical system

P: polarizer, C: phase retardation plate, RA: rotating-analyzer

二つの水晶板をそれぞれ fast 軸と slow 軸が重なるように張り合わせ、片方の水晶板で生じた位相差をもう一方の水晶板で打ち消して、その結果、位相差が  $\pi/2$  となるようにしたものである。これらの First-Order plates は、厳密な意味でも  $\lambda/4$  板として機能し、温度変化や入射角の誤差にあまり影響されないので精密な測定に用いられる。

First-Order plates においては、二つの水晶板を張り合わせる際に、fast 軸と slow 軸とが完全には一致せず、僅かにずれることが考えられる。ここでは、この軸のねじれの影響について考察する。

この論文では雲母の  $\lambda/4$  板において、その不完全性が多重反射干渉に起因することを実験的に確認したので報告するとともに、水晶の  $\lambda/4$  板における不完全性の要因について考察する。

## 2. 移相板の測定法

移相板の、slow 軸に対する fast 軸の振幅透過率比および位相差など、理想的な値からのずれ(不完全因子)を測定するための光学系として、Fig. 1 のような、偏光子-移相板-回転検光子から成る直線光学系を用いた。そして、測定の光源には He-Ne レーザーを用いた。そこで、slow 軸に対する fast 軸の振幅透過率比が  $\tan\Psi$  で位相差が  $\Delta$  の不完全な移相板に fast 軸からの方位角が  $\alpha$  の直線偏光を入射させると、その射出光はジョーンズマトリックスを用いて、

$$\begin{pmatrix} E_f \\ E_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tan\Psi \cdot \exp[i\Delta] & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} \quad (2-1)$$

と表せる<sup>2)</sup>。ここで、反射光の規格化されたストークスパラメーターは、移相板の fast 軸と slow 軸を座標系の基準とすると

$$\begin{aligned} P_1 &= \frac{\tan^2\Psi - \tan^2\alpha}{\tan^2\Psi + \tan^2\alpha} \\ P_2 &= \frac{2 \tan\Psi \cdot \cos\Delta \cdot \tan\alpha}{\tan^2\Psi + \tan^2\alpha} \\ P_3 &= \frac{2 \tan\Psi \cdot \sin\Delta \cdot \tan\alpha}{\tan^2\Psi + \tan^2\alpha} \end{aligned} \quad (2-2)$$

である。次に、偏光子の方位を  $90^\circ$  変えて測定を行うと、ストークスパラメーターは

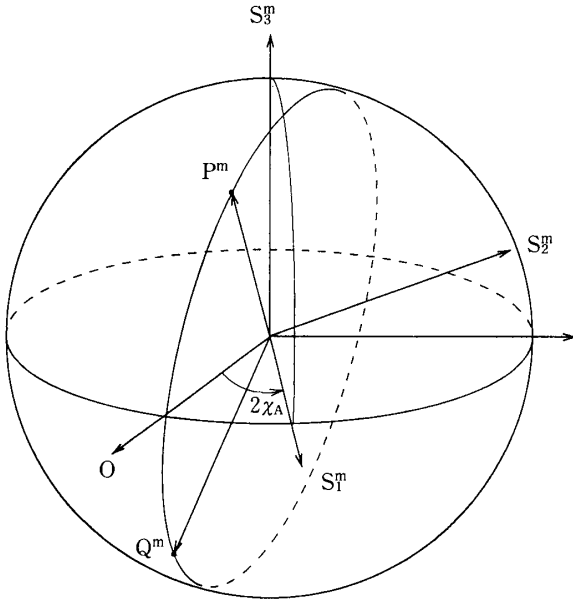
$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{\tan^2\Psi - \cot^2\alpha}{\tan^2\Psi + \cot^2\alpha} \\ Q_2 &= \frac{2 \tan\Psi \cdot \cos\Delta \cdot \cot\alpha}{\tan^2\Psi + \cot^2\alpha} \\ Q_3 &= \frac{2 \tan\Psi \cdot \sin\Delta \cdot \cot\alpha}{\tan^2\Psi + \cot^2\alpha} \end{aligned} \quad (2-3)$$

である。

そして、これら射出光を初期方位が fast 軸から  $\chi_A$  の回転検光子法で測定すると、得られる見かけのストークスパラメーターは

$$\begin{aligned} P_1^m &= P_1 \cdot \cos 2\chi_A + P_2 \cdot \sin 2\chi_A \\ P_2^m &= -P_1 \cdot \sin 2\chi_A + P_2 \cdot \cos 2\chi_A \\ P_3^m &= \pm \sqrt{1 - P_1^m{}^2 - P_2^m{}^2} \\ &= \pm \sqrt{1 - P_1^2 - P_2^2} = \pm |P_3| \end{aligned} \quad (2-4)$$

および



**Fig. 2** Representation of the measured polarization states on the Poincaré sphere  $S_1^m$ - $S_2^m$ - $S_3^m$  coordinate system represents the reference frame of the analyzer

$$\begin{aligned} Q_1^m &= Q_1 \cdot \cos 2\chi_A + Q_2 \cdot \sin 2\chi_A \\ Q_2^m &= -Q_1 \cdot \sin 2\chi_A + Q_2 \cdot \cos 2\chi_A \quad (2-5) \\ Q_3^m &= \mp \sqrt{1 - Q_1^m{}^2 - Q_2^m{}^2} \\ &= \mp \sqrt{1 - Q_1^2 - Q_2^2} = \mp |Q_3| \end{aligned}$$

となる。射出光のストークスパラメーター  $P_3^m$  と  $Q_3^m$  の符号については回転検光子法では決まらないが、λ/4 板の測定においては容易に推定することが出来る。  $0 < \alpha < \pi/2$  では  $P_3^m > 0$  で、  $-\pi/2 < \alpha < 0$  では  $P_3^m < 0$  である。また、  $Q_3^m$  は  $P_3^m$  と逆符号である。これら見かけの二つの偏光状態  $P^m$  ( $P_1^m, P_2^m, P_3^m$ ) はポアンカレ球上では fast 軸の方位を通る大円上にある<sup>3)</sup>。この場合、fast 軸の方位  $O$  は検光子の初期方位から見て  $(\cos 2\chi_A, -\sin 2\chi_A, 0)$  の方位にあるので、これらの関係はベクトルの表示を用いて、

$$O \cdot (P^m \times Q^m) = 0 \quad (2-6)$$

となる。(Fig. 2)。これらを計算し整理すると、

$$\tan 2\chi_A = -\frac{P_2^m \cdot Q_3^m - P_3^m \cdot Q_2^m}{P_1^m \cdot Q_3^m - P_3^m \cdot Q_1^m} \quad (2-7)$$

となり、測定される二つの偏光状態から、検光子の初期方位が求まる。これを式 (2-4) と (2-5) に代入すると、以下の式より、真のストークスパラメーターが求まる。

**Table 1** Experimental results of the mica quarter-wave plate

$\alpha$	$\tan\Psi$	$\Delta$ [deg]
30°	0.910	88.63
40°	0.910	88.70
45°	0.909	88.69
50°	0.910	88.71
60°	0.910	88.74

$$\begin{aligned} P_1 &= P_1^m \cdot \cos 2\chi_A - P_2^m \cdot \sin 2\chi_A \\ P_2 &= P_1^m \cdot \sin 2\chi_A + P_2^m \cdot \cos 2\chi_A \quad (2-8) \\ P_3 &= P_3^m \end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned} Q_1 &= Q_1^m \cdot \cos 2\chi_A - Q_2^m \cdot \sin 2\chi_A \\ Q_2 &= Q_1^m \cdot \sin 2\chi_A + Q_2^m \cdot \cos 2\chi_A \quad (2-9) \\ Q_3 &= Q_3^m \end{aligned}$$

である。従って、この移相板の振幅透過率比  $\tan\Psi$  および位相差  $\Delta$  は

$$\begin{aligned} \tan\Psi &= \sqrt{\frac{(1+P_2)(1+Q_2)}{(1-P_1)(1-Q_1)}} \\ \tan\Delta &= P_3/P_2 = Q_3/Q_2 \quad (2-10) \end{aligned}$$

として求まる。以上からわかるように、ここで述べた偏光子の方位を 90° 変えて行う測定方法は偏光子と検光子の初期方位を正確に知る必要はなく、大変簡便な測定法である。

### 3. 雲母の λ/4 板における不完全因子の測定と解析

Fig. 1 に示した光学系により、雲母の λ/4 板における振幅透過率比  $\tan\Psi$  と位相差  $\Delta$  の測定を行った。測定は検光子の初期方位  $\chi_A$  をほぼ 0 に合わせた状態で、偏光子の方位角  $\alpha$  をそれぞれ 30°, 40°, 45°, 50°, 60° と変えてくり返し行った。その結果を Table 1 に示す。Table 1 から、λ/4 板における振幅透過率比  $\tan\Psi$  と位相差  $\Delta$  が偏光子の方位角  $\alpha$  に関係なく、精度良く測定されていることが分かる。しかし、この結果、この λ/4 板の不完全因子が理想的な値 ( $\tan\Psi=1, \Delta=90^\circ$ ) からかけ離れた値であることが分かる。以下に、その要因について考察する。

**Table 2** Refractive index of mica at various wavelength

$\lambda$ (nm)	$n_s$	$n_f$	$n_s - n_f$
435.8	1.61092	1.60637	0.00455
478.0	1.60592	1.60131	0.00461
546.1	1.60213	1.59734	0.00479
589.3	1.59978	1.59500	0.00478
660.0	1.59667	1.59184	0.00483
706.5	1.59505	1.59023	0.00482

まず、理想的な  $\lambda/4$  板における雲母板の厚さを  $d_t$  とすると、 $d_t$  は

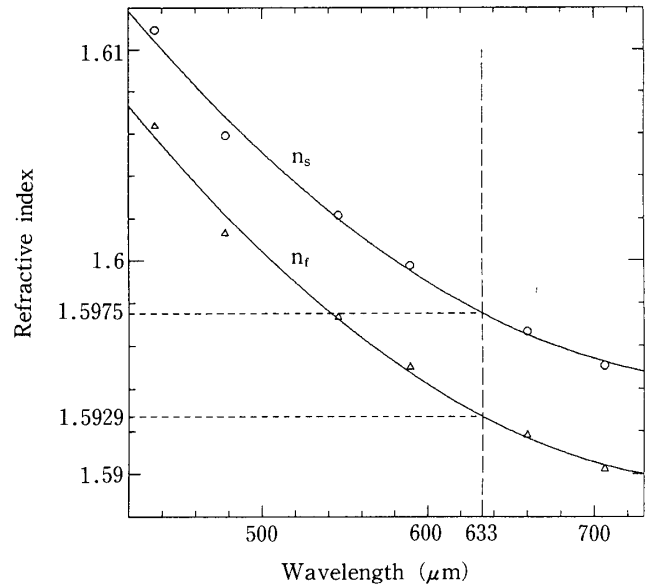
$$d_t = \lambda / 4(n_s - n_f) \quad (3-1)$$

である。ここで、 $\lambda$  は測定波長で、 $n_s$  と  $n_f$  はこの波長での slow 軸と fast 軸における屈折率である。 $d_t$  を具体的に求めるには  $\lambda = 632.8$  nm での  $n_s$  と  $n_f$  を知る必要がある。

**Table 2** には、いろいろな波長での雲母板の  $n_s$  と  $n_f$  とが示されている<sup>4)</sup>。Table 2 から横軸に波長をとり、縦軸に fast 軸と slow 軸における屈折率をとってグラフを描いたのが **Fig. 3** である。Fig. 3 から波長 632.8 nm での  $n_s$  と  $n_f$  を読み取ると、 $n_s = 1.5975$  そして  $n_f = 1.5927$  である。従って、屈折率差  $n_s - n_f$  は 0.0048 となる。これを (3-1) 式に代入して  $d_t$  を求めると、 $d_t = 32.96 \mu\text{m}$  となる。

一方、測定された位相差の平均値  $\Delta = 88.7^\circ$  からこの  $\lambda/4$  板の厚さ  $d_c$  を計算すると、 $d_c = 32.48 \mu\text{m}$  となるが、これら  $d_t$  と  $d_c$  の値においてはあまり差異はなく、この場合、この  $\lambda/4$  板の厚さが理想的な厚さより、 $0.48 \mu\text{m}$  だけ薄いと考えたと説明がつくことになる。しかし、その振幅透過率比はあまりにも理論値とか離れていることが分かった。

雲母板を透過する光の強度は、fast 軸と slow 軸とでその屈折率が違うため異なることが容易に想像できる。そこで、これらの透過率を求めてみる。雲母板の界面において、fast 軸に対するエネルギー透過率を  $I_f^0$ 、slow 軸に対するエネルギー透過率を  $I_s^0$  とすると、

**Fig. 3** Wavelength dependence of the refractive index of mica

$n_s$ : ordinary refractive index,  
 $n_f$ : extraordinary refractive index

$$I_f^0 = 4 n_f / (n_f + 1)^2 = 0.9477$$

$$I_s^0 = 4 n_s / (n_s + 1)^2 = 0.9471$$

である。そこで、雲母板のエネルギー透過率は、界面が二つあることを考慮して、それぞれ、 $I_f^{02}$  と  $I_s^{02}$  である。従って、振幅透過率比  $\tan \Psi$  は、

$$\tan \Psi = (I_f^0 / I_s^0) = 1.0006$$

となる。これは実測された値 0.910 とは大きくかけ離れている。この実測値を説明するために、雲母板内における多重反射干渉を考慮した解析を行った。

**Fig. 4** に示すように、光が雲母板に空気中から入射するときの振幅透過率比を  $t$ 、光が雲母板から空気中に透過するときの振幅透過率を  $t'$  とし、雲母板内での振幅反射率を  $r$  とすると、多重反射干渉を考慮した雲母板の振幅透過率  $T$  は、fast 軸と slow 軸の場合を含めて、

$$\begin{aligned} T &= t t' \exp[-i\delta] \cdot [1 + r^2 \exp[-i2\delta] \\ &\quad + r^4 \exp[-i4\delta] + r^6 \exp[-i6\delta] + \cdots] \\ &= \frac{t t' \exp[-i\delta]}{1 - r^2 \exp[-i2\delta]} \end{aligned} \quad (3-2)$$

となる。ここで、 $2\delta$  は光が雲母板内を一往復する事によって生じる位相差で、光の波長を  $\lambda$ 、雲母板の屈折率を  $n$  その厚さを  $d$  とすると、

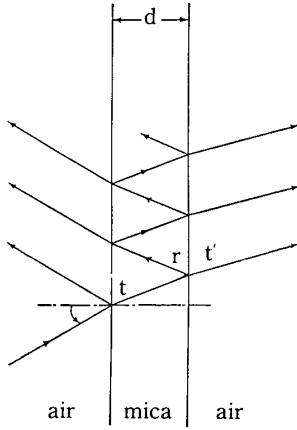


Fig. 4 Multiple internal reflections in the mica plate

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot nd$$

である。また、(3-2) 式は、ストークスの関係式から、 $tt' = 1 - r^2$  とおいて、

$$T = \frac{(1 - r^2) \exp[-i\delta]}{1 - r^2 \cdot \exp[-i2\delta]} \quad (3-3)$$

と表せる。そこでこの場合、エネルギー透過率  $I$  ( $=|T|^2$ ) は、

$$I = \frac{(1 - r^2)^2}{1 - 2r^2 \cdot \cos 2\delta + r^4} \quad (3-4)$$

となるが、これは

$$h = \frac{4r^2}{1 - r^2} \quad (3-5)$$

とおいて、

$$I = \frac{1}{1 + h^2 \cdot \sin^2 \delta}$$

と表せる。ここで  $r$  は、

$$r = \frac{n - 1}{n + 1} \quad (3-7)$$

であるから、エネルギー透過率は雲母板の厚さによって、極大値 1 と極小値  $1/(1 + h^2)$  との間を変動することがわかる。

(3-7) 式において、雲母板の屈折率として、fast 軸と slow 軸に対する屈折率をそれぞれ代入すると、式 (3-5) と (3-6) から fast 軸におけるエネルギー透過率  $I_f$  と slow 軸におけるエネルギー透過率  $I_s$  が求まる。雲母板の振幅透過率比  $\tan \Psi$  は、

$$\tan \Psi = \sqrt{I_f / I_s} = \sqrt{\frac{1 + h_s^2 \cdot \sin^2 \delta_s}{1 + h_f^2 \cdot \sin^2 \delta_f}}$$

となり、雲母板の厚さによって変動する。

一方、雲母板の複素振幅透過率を  $|T| \cdot \exp[i\nu]$  とすると、(3-3) 式より

$$|T| \cdot \exp[i\nu] = \frac{(1 - r^2)}{1 - 2r^2 \cos 2\delta + r^4} \cdot [(1 - r^2) \cos \delta - i(1 + r^2) \sin \delta] \quad (3-9)$$

となるから、位相差  $\nu$  は

$$\tan \nu = -\frac{1 + r^2}{1 - r^2} \cdot \tan \delta \quad (3-10)$$

である。従って、fast 軸と slow 軸における位相差をそれぞれ、 $\nu_f$ 、 $\nu_s$  とすると、fast 軸の slow 軸に対する位相差  $\Delta$  ( $=\nu_f - \nu_s$ ) は、

$$\Delta = \tan^{-1} \left( \frac{\tan \nu_f - \tan \nu_s}{1 - \tan \nu_f \cdot \tan \nu_s} \right) \quad (3-11)$$

である。(3-8) 式および (3-11) 式を雲母板の厚み  $d$  の関数として表したものが Fig. 5 である。雲母板の振幅透過率比と位相差は雲母板の厚みによって周期的に変動するが、ここでは厚みが  $33 \mu\text{m}$  付近において最も測定値に近い場合を示してある。図からわかるように、厚みが  $33.46 \mu\text{m}$  のとき、雲母板の振幅透過率比と位相差はそれぞれ  $\tan \Psi = 0.910$ 、 $\Delta = 88.7^\circ$  で、実測値とほとんど一

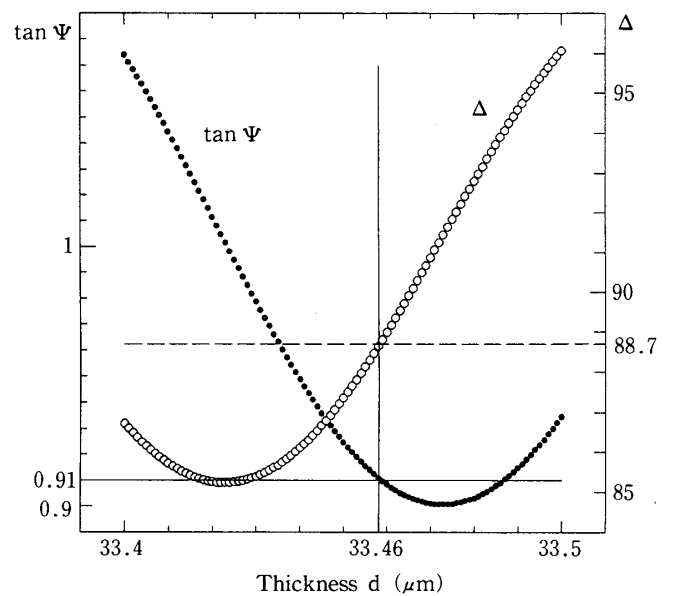


Fig. 5 The value of  $\tan \Psi$  and  $\Delta$  of the mica plate near the thickness  $33 \mu\text{m}$  Solid circle (•):  $\tan \Psi$  Open circle (○):  $\Delta$

致している。

以上より、雲母板による移相子の不完全因子を多重反射干渉により説明出来ることがわかる。

#### 4. 水晶の $\lambda/4$ 板における不完全因子の要因

二つの水晶板を張り合わせる際に生じる fast 軸と slow 軸との捻れの角を  $\phi$  とし、この角は非常に小さいものとする。また、最初的水晶板で生じる位相差を  $\delta_+$ 、二つ目で生じる位相差を  $-\delta_-$  とすると、この移相子はジョーンズマトリックスを用いて

$$\begin{pmatrix} 1 & -\phi \\ \phi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp[-i\delta_-] & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \phi \\ -\phi & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp[i\delta_+] & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp[i(\delta_+ - \delta_-)] & \\ \phi \cdot (\exp[i(\delta_+ - \delta_-)] - \exp[-i\delta_+]) & \\ & -\phi \cdot (1 - \exp[-i\delta_-]) \\ & 1 \end{pmatrix} \quad (4-1)$$

と表される。ただし、ここでは  $\cos \phi = 1$ ,  $\sin \phi = \phi$  において、 $\phi^2$  以上の項は無視する。

##### 4.1 直線偏光入射

これに **Fig. 6** に示したように、fast 軸からの方位が  $\alpha$  の直線偏光を入射させると、その射出光は

$$\begin{pmatrix} E_s \\ E_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp[i(\delta_+ - \delta_-)] & \\ \phi \cdot \exp[i(\delta_+ - \delta_-)] - \exp[-i\delta_+] & \\ & -\phi \cdot (1 + \exp[-i\delta_-]) \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \quad (4-2)$$

で、 $\delta_+ - \delta_- = \Delta$  とすると、上式は

$$\begin{pmatrix} E_s \\ E_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp[i\Delta] & \\ \phi \cdot \exp[i\Delta] \cdot (1 - \exp[-i\delta_-]) & \\ & -\phi \cdot (1 - \exp[-i\delta_-]) \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$$

となる。従って、射出光の偏光状態を表すとストークスベクトルは、それぞれ

$$\begin{aligned} S_0 &= 1 \\ S_1 &= -2\phi (\cos \Delta - \cos \delta_+) \sin 2\alpha + \cos 2\alpha \\ S_2 &= 2\phi (1 - \cos \delta_-) \cos 2\alpha + \cos \Delta \cdot \sin 2\alpha \\ S_3 &= \sin \Delta \cdot \sin 2(\alpha - \phi \cdot \cos \delta_+) \end{aligned} \quad (4-3)$$

である。移相子が正確な  $1/4$  波長板であれば、 $\Delta = \pi/2$  であるから、(4-3) 式は、

$$\begin{aligned} S_0 &= 1 \\ S_1 &= 2\phi \cdot \cos \delta_+ \cdot \sin 2\alpha + \cos 2\alpha \\ &= \cos 2(\alpha - \phi \cdot \cos \delta_+) \\ S_2 &= 2\phi (1 - \cos \delta) \cos 2\alpha \\ S_3 &= \sin 2(\alpha - \phi \cdot \cos \delta_+) \end{aligned} \quad (4-4)$$

となる。従って、この  $1/4$  波長板に方位角  $45^\circ$  の直線偏光を入射させるとその射出光は、方位角  $\theta$  と楕円率角  $\epsilon$  がそれぞれ

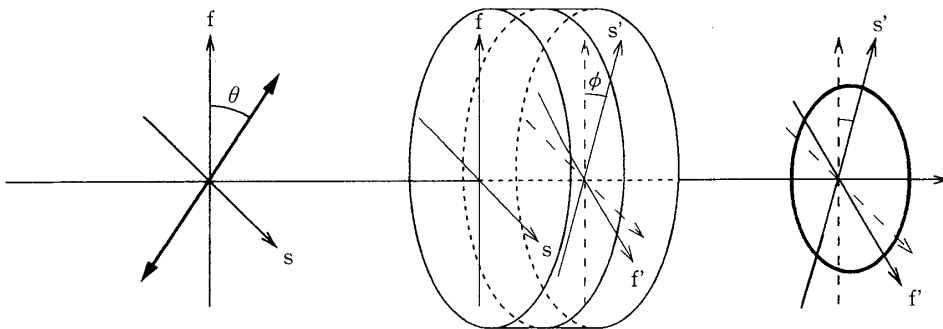
$$\tan 2\theta = S_2/S_1 = 0 \quad (4-5)$$

$$\sin 2\epsilon = S_3 = \sin 2(\pi/4 - \phi \cdot \cos \delta_+)$$

となるので、方位角  $0$ 、楕円率角  $\pi/4 - \phi \cdot \cos \delta_+$  の楕円偏光である。これはこの移相子が、方位角  $45^\circ$  の入射直線偏光に対しては

$$\begin{aligned} \tan \Psi &= \tan(\pi/4 - \phi \cdot \cos \delta_+) = \\ \frac{1 - \phi \cdot \cos \delta_+}{1 + \phi \cdot \cos \delta_+} &= 1 - 2\phi \cdot \cos \delta_+ \end{aligned} \quad (4-6)$$

の振幅透過率比をもつ  $1/4$  波長板として振る舞うことがわかる。



**Fig. 6** Schematic diagram of the First-Order quarter wave plate of quartz

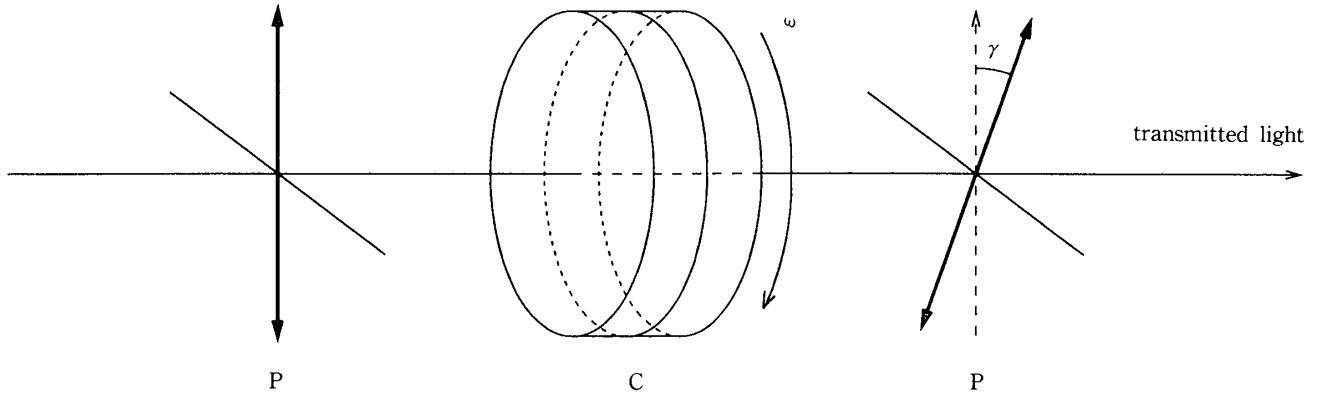


Fig. 7 Optical arrangement for measuring the transmittance with the rotation of a quartz quarter-wave plate between polarizers  
P: polarizer, C: quartz quarter-wave plate

#### 4.2 円偏光入射

次に、この移相子に円偏光を入射させた場合について考える。

$$\begin{pmatrix} E_r \\ E_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp[i\Delta] & \\ \phi \cdot \exp[i\Delta](1 - \exp[i\delta_-]) & \\ -\phi(\exp[-i\delta_-]) & \\ 1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pm i/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \quad (4-7)$$

ここで、±は円偏光の左回り（-）と右回り（+）を表す。u =  $\phi(1 - \exp[i\delta_-])$  とおくと、

$$E_r = [\pm i \cdot \exp[i\Delta] - u^*]/\sqrt{2}$$

$$E_s = [\pm iu \cdot \exp[i\Delta] + 1]/\sqrt{2}$$

そこで、ストークスパラメーターは

$$S_0 = 1$$

$$S_1 = \mp \phi[\sin \Delta - \sin \delta_+] \quad (4-8)$$

$$S_2 = \mp \sin \Delta$$

$$S_3 = \mp \cos \Delta$$

となる。そこで  $\Delta = \pi/2$  の場合、透過光は直線偏光 ( $S_3 = 0$ ) で、その方位角は  $\pi/4 - \phi(1 - \sin \delta_+)/2$  となる。即ちこの場合、移相子は、

$$\tan \Psi = 1 \mp \phi(1 - \sin \delta_+) \quad (4-9)$$

の振幅透過率比をもつ 1/4 波長板として振る舞うことがわかる。

#### 4.3 平行ニコル間における移相子の回転

最後に、二つの偏光子の間に移相子を挿入し回転させる場合の透過強度について考える (Fig. 7)。移相子の回転の角速度を  $\omega$  とすると、時刻 t

において、移相子を透過した光のジョーンズベクトルは、

$$\begin{pmatrix} E_r \\ E_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp[i\Delta] & \\ \phi \cdot \exp[i\Delta](1 - \exp[i\delta_-]) & \\ -\phi(1 - \exp[-i\delta_-]) & \\ 1 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ -\sin \omega t \end{pmatrix} \quad (4-10)$$

より、

$$\begin{pmatrix} E_r \\ E_s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp[i\Delta] \cos \omega t + \phi(1 - \exp[-i\delta_-]) \sin \omega t \\ \phi \cdot \exp[i\Delta](1 - \exp[i\delta_-]) \cos \omega t - \sin \omega t \end{pmatrix}$$

である。従って、二つ目の偏光子を透過する光の拡幅は、二つの偏光子の透過軸の捻れの角を  $\gamma$  とすると

$$E_A = E_r \cdot \cos(\omega t - \gamma) - E_s \cdot \sin(\omega t - \gamma) \quad (4-11)$$

である。透過度 I は

$$\begin{aligned} I &\sim E_A \cdot E_A^* \\ &= [A + B \cdot \cos 2\omega t + C \cdot \sin 2\omega t] \\ &\quad \cdot [A^* + B^* \cdot \cos 2\omega t + C^* \cdot \sin 2\omega t] \end{aligned} \quad (4-12)$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} A &= [\exp[i\Delta](\cos \gamma + u \cdot \sin \gamma) \\ &\quad + (\cos \gamma + u^* \cdot \sin \gamma)] \\ B &= [\exp[i\Delta](\cos \gamma + u \cdot \sin \gamma) \\ &\quad - (\cos \gamma + u^* \cdot \sin \gamma)] \\ C &= [\exp[i\Delta](\sin \gamma - u \cdot \cos \gamma) \\ &\quad - (\sin \gamma + u^* \cdot \sin \gamma)] \end{aligned} \quad (4-13)$$

である。これらの計算において、

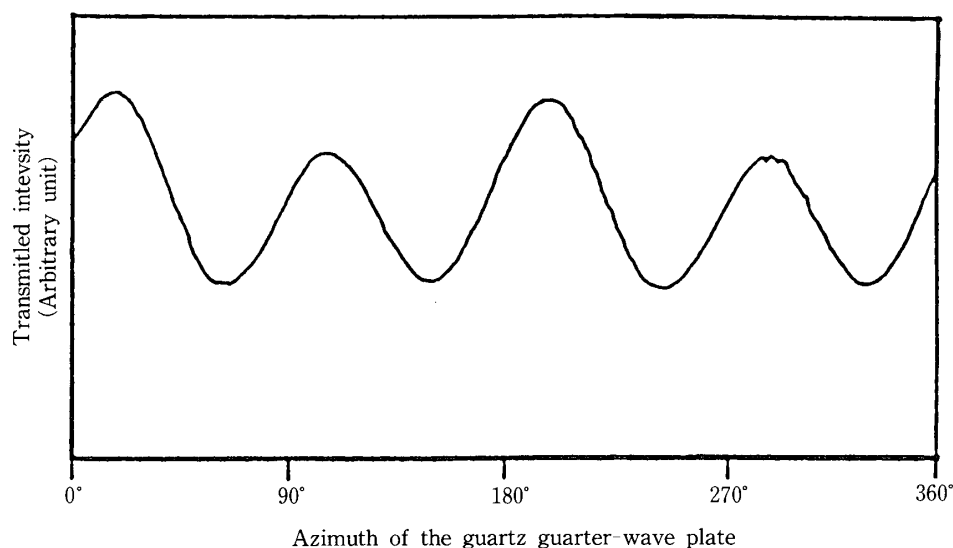


Fig. 8 Transmitted intensities varying with the azimuth of a quartz quarter-wave plate between polarizers

$$AB^* + A^*B = 0 \quad (4-14)$$

$$AC^* + A^*C = 0$$

となることがわかった<sup>(Appendix)</sup>. これは移相子の回転に伴う透過強度の変化には  $2\omega$  の成分は含まれないことを示している. 即ちこの場合, 移相子の回転に伴う透過強度は直流成分と角周波数  $4\omega$  の交流成分のみとなる. しかし, 水晶板による移相子を実際に, 偏光子の間に挿入し回転させたら Fig. 8 のような透過強度が得られた<sup>5)</sup>. 図は横軸が移相子の回転角で, 縦軸が透過強度である. 図から明らかなように, この透過強度には移相子の回転に伴う  $2\omega$  成分が含まれている. このことは, 水晶の  $\lambda/4$  板における不完全性の要因として, 他にも考慮すべきことがあることを示唆している.

## 5. まとめ

この論文ではまず, 移相子の振幅透過率比と位相差を測定するのに, 大変簡便な測定法について述べた. そして, 雲母の  $\lambda/4$  板の振幅透過率比と位相差を測定し, その値が理想的な値 ( $\tan \Psi = 1$ ,  $\Delta = 90^\circ$ ) からかけ離れた値になるのは, 雲母板内での多重反射が影響していることを示した. 次に, 水晶の  $\lambda/4$  板における不完全性の要因について

考察した. その結果, First-Order plates において二つの水晶板を張り合わせる際の fast 軸と slow 軸の僅かな捻れが影響することを示した. しかし, 水晶板による移相子を偏光子の間に挿入し回転させて得られた透過強度から, 水晶の  $\lambda/4$  板における不完全性の要因として, 他にも考慮すべきことがあることが明かとなった. これらの要因がなんであるかは今後の課題である.

## 6. 謝辞

この研究は, 山本淳一郎君(写真工学科 88 年度卒業)に卒業研究として, 測定の一部を手伝って貰ったものである. 彼の助力に感謝致します.

## 参考文献

- 1) H. T. Yolken, R. M. Waxler and J. Kruger; J. Opt. Soc. Am. 57, (1967) 283
- 2) R. M. A. Azzam and N. M. Bashara; Ellipsometry and Polarized Light (North-Holland, Amsterdam, 1980)
- 3) S. Kawabata; J. Opt. Am. A1, (1984) 706
- 4) W. G. Driscoll and W. Vanghan Eds.; Handbook of Optics (McGraw-Hill 1978)
- 5) T. Ohkura, S. Kawabata, M. Fukasawa and H. Yokota; 東海大学紀要工学部 26, (1986) 197



**Appendix :**

平行ニコル間での移相子の回転による透過強度

透過する光の振幅は,

$$E_A = E_f \cdot \cos(\omega t - \gamma) - E_s \cdot \sin(\omega t - \gamma)$$

である. ここで

$$E_f = \exp[i\Delta] \cos \omega t + \phi (1 - \exp[-i\delta]) \sin \omega t$$

$$E_s = \phi \cdot \exp[i\Delta] (1 - \exp[i\delta_-]) \cos \omega t - \sin \omega t$$

である.  $u = \phi (1 - \exp[i\delta_-])$  とおくと,

$$\begin{aligned} E_A &= [\exp[i\Delta] \cos \omega t + u^* \cdot \sin \omega t] \cos(\omega t - \gamma) \\ &\quad - [u \cdot \exp[i\Delta] \cos \omega t - \sin \omega t] \sin(\omega t - \gamma) \\ &= [\exp[i\Delta] \cos \omega t + u^* \cdot \sin \omega t] (\cos \gamma \cos \omega t + \sin \gamma \sin \omega t) \\ &\quad + [u \cdot \exp[i\Delta] \cos \omega t - \sin \omega t] (\sin \gamma \cos \omega t - \cos \gamma \sin \omega t) \\ &= [\exp[i\Delta] \cos \gamma \cos^2 \omega t + u^* \cdot \sin \gamma \sin \omega t \\ &\quad + (u^* \cdot \cos \gamma + \exp[i\Delta] \sin \gamma \sin \omega t \cos \omega t) \\ &\quad + [u \cdot \exp[i\Delta] \sin \gamma \cos^2 \omega t + \cos \gamma \sin^2 \omega t \\ &\quad - (u \cdot \exp[i\Delta] \cos \gamma + \sin \gamma) \sin \omega t \cos \omega t] \\ &= [\exp[i\Delta] \cos \gamma (1 + \cos 2 \omega t) + u^* \cdot \sin \gamma (1 - \cos 2 \omega t) \\ &\quad + (u^* \cdot \cos \gamma + \exp[i\Delta] \sin \gamma) \sin 2 \omega t] / 2 \\ &\quad + [u \cdot \exp[i\Delta] \sin \gamma (1 + \cos 2 \omega t) + \cos \gamma (1 - \cos 2 \omega t) \\ &\quad - (u \cdot \exp[i\Delta] \cos \gamma + \sin \gamma) \sin 2 \omega t] / 2 \\ &= [\exp[i\Delta] \cos \gamma + u \cdot \exp[i\Delta] \sin \gamma + u^* \cdot \sin \gamma + \cos \gamma] / 2 \\ &\quad + [\exp[i\Delta] \cos \gamma + u \cdot \exp[i\Delta] \sin \gamma - u^* \cdot \sin \gamma - \cos \gamma] \cos 2 \omega t / 2 \\ &\quad + [u^* \cdot \cos \gamma + \exp[i\Delta] \sin \gamma - (u \cdot \exp[i\Delta] \cos \gamma + \sin \gamma)] \sin 2 \omega t / 2 \\ &= [\exp[i\Delta] (\cos \gamma + u \cdot \sin \gamma) + (\cos \gamma + u^* \cdot \sin \gamma)] / 2 \\ &\quad + [\exp[i\Delta] (\cos \gamma + u \cdot \sin \gamma) - (\cos \gamma + u^* \cdot \sin \gamma)] \cos 2 \omega t / 2 \\ &\quad + [\exp[i\Delta] (\sin \gamma - u \cdot \cos \gamma) - (\sin \gamma - u^* \cdot \cos \gamma)] \sin 2 \omega t / 2 \end{aligned}$$

となる. ここでさらに,

$$[\exp[i\Delta] (\cos \gamma + u \cdot \sin \gamma) + (\cos \gamma + u^* \cdot \sin \gamma)] = A$$

$$[\exp[i\Delta] (\cos \gamma + u \cdot \sin \gamma) - (\cos \gamma + u^* \cdot \sin \gamma)] = B$$

$$[\exp[i\Delta] (\sin \gamma - u \cdot \cos \gamma) - (\sin \gamma - u^* \cdot \cos \gamma)] = C$$

とおくと, 透過強度  $I$  は,

$$\begin{aligned} I &\sim E_A \cdot E_A^* \\ &= [A + B \cdot \cos 2 \omega t + C \cdot \sin 2 \omega t] \cdot [A^* + B^* \cdot \cos 2 \omega t + C^* \cdot \sin 2 \omega t] \\ &= [AA^* + (AB^* + A^*B) \cos 2 \omega t + (AC^* + A^*C) \sin 2 \omega t \\ &\quad + (BC^* + B^*C) \sin 2 \omega t \cos 2 \omega t + BB^* \cdot \cos^2 2 \omega t + CC^* \cdot \sin^2 2 \omega t] \\ &= [2 AA^* + 2 (AB^* + A^*B) \cos 2 \omega t + 2 (AC^* + A^*C) \sin 2 \omega t \\ &\quad + (BC^* + B^*C) \sin 4 \omega t + BB^* (1 + \cos 4 \omega t) + CC^* (1 - \cos 4 \omega t)] / 2 \\ &= [2 AA^* + BB^* + CC^*] + 2 [A^*B + AB^*] \cos 2 \omega t + 2 [A^*C + AC^*] \sin 2 \omega t \\ &\quad + [BB^* - CC^*] \cos 4 \omega t + (BC^* + B^*C) \sin 4 \omega t \end{aligned}$$

となる. さらに,

$$\cos \gamma + u \cdot \sin \gamma = n, \quad \sin \gamma - u \cdot \cos \gamma = m$$

とおき,  $\cos 2\omega t$  と  $\sin 2\omega t$  の成分を計算する. まず  $\cos 2\omega t$  の成分は,

$$\begin{aligned} AB^* &= [n \cdot \exp[i\Delta] + n^*] \cdot [n^* \cdot \exp[-i\Delta] - n] \\ &= -[n^2 \cdot \exp[i\Delta] - n^{*2} \cdot \exp[-i\Delta]] \\ &= -[\cos^2 \gamma + u \cdot \sin 2\gamma] \exp[i\Delta] + [\cos^2 \gamma + u \cdot \sin 2\gamma] \exp[-i\Delta] \\ &= -[\exp[i\Delta] - \exp[-i\Delta] \cos^2 \gamma - [u \cdot \exp[i\Delta] - u^* \cdot \exp[-i\Delta]] \sin 2\gamma] \\ &= -2i \sin \Delta [\cos^2 \gamma + \phi (\sin \Delta - \sin \delta_+) \sin 2\gamma] \end{aligned}$$

となる. これから

$$AB^* + A^*B = 0$$

となることがわかる. 次に  $\sin 2\omega t$  の成分は,

$$\begin{aligned} AC^* &= [n \cdot \exp[i\Delta] + n^*] \cdot [m^* \cdot \exp[-i\Delta] - m] \\ &= [nm^* - n^*m] - [nm \cdot \exp[i\Delta] - n^*m^* \cdot \exp[-i\Delta]] \end{aligned}$$

である. さらに,

$$\begin{aligned} nm^* &= (\cos \gamma + u \cdot \sin \gamma) \cdot (\sin \gamma - u^* \cdot \cos \gamma) \\ &= (u \cdot \sin^2 \gamma - u^* \cdot \cos^2 \gamma) + \sin \gamma \cos \gamma \\ &= [(u - u^*) - (u + u^*) \cos 2\gamma + \sin 2\gamma] / 2 \\ &= -[i\phi \cdot \sin \delta_- + \phi (1 - \cos \delta_-) \cos 2\gamma - \sin 2\gamma / 2] \end{aligned}$$

となるから,

$$\begin{aligned} nm^* - n^*m &= [(u - u^*) - (u + u^*) \cos 2\gamma + \sin 2\gamma] / 2 \\ &\quad - [(u^* - u) - (u^* + u) \cos 2\gamma + \sin 2\gamma] / 2 \\ &= u - u^* = -2i\phi \cdot \sin \delta_- \end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned} nm &= (\cos \gamma + u \cdot \sin \gamma) \cdot (\sin \gamma - u \cdot \cos \gamma) = u (\sin^2 \gamma - \cos^2 \gamma) + \sin \gamma \cos \gamma \\ &= -u \cos 2\gamma + \sin 2\gamma / 2 \end{aligned}$$

となるから,

$$\begin{aligned} nm \cdot \exp[i\Delta] &= -u \cdot \exp[i\Delta] \cos 2\gamma + \exp[i\Delta] \sin 2\gamma / 2 \\ n^*m^* \cdot \exp[-i\Delta] &= -u^* \cdot \exp[-i\Delta] \cos 2\gamma + \exp[-i\Delta] \sin 2\gamma / 2 \end{aligned}$$

従って,

$$\begin{aligned} nm \cdot \exp[i\Delta] - n^*m^* \cdot \exp[-i\Delta] &= -(u \cdot \exp[i\Delta] - u^* \cdot \exp[-i\Delta]) \cos 2\gamma + (\exp[i\Delta] - \exp[-i\Delta]) \sin 2\gamma / 2 \\ &= -2i\phi (\sin \Delta - \sin \delta_+) \cos 2\gamma + i \sin \Delta \sin 2\gamma \end{aligned}$$

となり,

$$\begin{aligned} AC^* &= -2i\phi \cdot \sin \delta_- - 2i\phi (\sin \Delta - \sin \delta_+) \cos 2\gamma + i \sin \Delta \sin 2\gamma \\ &= -2i\phi [(\sin \Delta - \sin \delta_+) \cos 2\gamma + \sin \delta_-] + i \sin \Delta \sin 2\gamma \end{aligned}$$

となる. これから,

$$AC^* + A^*C = 0$$

である.

以上より, 透過強度  $I$  には移相子の回転に伴う  $2\omega$  成分は含まれないことがわかる.