光線光学と四元数

川畑州一 *1

Ray Optics and Quaternion

Shuichi Kawabata *1

Quaternion was invented by William Rowan Hamilton in 1843. Quaternion is a number similar to vector. Although the quaternion algebra is very useful in Ray optics, it is not familiar to us. Quaternion and its algebra are introduced in the paper. And some applications of the quaternion algebra to the field of ray optics are shown.

１．はじめに（**Introduction**）

四元数(Quaternion) は 1843 年 10 月 16 日、Ireland の William Rowan Hamilton によって考案された“数(number)”である。実数(real number) は直線上(line)の点として表され、複素数(complex number)は平面上(plane)の点として表すことができる。一方、四元数は空間の点（a point in space）を表すことができる。

Real number	⇔	Line
Complex number	⇔	Plane
Quaternion	⇔	Space

ここでは、四元数の基本とその代数(algebra) について説明する。そして、光線光学（Ray Optics) への応用（application）について報告する。

（After mid 1880's, Gibbs, Heaviside and Helmholtz had developed Vector analysis apart from quaternion.）

２．四元数とは（**What is a quaternion?**）

四元数 p は以下のように定義（definition）される。

$$p = p_0 + p_1 \cdot \vec{i} + p_2 \cdot \vec{j} + p_3 \cdot \vec{k}, \quad \text{ここで、} \quad \vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = \vec{i} \cdot \vec{j} \cdot \vec{k} = -1 \qquad -（1）$$

これはまた、$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \cdot \vec{i} = \vec{j}$ である。そして四元数 p は、

$$p = p_0 + p_1 \cdot \vec{i} + p_2 \cdot \vec{j} + p_3 \cdot \vec{k} = p_0 + \vec{P}_v \qquad -（1*）$$

と表すこともできる。ここで、p_0 は scaler、$\vec{P}_v$ は vector（ここでは imaginary とも言う！）である。

また、四元数 p について、

$$p^* = p_0 - p_1 \cdot \vec{i} - p_2 \cdot \vec{j} - p_3 \cdot \vec{k} = p_0 - \vec{P}_v \text{ を } p \text{ の共役（conjugate）、} \qquad -（2）$$

$$\|p\| = \sqrt{p \cdot p^*} = \sqrt{p_0{}^2 + p_1{}^2 + p_2{}^2 + p_3{}^2} \text{ を } p \text{ の大きさ（norm）、} \qquad -（3）$$

$$\overline{p} = p^* / \|p\|^2 \text{ を } p \text{ の逆数（inverse）といい、} p \cdot \overline{p} = p \cdot p^* / \|p\|^2 = 1 \text{ である。} \qquad -（4）$$

２-１．四元数の積（Hamilton product）

次に、四元数の積（Hamilton product）について説明する。ここでは、積を⊗と表すことにする。

$$p \otimes q = (p_0 + p_1 \cdot \vec{i} + p_2 \cdot \vec{j} + p_3 \cdot \vec{k}) \otimes (q_0 + q_1 \cdot \vec{i} + q_2 \cdot \vec{j} + q_3 \cdot \vec{k}) = (p_0 + \vec{P}_v) \otimes (q_0 + \vec{Q}_v)$$

$$= \boxed{p_0 \cdot q_0 + q_0 \cdot \vec{P}_v + p_0 \cdot \vec{Q}_v + \vec{P}_v \otimes \vec{Q}_v}$$

そして、（1），（1*）式より、四元数の積を、通常の内積(●)と外積(×)の表記を使って表すと、

$$\boxed{\vec{P}_v \otimes \vec{Q}_v = -(\vec{P}_v \bullet \vec{Q}_v) + (\vec{P}_v \times \vec{Q}_v)}$$

である。従って、四元数 p, q の Hamilton product は

*1 東京工芸大学名誉教授

2020 年 2 月 21 日受理

$$p \otimes q = [p_0 \cdot q_0 - (\vec{P}_v \bullet \vec{Q}_v) + q_0 \cdot \vec{P}_v + p_0 \cdot \vec{Q}_v + \vec{P}_v \times \vec{Q}_v] \qquad -(5)$$

となる。

ここで、 $p_0 = q_0 = 0$ の場合（pure imaginary）、四元数 p,q の Hamilton product は

$$\boxed{p \otimes q = -(\vec{P}_v \bullet \vec{Q}_v) + \vec{P}_v \times \vec{Q}_v} \qquad -(5^*)$$

である。

2-2．四元数の積と行列（Hamilton product and matrix）

四元数はまた、行列を用いて以下のように表すことが出来る。

$$p = p_0 + p_x \cdot \vec{i} + p_y \cdot \vec{j} + p_z \cdot \vec{k} = p_0 + \vec{p}_v = p_0 + \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix}, \quad q = q_0 + q_x \cdot \vec{i} + q_y \cdot \vec{j} + q_z \cdot \vec{k} = q_0 + \vec{q}_v = q_0 + \begin{pmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{pmatrix}$$

従って、

$$p \otimes q = [p_0 \cdot q_0 - (\vec{p}_v \bullet \vec{q}_v)] + p_0 \cdot \vec{q}_v + q_0 \cdot \vec{p}_v + (\vec{p}_v \times \vec{q}_v) =$$

$$\left[p_0 \cdot q_0 - \begin{pmatrix} p_x & p_y & p_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{pmatrix} \right] + p_0 \cdot \begin{pmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{pmatrix} + q_0 \cdot \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ p_x & p_y & p_z \\ q_x & q_y & q_z \end{vmatrix} \qquad -(6)$$

$p_0 = q_0 = 0$ の場合は、

$$\vec{p}_v \otimes \vec{q}_v = -(\vec{p}_v \bullet \vec{q}_v) + (\vec{p}_v \times \vec{q}_v) = -\left(p_x \cdot q_x + p_y \cdot q_y + p_z \cdot q_z\right) + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ p_x & p_y & p_z \\ q_x & q_y & q_z \end{vmatrix} \qquad -(6^*)$$

と表すことが出来る。そして、ベクトル $\boldsymbol{r}$ を固定軸 $\boldsymbol{n}$ の回りに Ω だけ回転させる作用子 h は、

$$h = \cos\frac{\Omega}{2} + \vec{n} \cdot \sin\frac{\Omega}{2}, \qquad |\vec{n}| = 1$$

と表され、回転後のベクトル $\boldsymbol{r}'$ は、

$$h \otimes \vec{r} \otimes \bar{h} = (\cos\frac{\Omega}{2} + \vec{n} \cdot \sin\frac{\Omega}{2}) \otimes \vec{r} \otimes (\cos\frac{\Omega}{2} - \vec{n} \cdot \sin\frac{\Omega}{2})$$

$$= (\cos\frac{\Omega}{2} + \vec{n} \cdot \sin\frac{\Omega}{2}) \otimes [\cos\frac{\Omega}{2} \cdot \vec{r} - [-(\vec{r} \bullet \vec{n}) + (\vec{r} \times \vec{n})] \cdot \sin\frac{\Omega}{2}]$$

$$= \cos^2\frac{\Omega}{2} \cdot \vec{r} + [(\vec{r} \bullet \vec{n}) - (\vec{r} \times \vec{n})] \cdot \sin\frac{\Omega}{2} \cdot \cos\frac{\Omega}{2}$$

$$+ (\vec{n} \otimes \vec{r}) \cdot \sin\frac{\Omega}{2} \cdot \cos\frac{\Omega}{2} + [(\vec{r} \bullet \vec{n}) \cdot \vec{n} - \vec{n} \otimes (\vec{r} \times \vec{n})] \cdot \sin^2\frac{\Omega}{2}$$

$$= \cos^2\frac{\Omega}{2} \cdot \vec{r} + [(\vec{r} \bullet \vec{n}) - (\vec{r} \times \vec{n})] \cdot \sin\frac{\Omega}{2} \cdot \cos\frac{\Omega}{2} + [-(\vec{r} \bullet \vec{n}) - (\vec{r} \times \vec{n})] \cdot \sin\frac{\Omega}{2} \cdot \cos\frac{\Omega}{2}$$

$$+ (\vec{r} \bullet \vec{n}) \cdot \vec{n} \cdot \sin^2\frac{\Omega}{2} - [-\vec{n} \bullet (\vec{r} \times \vec{n}) + \vec{n} \times (\vec{r} \times \vec{n})] \cdot \sin^2\frac{\Omega}{2}$$

$$= \cos^2\frac{\Omega}{2} \cdot \vec{r} - (\vec{r} \times \vec{n}) \cdot \sin\Omega + (\vec{r} \bullet \vec{n}) \cdot \vec{n} \cdot \sin^2\frac{\Omega}{2} - [(\vec{n} \bullet \vec{n}) \cdot \vec{r} - (\vec{r} \bullet \vec{n}) \cdot \vec{n}] \cdot \sin^2\frac{\Omega}{2}$$

$$= \boxed{2 \cdot (\vec{r} \bullet \vec{n}) \cdot \sin^2\frac{\Omega}{2} \cdot \vec{n} + \cos\Omega \cdot \vec{r} - (\vec{r} \times \vec{n}) \cdot \sin\Omega}$$

$$= \left[2 \cdot \begin{pmatrix} r_x & r_y & r_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \cdot \sin^2\frac{\Omega}{2} \right] \cdot \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} + \cos\Omega \cdot \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix} - \sin\Omega \cdot \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ n_x & n_y & n_z \end{vmatrix}$$

である。（Fig. 1 参照）

３．四元数の応用（Applications of the quaternion）

四元数を用いると、ベクトルの回転を容易に行うことができる。Fig. 1に示すように、ベクトル$\vec{r}$を軸$\vec{n}$（$|\vec{n}|=1$）の回りにΩだけ回転させたときのベクトルを$\vec{r}'$とすると、

$$\boxed{\vec{r}' = (\cos\frac{\Omega}{2} + \vec{n}\cdot\sin\frac{\Omega}{2})\otimes\vec{r}\otimes(\cos\frac{\Omega}{2} - \vec{n}\cdot\sin\frac{\Omega}{2})} \qquad -（７）$$

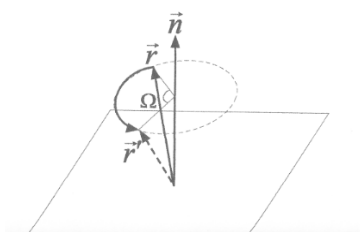

Fig.1 The rotation of the vector

と表すことができる。そこで、

$$\vec{S} = s_1\cdot\vec{i} + s_2\cdot\vec{j} + s_3\cdot\vec{k}, \quad h = \cos\theta + \vec{k}\cdot\sin\theta \quad (\|h\| = 1)$$

とおいて、ベクトル$\vec{S}$を軸$\vec{k}$の周りに2θだけ回転させたときの、回転後のベクトル$\vec{S}'$を求めると、

$$\underline{\vec{S}' = (\cos\theta + \vec{k}\cdot\sin\theta)\otimes\vec{S}\otimes(\cos\theta - \vec{k}\cdot\sin\theta) = 2\sin^2\theta\cdot(\vec{S}\bullet\vec{k})\cdot\vec{k} + \cos 2\theta\cdot\vec{S} + \sin 2\theta\cdot(\vec{k}\times\vec{S})}$$

$$= 2\sin^2\theta\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\s_3\end{pmatrix} + \cos 2\theta\cdot\begin{pmatrix}s1\\s2\\s3\end{pmatrix} + \sin 2\theta\cdot\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\0 & 0 & 1\\s_1 & s_2 & s_3\end{vmatrix} = \begin{pmatrix}\cos 2\theta\cdot s_1 - \sin 2\theta\cdot s_2\\ \sin 2\theta\cdot s_1 + \cos 2\theta\cdot s_2\\ (2\sin^2\theta + \cos 2\theta)\cdot s_3\end{pmatrix}$$

$$= \boxed{\begin{pmatrix}\cos 2\theta & -\sin 2\theta & 0\\ \sin 2\theta & \cos 2\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}s_1\\s_2\\s_3\end{pmatrix}}$$

となる。これはベクトル$\vec{S}$を軸$\vec{k}$の周りに2θだけ回転させるときの行列の式に他ならない!

３−1．反射の法則（The low of reflection）

反射において､反射光$\vec{S}_r$は入射光$\vec{S}_i$を反射面の法線$\vec{n}$（$|\vec{n}|=1$）の回りに 180° 回転（$\Omega=\pi$）させ､反射による向きの変化“−”（minus）をつければ求まる（Fig. ２）。従って、（７）式より、

$$\boxed{\vec{S}_r = -[(\vec{n})\otimes\vec{S}_i\otimes(-\vec{n})]} \qquad -（８）$$

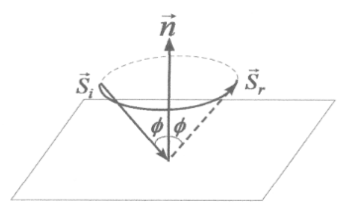

Fig 2 The law of reflection

として求めることができる。
すなわち、

$$\vec{n} = (0 \quad 0 \quad 1), \qquad \vec{S}_i = (\sin\phi \quad 0 \quad -\cos\phi)$$

$$\boxed{\vec{S}_r = -2\cdot(\vec{n}\bullet\vec{S}_i)\cdot\vec{n} + \vec{S}_i = 2\cos\phi\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\sin\phi\\0\\-\cos\phi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sin\phi\\0\\\cos\phi\end{pmatrix}}$$

である。これは反射の法則を示す式に他ならない！

また行列を用いて反射の法則を表すと、

$$\vec{S}_i \equiv (s_1 \quad s_2 \quad s_3), \qquad h = \cos\frac{\pi}{2} + \vec{n}\cdot\sin\frac{\pi}{2} = \vec{n} \equiv (n_1 \quad n_2 \quad n_3), \qquad \|\vec{S}_i\| = \|\vec{n}\| = 1$$

$$\vec{S}_r = [\vec{n}\otimes\vec{S}_i\otimes\vec{n}] = [-(\vec{n}\bullet\vec{S}_i) + (\vec{n}\times\vec{S}_i)]\otimes n = -(\vec{n}\bullet\vec{S}_i)\cdot\vec{n} + [-(\vec{n}\times\vec{S}_i)\bullet\vec{n} + (\vec{n}\times\vec{S}_i)\times\vec{n}]$$

$$= -(\vec{n}\bullet\vec{S}_i)\cdot n - [(\vec{n}\bullet\vec{S}_i)\cdot\vec{n} - (\vec{n}\bullet\vec{n})\cdot\vec{S}_i] = -2\cdot(\vec{n}\bullet\vec{S}_i)\cdot\vec{n} + \vec{S}_i$$

$$\underline{= -2\cdot(n_1 s_1 + n_2 s_2 + n_3 s_3)\cdot\begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}s_1\\s_2\\s_3\end{pmatrix}} \qquad -（９）$$

となる。

３－２．光線の連続反射（Successive reflections of the light）

次に、複数の鏡面で光が連続的に反射を繰り返す場合を考える。(Fig. 3)
ここで、ｋ番目の鏡面での法線をn_kとし、入射する光線の方位ベクトルをS_{k-1}とする。そして、最初の鏡に入射する光線の方位ベクトルをS_0とする。

鏡に入射する光線から（８）式により、その反射光の方位ベクトルが計算できるので、それを次の入射光線の方位ベクトルとすると、さらにその反射光の方位ベクトルが求まる。

この手順を繰り返せば、最終反射光の方位ベクトルが求まる。

その手順をまとめたのが以下の式である。

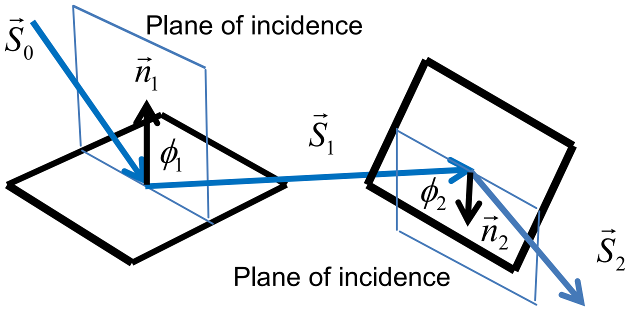

Fig 3 Successive reflections of the light

$$h_k = \cos\frac{\pi}{2} + \vec{n}_k \cdot \sin\frac{\pi}{2} = \vec{n}_k, \qquad \cos\phi_k = (-\vec{S}_{k-1}) \bullet \vec{n}_k$$

$$\vec{S}_1 = -[\vec{n}_1 \cdot \vec{S}_0 \cdot \vec{n}_1{}^*] \Rightarrow \vec{S}_2 = -[\vec{n}_2 \cdot (-\vec{n}_1 \cdot \vec{S}_0 \cdot \vec{n}_1{}^*) \cdot \vec{n}_2{}^*] = [(\vec{n}_2 \cdot \vec{n}_1) \cdot \vec{S}_0 \cdot (\vec{n}_2 \cdot \vec{n}_1)^*]$$

$$\Rightarrow \vec{S}_k = (-1)^k [(\vec{n}_k \cdot \vec{n}_{k-1} \cdots \vec{n}_1) \cdot \vec{S}_0 \cdot (\vec{n}_k \cdot \vec{n}_{k-1} \cdots \vec{n}_1)^*] \equiv \boxed{(-1)^k \cdot [H_k \cdot \vec{S}_0 \cdot H_k{}^*]} \qquad \text{—（10）}$$

上式（10）より、最終的な反射光の方位ベクトルを求めることが出来る！

さらに、入射光線の方位ベクトルと鏡面の法線から、光学系の入射面における p-方位も求まる。

４．拡散光束（Divergent light beam）

まず、光線が角γで拡散する円錐光束$\vec{S}_i$について考察する。

Fig 4 において、円錐光束の中心軸の方位を$\vec{i}$とすると、方位ベクトル$\vec{s}_0$の光線をその軸の回りにωだけ回転させた光線の方位ベクトル$\vec{S}_i$は、四元数を用いた計算により、

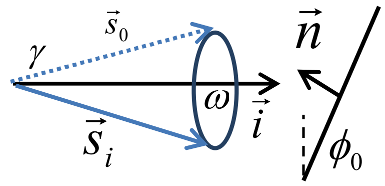

Fig 4 The divergent light beam

$$\vec{s}_0 = \cos\gamma \cdot \vec{i} + \sin\gamma \cdot \vec{k}, \quad h = \cos\frac{\omega}{2} + \vec{i} \cdot \sin\frac{\omega}{2}$$

$$\vec{S}_i = h \cdot \vec{s}_0 \cdot \overline{h} = (\cos\frac{\omega}{2} + \vec{i} \cdot \sin\frac{\omega}{2})(\cos\gamma \cdot \vec{i} + \sin\gamma \cdot \vec{k})(\cos\frac{\omega}{2} - \vec{i} \cdot \sin\frac{\omega}{2})$$

$$= (-\cos\gamma \cdot \sin\frac{\omega}{2} + \cos\gamma \cdot \cos\frac{\omega}{2}\vec{i} - \sin\gamma \cdot \sin\frac{\omega}{2}\vec{j} + \sin\gamma \cdot \cos\frac{\omega}{2}\vec{k})(\cos\frac{\omega}{2} - \vec{i} \cdot \sin\frac{\omega}{2})$$

$$= (-\cos\gamma \cdot \sin\frac{\omega}{2}\cos\frac{\omega}{2} + \cos\gamma \cdot \cos^2\frac{\omega}{2}\vec{i} - \sin\gamma \cdot \sin\frac{\omega}{2}\cos\frac{\omega}{2}\vec{j} + \sin\gamma \cdot \cos^2\frac{\omega}{2}\vec{k})$$

$$+ (\cos\gamma \cdot \sin\frac{\omega}{2}\cos\frac{\omega}{2} + \cos\gamma \cdot \sin^2\frac{\omega}{2}\vec{i} - \sin\gamma \cdot \sin\frac{\omega}{2}\cos\frac{\omega}{2}\vec{j} - \sin\gamma \cdot \sin^2\frac{\omega}{2}\vec{k})$$

$$= \boxed{\cos\gamma \cdot \vec{i} - \sin\gamma \cdot \sin\omega \cdot \vec{j} + \sin\gamma \cdot \cos\omega \cdot \vec{k}} \qquad \text{—（11）}$$

として求めることが出来る。そして、ωを 0～2πの範囲で変化させれば光線$\vec{S}_i$は円錐を描く。

従って、(11) 式は方位$\vec{i}$に対して角度γの方位を成して拡散する円錐光束を表している。

そして、この円錐光束が法線方位$\vec{n}$の平面に入射するとき、その入射角ϕは、

$$\vec{n} = -\cos\phi_0 \cdot \vec{i} + \sin\phi_0 \cdot \vec{k} \quad \Rightarrow \quad surface \quad normal$$

$$\boxed{\cos\phi = (-\vec{S}_i) \bullet \vec{n} = \cos\phi_0 \cdot \cos\gamma - \sin\phi_0 \cdot \sin\gamma \cdot \cos\omega}$$

として求めることが出来る。ここでϕ_0は中心軸$\vec{i}$と、光が入射する面の法線$\vec{n}$とが成す角である。

４－１．等入射角曲線（Equi-angle of incidence curves）

　次に、拡散光束が入射する平面上で、入射角が一定となる場所の座標を求める。(Fig. 5)

　まず、拡散光束に垂直な平面（$x-y$）を考えると、その$x-y$平面内での光束は円となる。

　次に、その拡散光束の、入射平面（$X-Y$）上での方位から拡散光束内での各点での入射角を求めることができる。

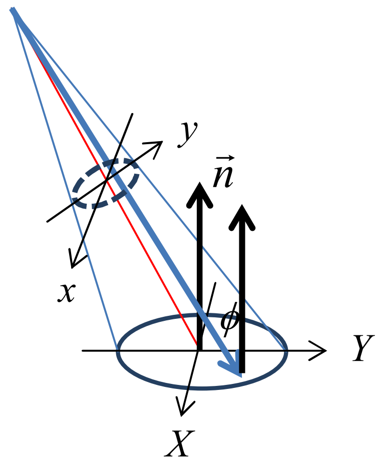

Fig 5 The divergent light beam

$$\cos\phi = (-\vec{S}_i)\bullet\vec{n} = \cos\phi_0\cdot\cos\gamma - \sin\phi_0\cdot\sin\gamma\cdot\cos\omega$$

$$x = X = \tan\gamma\cdot\sin\omega, \qquad y = Y/\cos\phi_0 = \tan\gamma\cdot\cos\omega$$

$$\cos\phi = \cos\phi_0\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\gamma}} - \sin\phi_0\cdot\frac{\tan\gamma}{\sqrt{1+\tan^2\gamma}}\cdot\cos\omega$$

以上より、

$$\sqrt{1+\tan^2\gamma}\cdot\cos\phi = \cos\phi_0 - \sin\phi_0\cdot y$$

$$(1+x^2+y^2)\cdot\cos^2\phi = \cos^2\phi_0 - \sin 2\phi_0\cdot y + \sin^2\phi_0\cdot y^2$$

$$\cos^2\phi\cdot x^2 + (\cos^2\phi - \sin^2\phi_0)\cdot y^2 + \sin 2\phi_0\cdot y = \cos^2\phi_0 - \cos^2\phi$$

$$\boxed{\cos^2\phi\cdot X^2 + (\cos^2\phi - \sin^2\phi_0)\cdot\left(\frac{Y}{\cos\phi_0}\right)^2 + 2\sin\phi_0\cdot Y = \cos^2\phi_0 - \cos^2\phi}$$

式を整理して簡潔に表示すると、

$$\left(\frac{X}{A}\right)^2 + \left(\frac{Y-b}{B}\right)^2 = C \quad (\phi \equiv const.)$$

となり、等入射角曲線は一般には楕円となる。

４－２．等入射角曲線_Limited case

　最後に

$$\boxed{\cos^2\phi\cdot X^2 + (\cos^2\phi - \sin^2\phi_0)\cdot\left(\frac{Y}{\cos\phi_0}\right)^2 + 2\sin\phi_0\cdot Y = \cos^2\phi_0 - \cos^2\phi}$$

において、より限定された以下の条件における等入射角曲線の式について考える。それは、拡散光線の入射角がその中心軸光線の入射角と等しくなる場合（_1)） と、さらに、その入射角が 45° の場合（_2)）である。

1)　$\phi = \phi_0$

$$\cos^2\phi_0\cdot X^2 + (1-\tan^2\phi_0)\cdot Y^2 + 2\sin\phi_0\cdot Y = 0$$

$$\cos^2\phi_0\cdot X^2 + \frac{\cos^2\phi_0 - \sin^2\phi_0}{\cos^2\phi_0}\cdot Y^2 + 2\sin\phi_0\cdot Y = 0$$

2)　$\phi_0 = \frac{\pi}{4}$

$$Y = -\frac{\cos^2\phi_0}{2\sin\phi_0}\cdot X^2 = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot X^2$$

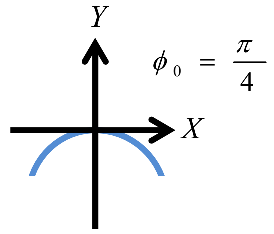

Fig. 6 Equi-angle of incidence

　以上の結果は、消光型偏光解析法において消光縞が視野内で曲線となる過去の経験と一致する！

５．おわりに（Concluding remarks）

四元数はあまり馴染みのない“数”で、一般にはあまり知られていないように思う。しかし、本研究ノートで紹介したように、光線光学（幾何光学）においては大変有用な“数”である。

ここでは、四元数とその代数について簡単に説明し、四元数の光線光学への応用について報告した。それらは、

（１）　捩じれた複数の鏡による連続反射
（Successive reflection by twisted mirrors）
（２）　鏡の捻じれによる入射面の変化
（The p-direction in the successive reflection by twisted mirrors）
（３）　拡散光線とその入射角
（Divergent light beam and their angles of incidence）

などである。

四元数を用いると、以上の計算を、ここで紹介したように、いとも簡単に行うことが出来る。光学系が複雑になり、その経路で光線の捩じりが生じるような場合でも四元数を用いる事で容易に光線を追跡することができる。

四元数は光線光学において大変有用で、光学に関係する多くの人に“四元数”が普及、活用されることを期待する。

参考文献

1) 堀　源一郎：ハミルトンと四元数（㈱　海鳴社） (2007)
2) Wikipedia　“四元数”
3) 第 14 回 偏光計測研究会_2018 講演資料集、一般社団法人　日本光学会
偏光計測・制御技術研究グループ　http://www.otanilab.org/psi/

東京工芸大学　名誉教授
Professor Emeritus, Tokyo Polytechnics University
E-mail: shuichi_o_kawabata@yahoo.co.jp