

# 円周角定理から球面の面積や平方数の逆数和へ — 探究的な数学的活動のために —

植野義明\*

## 概要

The surface area of a sphere is obtained by elementary mathematics. The method is due to Archimedes. Also the Basel problem is solved by an elementary method due to Wästland. These results are expected to be used in mathematics education as themes of exploratory activities at high-school.

**key words** : mathematics education, exploratory activity, inscribed angle theorem

## 1 はじめに

2018年度の学習指導要領の改訂（高等学校では、2022年度から学年進行で実施）において、高等学校でこれまで実施されていた「総合的な学習の時間」が「総合的な探究の時間」に改められ、探究的な学びがより一層重視され、より広く行われるようになることが期待される。現在、SSH指定校などを中心に、探究的な学びの指導内容や評価方法などについて、実践的な研究が継続して行われている。

今回の改訂では、「理数探究基礎」、「理数探究」という科目も新設された。これらの科目ではとくに教科書は用いず、また、「総合的な探究の時間」と置き換えが可能とされている。すなわち、これらの科目では理数系のテーマの下で質の高い探究活動が行われることを想定している。

また、数学科においても、数学A、B、Cのそれぞれの科目の中に新しい単元として「数学と人間の活動」、「数学と社会生活」、「数学的な表現の工夫」が設置された。これらの内容は、従来「数学活用」の中に盛り込まれていたものであるが、特に数学Cにおける「数学的な表現の工夫」では、図、表、統計グラフに並んで、「離散グラフ及び行列などを用い

て日常の事象や社会の事象などを工夫して表現すること」が扱われることになっている。

本稿で取り上げる円の性質については、中学校の第3学年で円の半径と接線の関係、円周角と中心角の関係をとり扱っており、数学Aの単元「図形の性質」では、それらを踏まえた上で、「三角形の性質や円の性質など平面図形に関する基本的な性質についての理解を深め、それらを事象の考察に活用できるようにするとともに、図形の新たな性質を見いだし、その性質について論理的に考察したり説明したりする力を培うもの」とされている。

一方で、上記の円の性質について、何のために学ぶのかわからないという声が高校教員の間からすらも聞こえる。円周角と中心角の関係は、高等学校の入試で角度を求める問題で使うぐらいで、その後高等学校の数学の中では、正弦定理の証明で用いる以外は使う機会がないように思われている。いわば、「図形の性質」の単元内部の問題を解くための道具に過ぎず、その単元の学習が終わってしまえば使い道がないように感じられているらしいのである。

もちろん、円周角の性質は、円を含む図形において、角の大きさを保ったまま角を移動する手段として、初等幾何のさまざまな高度な定理を証明するために使われる。その中には、円錐曲線に内接する六角形に関するパスカルの定理、三角関数の加法定理

\* 東京工芸大学工学部工学科電気電子コース准教授  
2020年9月25日受理

が現在のような形で定式化される以前、それに代わるものとして使われたトレミーの定理などが含まれる [4]。トレミーの定理の利用からは、現在の三角関数の和積公式や積和公式を巧みに利用して掛け算を足し算に置き換えて計算するテクニックが発達し、それが対数の発見のもとになったことは数学史における興味深い事実であり、円周角の性質が数学の歴史において果たした役割の大きさを示しているといえるだろう。

本稿では、円周角定理の初等幾何学の枠組みに捉われない意外な応用例を示し、数学に関わる探究的な学習活動の拡充を目指すことができると考えている。

## 2 リングの皮むきによる球面積の求積

円周角は中心角の2分の1であることから、同じ弧の上に立つ円周角は互いに等しい。円周角による角の移動は、円に関係する幾何学の証明では欠かせない道具である（例：正五角形と黄金比）ばかりではなく、円周を等分し、円周角定理を用いたあとで極限操作を行うことによって、球の表面積の求積、ある種の力学系の解析、整数論におけるパーゼル問題の初等数学的な別証明などの美しい結果が導かれる。本章では、これらの話題の中から、アルキメデスによる球の表面積の求積について論じる。

### 2.1 問題の設定：多角形の回転による球の表面積の求積

次のような問題を考える。

#### 問題

半径  $r$  の円周を  $2n$  等分する点を結んでできる正  $2n$  角形  $A_0A_1 \cdots A_{2n-1}$  を直径  $A_0A_n$  を軸として回転してできる回転体の表面積を  $S_n$  とするとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  を求めよ（図1）。

### 2.2 初等幾何学による解答

勿論、最終的な結論は球の表面積の公式に一致する。いろいろな解き方があると思うが、以下では、筆者が気に入っているある解法を紹介しよう。この解法では三角関数をあからさまには使用しない。

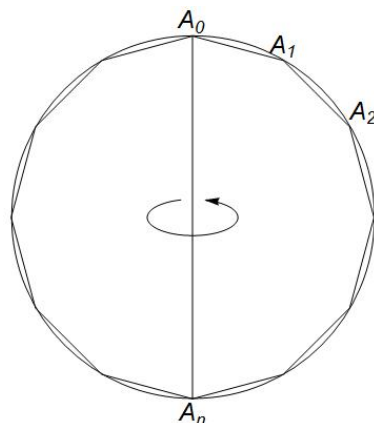


図1 リングの皮むき

各  $k (0 \leq k \leq n)$  に対し、頂点  $A_k$  を直径  $A_0A_n$  に関して折り返した点を  $B_k$  とし、弦  $A_kB_k$ 、 $A_kB_{k-1}$  と直径  $A_0A_n$  との交点をそれぞれ  $M_k$ 、 $L_k$  とする（図2）と\*1、円周角定理より

$$\angle A_{k-1}B_{k-1}A_k = \angle B_{k-1}A_kB_k = \angle A_0A_nA_1$$

が各  $k (1 \leq k \leq n)$  に対して成り立つ（図3）。すると、 $\triangle B_{k-1}M_{k-1}L_k$ 、 $\triangle A_kM_kL_k$ 、 $\triangle A_nA_1A_0$  は相似な直角三角形となるので、比例式

$$\frac{B_{k-1}M_{k-1}}{M_{k-1}L_k} = \frac{A_kM_k}{M_kL_k} = \frac{A_nA_1}{A_1A_0}$$

が成り立ち、これから

$$B_{k-1}M_{k-1} = M_{k-1}L_k \times \frac{A_nA_1}{A_1A_0},$$

$$A_kM_k = L_kM_k \times \frac{A_nA_1}{A_1A_0}$$

となる。

さて、正  $2n$  角形の1つの辺  $A_{k-1}A_k$  を直径  $A_0A_n$  を軸として回転してできる曲面の面積  $s_k$  を求めてみよう。この曲面はある円錐台の側面になる。

円錐台の側面積は2つの円錐の側面積の差に等しいこと、円錐の側面積は母線の長さに底面の円周の長さを掛けたものの半分 に等しいことを使うと、 $s_k$  は次のように計算できる。

\*1 ただし、 $M_0 = L_0 = A_0 = B_0$ 、 $M_n = L_n = A_n = B_n$  とする。

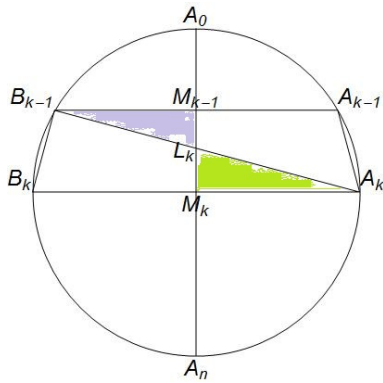


図2 円錐台の側面積

$$\begin{aligned}
 s_k &= \frac{(2\pi \cdot M_{k-1}A_{k-1} + 2\pi \cdot M_kA_k) A_{k-1}A_k}{2} \\
 &= \pi (M_{k-1}B_{k-1} + M_kA_k) A_{k-1}A_k \\
 &= \pi (M_{k-1}L_k + L_kM_k) \times \frac{A_nA_1}{A_1A_0} \times A_{k-1}A_k \\
 &= \pi \cdot M_{k-1}M_k \cdot A_nA_1
 \end{aligned}$$

よって、回転体の表面積  $S_n$  は

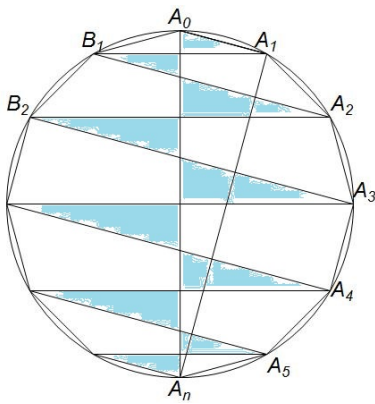


図3 側面積を総和する (図は  $n = 6$  の場合)

$$\begin{aligned}
 S_n &= \sum_{k=1}^n s_k \\
 &= \sum_{k=1}^n \pi \cdot M_{k-1}M_k \cdot A_nA_1 \\
 &= \pi \left( \sum_{k=1}^n M_{k-1}M_k \right) A_nA_1 \\
 &= \pi M_0M_n \cdot A_nA_1 \\
 &= \pi A_0A_n \cdot A_nA_1
 \end{aligned}$$

最後に  $n \rightarrow \infty$  とすると、 $A_1 \rightarrow A_0$  より  $A_1A_n \rightarrow A_0A_n = 2r$  となるので、

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \pi \lim_{n \rightarrow \infty} A_0A_n \cdot A_nA_1 \\
 &= \pi (2r)^2 \\
 &= 4\pi r^2
 \end{aligned}$$

これが求める極限であった。

### 2.3 考察

$n$  をどんどん大きくしていくと、内接正  $2n$  角形は円に近づいていく。そこで、回転体の表面積も半径  $r$  の球の表面積に近づいていくのではないかと思うのは自然である。

その予想が実際に正しいことをこの計算は示しているのだが、しかし、この計算では、そもそも曲面の面積とは何かという根本の問題についてあまり厳密に考えてはいない。曲面積を定義し、その定義に基づいて計算しているわけではないのである。

その意味で、この計算はかなり直観的であり、試みに計算してみたらこうなった、という程度のものでしかないのかもしれない。

しかし、だから、このような計算には何の意味もないのかというと、そんなことは全くない。

結果を見通す直観力と、円周角定理を利用した巧みな計算は、やはりわたしたちの心に感動を呼び起こす。

この計算はアルキメデスによるものだということである。

### 2.4 さらに考察

アルキメデスがこの計算を行ったとすれば、彼の論法である取り尽くし法を用いたはずである。実際、本稿では、円を内接正多角形で近似したが、これと合わせて、アルキメデスは外接正多角形からも近似して同じ結果を得ている。

また、前節では、円の内接正多角形をその1つの対角線のまわりに回転させたが、対辺の中点を結ぶ直線のまわりに回転させることも考えられる。実際に計算してみると、外接正多角形を対辺の中心を結ぶ直線のまわりに回転させた場合には、 $n \rightarrow \infty$  とする前から、折れ線図形の回転面の面積が球の表面

積に一致することがわかる。

以上のことから、本稿で扱った計算のほかに、外接正多角形による近似を含めて、少なくとも3つのヴァリエーションがあり、探究的活動の題材としての発展性を秘めているといえよう。

なお、球の表面積が、その球に外接する円柱の側面積に等しいことはよく知られているが、円柱を底面の上に立たせて円柱に内接する球面を水平面で輪切りにしたときに、対応する表面積が等しいことも微積分の知識があればすぐにわかる。かつて、昭和20年代の算数教科書にはその事実を示唆する図が載っており、一部の児童はその図から球の表面積の公式を、何となく直観的に納得したものであったという。

### 3 バーゼル問題の初等的解法

バーゼル問題とは、次の等式の成立を証明せよという問題である。

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$$

Wikipedia 日本語版によると、バーゼル問題は、1644年にピエトロ・メンゴリによって提起されたそうである。バーゼル問題の名称は、スイスのバーゼル在、ベルヌーイ一族の長老であるヤコブ・ベルヌーイ（1654–1705）の努力にも拘わらず、この級数の和に限っては解けず、その解決を後世に託したことによる。その後、多くの著名な数学者たちが挑戦したが、1735年にレオンハルト・オイラーによって解かれた[5]。最近では、この問題に関する問題が一部の大学入試に出題されることもあるようである。

オイラーはこの問題に対して本質的に異なる4つの解答を与えた。その中で最も有名なものが第三論文である。その解答は、三角関数  $\sin x$  を「因数分解」すると

$$\sin x = x \left(1 - \frac{x}{\pi}\right) \left(1 + \frac{x}{\pi}\right) \times \left(1 - \frac{x}{2\pi}\right) \left(1 + \frac{x}{2\pi}\right) \dots$$

となるだろうという大胆な発想によるものであり、この等式を認めれば、高校生でも知っている根と係数の関係式との類似から、右辺を展開して得られる係数と左辺のマクローリン展開の係数を見比べることによって結果が得られる。

おそらく、多くの大学生がバーゼル問題の等式の厳密な証明に最初に出会うのは、フーリエ級数論を学んだあと、その簡単な応用としてであろう。すなわち、関数

$$y = x^2 \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$

をフーリエ展開し、両辺の  $x = \pi$  での値を見ることによって自然にバーゼル問題の等式が得られる。

以下では、そのような代数的、解析的な知識を使わず、初等幾何学でよく知られている円周角定理と、物理学的な直観だけによる解答を[6]に沿って紹介しよう。証明の本質は[8]およびその簡素化である[7]に由来するが、[6]では三角法を用いず、初等幾何学だけで証明している。

#### 3.1 逆三平方の定理

以下では、直角三角形のよく知られた性質である三平方の定理の一つのヴァリエーションである逆三平方の定理と、物理学における逆2乗の法則を用いる。

$\angle C$  が直角である直角三角形 ABC (図4)において、 $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $AB = c$  とおくと、 $a^2 + b^2 = c^2$  が成り立つ (三平方の定理)。一方、直角の頂点 C から斜辺 AB に下した垂線の足を H とし、CH の長さを  $h$  とすると、 $\triangle ABC = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch$  より、 $ab = ch$  が成り立つことから  $\frac{1}{h^2} = \frac{c^2}{a^2b^2}$  となり、これより、直角三角形 ABC の各頂点 A, B, C から対辺までの距離  $b, a, h$  の平方の逆数の間に等式

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{h^2}$$

が成り立つことがわかる。これを逆三平方の定理と呼ぶ。

#### 3.2 逆2乗の法則

物理学における逆2乗の法則は、発生源が点と見なせる場合に成り立つ。例えば1つの点光源から出

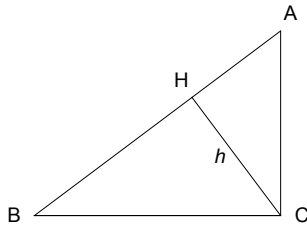


図4 逆三平方の定理

る光が物体に当たったときの「明るさ」は、光源からの距離の2乗に反比例する。重力の大きさも逆2乗の法則に従うが、重力それ自体はベクトル量なので、以下の説明には適さない。

いま、1本の数直線を考えて、その上の原点0を除くすべての整数点（座標が整数である点）に同じ光度（強さ）の光源（例えば、照明塔）が置かれているものとする（図5）。原点0には観測者がいて、各整数点からくる光による照度（明るさ）を観測しているものとする。厳密には、カンデラ、ルクスなどの単位を用いるべきであるが、以下ではどのような単位を用いるかにはこだわらず、ただ、逆2乗法則の比例定数が1となるような任意の単位を用いることにする。そうすれば、点1から届く光による原点の照度は1、点2から届く光による原点の照度は $\frac{1}{2^2}$ 、点3から届く光による原点の照度は $\frac{1}{3^2}$ などとなり、一般に、各整数点 $\pm n$  ( $n \neq 0$ )からの光による照度は $\frac{1}{n^2}$ となるので、左右に並ぶ無数の光源から来る光による原点の照度は

$$2 \left( 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots \right)$$

で表される。もし、この値が求められれば、パーゼル問題は解決されることになる。

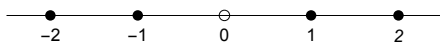


図5 数直線上に並ぶ点光源

### 3.3 作図

$a > 0$  を定数とする。

はじめに、 $xy$  平面上の点  $(0, a)$  を中心とし、原点  $O(0, 0)$  を通る半径  $a$  の円を図6のように描く。

また、原点を通る直径を引き、円とのもう一方の交点を  $A_\infty(0, 2a)$  とする。

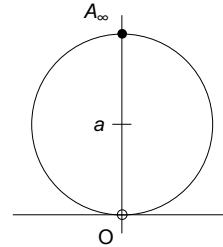


図6 最初の円

次に、点  $A_\infty$  を中心として原点を通る半径  $2a$  の円を描き、点  $A_\infty$  で第1の円に引いた接線が第2の円と交わる点を図7のように  $B_1, B_2$  とする。ま

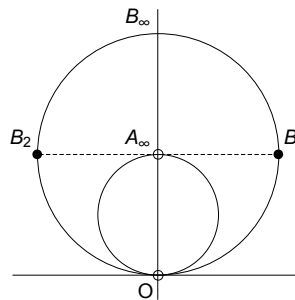


図7 第2の円

た、この円の原点を通る直径を引き、円とのもう一方の交点を  $B_\infty(0, 4a)$  とする。

さらに、点  $B_\infty$  を中心として原点を通る半径  $4a$  の円を描き、点  $B_\infty$  と点  $B_1$ 、点  $B_\infty$  と点  $B_2$  をそれぞれ結ぶ直線がこの円と交わる点を図8のように  $C_1, \dots, C_4$  とする。また、この円の原点を通る直径を引き、円とのもう一方の交点を  $C_\infty(0, 8a)$  とする。

以下、このようなプロセスをまったく同じ要領で繰り返していくが、念のため、この構成法をもう1段階先まで詳しく記述しておこう。すなわち、第4の円は点  $C_\infty$  を中心として原点を通るように描く。その円の半径は  $8a$  である。点  $C_\infty$  と第3の円の周上にとった点  $C_1, C_2, C_3, C_4$  とをそれぞれ結ぶ直線がこの円と交わる点を図9のように  $D_1, \dots, D_8$  とする。また、この円の原点を通る直径を引き、円

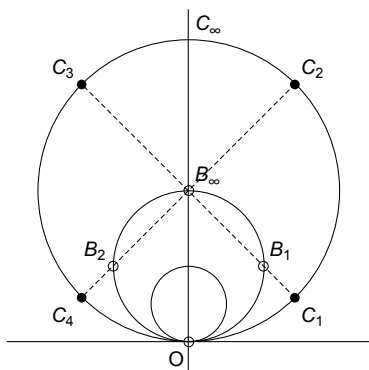


図8 第3の円

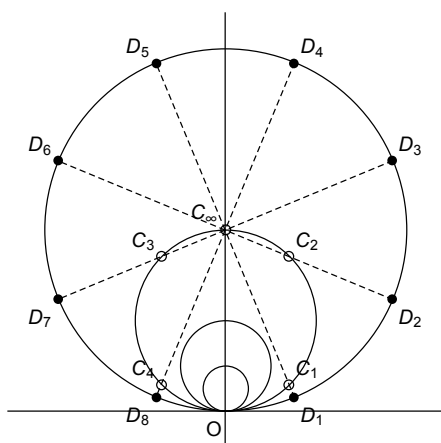


図9 第4の円

とのもう一方の交点を  $D_\infty(0, 16a)$  とする。

こうして、原点を通り、 $y$  軸上の正の部分に中心をもつ半径  $a, 2a, 4a, 8a, \dots$  の円が描かれ、それぞれの円周上に1つ、2つ、4つ、8つ... の点が定められる。この操作を同様に続けていくと、一般に、第  $n$  の円周上には  $2^{n-1}$  個の点が定まる。なお、それらの点は円周を  $2^{n-1}$  等分する点であり、原点  $O$  は1番目の点と  $2^{n-1}$  番目の点を両端とする弧の2等分点であることが、すぐ後で述べるように、円周角定理から簡単に示される。

### 3.4 性質—明るさの不変性

さて、以上の構成法によって何がわかるのだろうか。

まず、図6において、点  $A_\infty$  に光源を置き、そこから来る光を原点  $O$  において観測してみる。こ

のときの原点の照度（明るさ）を1と仮定してみよう。また、第1の円の半径が  $a$  であることから、その円周は  $2\pi a$  であることに注意しておく。

次に、図7において、 $B_1B_2$  は点  $A_\infty$  において第1の円に引いた接線、 $A_\infty O$  は接点  $A_\infty$  を通る直径であるので、接線と弦に関する定理（接弦定理）により、 $\angle B_1A_\infty O$  は弦  $A_\infty O$  の上に立つ円周角に等しいが、弦  $A_\infty O$  は直径なのでそれは直角である。また、 $B_1B_2$  は第2の円の直径であるので、 $\angle B_1OB_2$  は直角である。従って、 $\triangle B_1B_2O$  は直角三角形であり、点  $A_\infty$  は直角の頂点  $O$  から斜辺  $B_1B_2$  に引いた垂線の足であるので、逆三平方の定理により、点  $A_\infty$  に置いた光源を廃止し、その代わりに同じ光度の光源を2つの点  $B_1, B_2$  に置いても点  $O$  における照度は変わらない。（図7において、黒丸はその位置に光源を置くことを示している。）

次の図8において、(1)  $OB_\infty$  は第2の円の直径であるので、その上の円周角  $\angle B_\infty B_1O$  は直角である。よって、 $C_1C_3$  と  $OB_1$  は直交する。また、 $C_1C_3$  は第3の円の直径であるので、 $\angle C_1OC_3$  は直角である。従って、 $\triangle C_1C_3O$  は直角三角形であり、点  $B_1$  は直角の頂点  $O$  から斜辺  $C_1C_3$  に引いた垂線の足であるので、逆三平方の定理により、点  $B_1$  に置いた光源を廃止し、その代わりに同じ光度の光源を2つの点  $C_1, C_3$  に置いても点  $O$  における照度は変わらない。(2) まったく同様のことが  $\triangle C_2C_4O$  についてもいえる。すなわち、 $\triangle C_2C_4O$  も直角三角形であり、その斜辺  $C_2C_4$  上の点  $B_2$  はその直角の頂点  $O$  から斜辺に引いた垂線の足であるので、逆三平方の定理により、点  $B_2$  に置いた光源を廃止し、その代わりに同じ光度の光源を2つの点  $C_2, C_4$  に置いても点  $O$  における照度は変わらない。

以上の2つの光源の置き換え(1), (2)を合わせると、結局、点  $B_1$  と点  $B_2$  に置いた光源を廃止し、その代わりに同じ光度の光源を4つの点  $C_1, C_3, C_2, C_4$  に置いても点  $O$  における照度は変わらない。（図8において、黒丸はその位置に光源を置くことを示している。）

次の図9においても、まったく同様の議論が進行することがわかるだろう。すなわち、この図

の4つの三角形、 $\triangle D_1 D_5 O$ ,  $\triangle D_2 D_6 O$ ,  $\triangle D_3 D_7 O$ ,  $\triangle D_4 D_8 O$  はいずれも点  $O$  を直角の頂点とする直角三角形であり、4つの点  $C_1, C_2, C_3, C_4$  はそれぞれの直角三角形において直角の頂点  $O$  から斜辺に引いた垂線の足となっており、さらに、逆三平方の定理により、4つの点  $C_1, C_2, C_3, C_4$  に置いた光源を廃止し、その代わりに同じ光度の光源を8つの点  $D_1, D_5, D_2, D_6, D_3, D_7, D_4, D_8$  に置いても点  $O$  における照度は変わらない。(図9において、黒丸はその位置に光源を置くことを示している。)

ここで、第4の円周上の8つの光源の位置  $D_1, D_2, \dots, D_8$  が等間隔に並んでいることを示しておこう(図9)。それには、これらの点によって区切られる各弧に対する中心角  $\angle D_1 C_\infty D_2, \dots, \angle D_7 C_\infty D_8$  がすべて  $45^\circ$  であることを示せばよい。なお、図7, 8から明らかなように、対応する事実は第2の円周上の2点  $B_1, B_2$  や、第3の円周上の4点  $C_1, C_2, C_3, C_4$  についても成り立っている。とくに、第3の円において中心角  $\angle C_1 B_\infty C_2, \dots, \angle C_3 B_\infty C_4$  はすべて直角である。

さて、これから第4の円における各弧に対する中心角がすべて  $45^\circ$  であることを示そう。それは、図8, 9を見比べることから明らかである。たとえば、第4の円における中心角  $\angle D_1 C_\infty D_2$  は第3の円における円周角  $\angle C_1 C_\infty C_2$  に他ならず、円周角は中心角の半分なので、これは  $90^\circ \div 2 = 45^\circ$  である。同じことは中心角  $\angle D_7 C_\infty D_8$  についてもいえる。中心角  $\angle D_2 C_\infty D_3$  は第3の円に内接する四角形  $C_2 C_\infty C_3 O$  の外角であるから、内対角  $\angle C_2 O C_3$  に等しく、これは中心角  $\angle C_2 B_\infty C_3$  の半分なので  $45^\circ$  である。同じことは中心角  $\angle D_6 C_\infty D_7$  についても当て嵌まる。中心角  $\angle D_3 C_\infty D_4$  は中心角  $\angle D_7 C_\infty D_8$  の対頂角であり、同じことは中心角  $\angle D_5 C_\infty D_6$  についても当て嵌まる。最後に、中心角  $\angle D_4 C_\infty D_5$  は第3の円における円周角  $\angle C_1 C_\infty C_4$  の対頂角である。

また、中心角  $\angle D_1 C_\infty O$  が  $45^\circ$  の半分であることは、図9が左右対称であることから明らかである。

### 3.5 極限移行

上述の操作は限りなく続けていくことができる。各操作によって円の半径はその都度2倍になるが、同時に円周を等分する光源の個数も2倍になるので、隣り合う光源の間の弧長はすべて一定であること、それは第1の円の円周  $2\pi a$  に等しいことに注意しておこう。

この操作で次々と描かれる第  $n$  の円において、原点  $O$  に隣接する左右それぞれ  $N$  個の光源の位置を  $P_1, P_2, \dots, P_N$ 、および、 $P_{2^{n-1}}, P_{2^{n-1}-1}, \dots, P_{2^{n-1}-N+1}$  で表すと、 $n$  を次第に大きくしていくとき、これらの点はいずれもだんだんと  $x$  軸に近づいていくことがわかるだろう。ただし、 $N$  は予め固定した自然数であるとする。このことは、図から直観的に明らかであるので、ここでは証明しない。三角関数(De Moivreの公式と二項定理)を用いた厳密な証明は文献に見られる。

ここでいっていることは、円を大域的にみると、たとえば原点を通る直径の反対側の点(対蹠点)はつねに  $y$  軸上にあり原点からどんどん遠ざかっていくように見えることと矛盾しない。円周上で原点の左右  $N$  個ずつの光源にだけ着目すると、 $N$  がどんなに大きくても、それにもまして  $n$  を大きくしていきさえすれば、それら合計  $2N$  個の点すべてが、それぞれ  $x$  軸上のある定点にいくらでも近づいていく、といっているに過ぎないからである。

これらの点の  $x$  軸上の行先、原点  $O$  の左右  $N$  個ずつの点は、互いに  $2\pi a$  ずつ離れていることがわかる。すなわち、その距離はももとの円周に沿った弧長に等しい。それらの点を  $Q_1, Q_2, \dots, Q_N$ 、および、 $Q_{2^{n-1}}, Q_{2^{n-1}-1}, \dots, Q_{2^{n-1}-N+1}$  で表すと、原点  $O$  は2点  $Q_1$  と  $Q_{2^{n-1}}$  を結ぶ線分の中点になるので、これらの点の  $x$  軸上の座標は

$$\pm(2k-1)\pi a$$

となる。ただし、 $k = 1, 2, \dots, N$  である。

明るさが光源からの距離の2乗に反比例することから、逆2乗法則の比例定数が1となるような適当な単位を用いると、これらの左右  $2N$  個の光源から

の光で照らされる原点での明るさ、すなわち、原点にいる観測者が観測する照度はこれらの距離の逆数の和、すなわち

$$\frac{2}{(\pi a)^2} \sum_{k=1}^N \frac{1}{(2k-1)^2}$$

で表される。

上記の作図の各段階での原点の照度の不変性により、この和で  $N \rightarrow \infty$  としたときの極限が最初の円 (図 6) の直径だけ原点から離れた光源から来る光による照度  $\frac{1}{(2a)^2}$  に等しいので、

$$\frac{1}{(2a)^2} = \frac{2}{(\pi a)^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$$

となる。これから、奇数の平方の逆数の和が

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

と求められる。

したがって、すべての平方数の逆数の和を  $S$  とすると

$$\begin{aligned} S &= 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \dots \\ &= \left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{36} + \dots\right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \dots\right) + \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \dots\right) \\ &= \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4} S \end{aligned}$$

移項して

$$\frac{3}{4} S = \frac{\pi^2}{8}$$

これより

$$S = \frac{\pi^2}{6}$$

が導かれる。

付記 本論文は、[3] で発表した内容をもとに、大幅に加筆したものである。

## 参考文献

- [1] 「高等学校学習指導要領 (平成 30 年告示) 解説—数学編 理数編」文部科学省、平成 30 年 7 月
- [2] 吉井貴寿「数学的な探究活動の拡充を目指して—黄金比から行列や離散グラフへ」数学教育学会 2020 年度秋季例会予稿集、pp.20-22
- [3] 植野義明「円周等分点による円周角定理の応用」数学教育学会 2020 年度秋季例会予稿集、pp.2-4
- [4] 矢野健太郎著、茂木勇増補「改訂版 数学史」科学新興新社モノグラフシリーズ、1967、1989 年
- [5] 杉本敏夫「パーゼル問題とオイラー」数理解析研究所考究録第 1583 巻 2008 年、pp.159-167
- [6] Johan Wästlund, *Summing inverse squares by euclidean geometry*, 2010
- [7] Hofbauer, Josef, *A Simple Proof of  $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$  and Related Identities*, *The American Mathematical Monthly* 109 (2002), pp. 196–200
- [8] Yaglom, A. M. and Yaglom, I. M., *An elementary derivation of the formulas of Wallis, Leibnitz and Euler for the number  $\pi$*  (in Russian), *Uspechi matematicheskikh nauk*. (N.S.) 57 (1953) 181-187.
- [9] 斎藤憲「よみがえる天才アルキメデス—無限との闘い」岩波科学ライブラリー 117, 2006.