合唱音楽における音律の数理科学

平岡　一幸*

Mathematical science of temperament in choral music

Kazuyuki Hiraoka *

The mathematical science of temperament is studied in order to perform beautiful choral music with harmonic overtones. Focusing on differences between just intonation and equal temperament, notes in a choir practice are highlighted. In addition, the use of temperament in some conditions is discussed.

1. はじめに

この小文では音楽の「音」の規則である「音律」に焦点を当てます。近代・現代の音楽は平均律が主流ですが、純正律の方がハーモニーが美しいと言われます。その美しさにアプローチするため、純正律と平均律を数理科学的に解析し、両者を比較・整理するのがこの小文の目的の一つです。

更に、純正律により奏でられる機会が多い「合唱音楽」を取り上げ、具体的な演奏について考察します。

2. 純正律と平均律

2.1　音は波 [1)]

音は音波と呼ばれるように波（波動）の一つです。波は正弦関数（サイン関数、sine 関数）や余弦関数（コサイン関、cosine 関数）で表すことができます。例として、1)式に時間を t、角速度を ω（オメガ）としたときの正弦関数で表される波（正弦波、sinusoidal wave）を、さらに図 1 にその形を示します。

$$f_{(\omega)} = A \sin \omega t \qquad \text{.........1)}$$

図 1 では横軸が時間 t となっています。A は波の強度を表す振幅です。1 秒間に上下する回数を振動数もしくは周波数（frequency）といい、単位は Hz（ヘルツ）で表します。また、一回の上下で進む距離を波長（wavelength）と言います。周波数の高低（すなわち波長の短長）が音の高低に対応します。

音叉の音波はこの正弦波形です。他の成分は含まれておらず純音と呼ばれます。純音以外の音の場合は色々な周波数の音を含みます。そのうち最小の周波数のものを基音（基本音，fundamental tone）と言い、他のものを上音（overtone）と言います。また、上音のうち基音の整数倍の周波数のものを「倍音」（harmonic）と言います [2)]。同じ基本周波数（例えば 440Hz）の音でも、ピアノやバイオリンで音色が違うのは倍音の成分とその強度が異なるためです。さらに、人はフォルマント（formant）と呼ばれる倍音の分布により「ア」「イ」「ウ」「エ」「オ」を識別しているようですが、それはまた別の機会にまとめましょう [3,4)]。

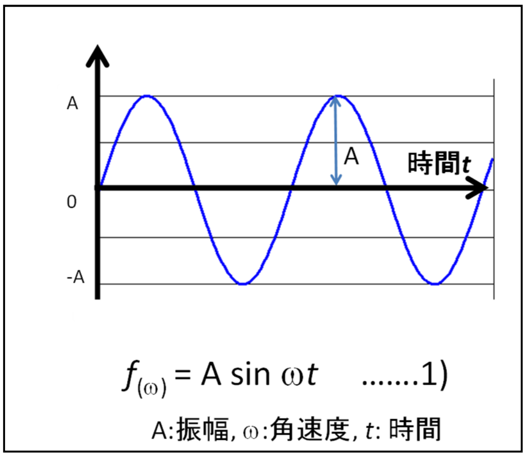

Figure 1.　A sinusoidal wave.

2.2　音律と音階 [5)]

はじめに「音律」と「音階」を定義しましょう。ここでは「音律とは楽音の相対的高さを厳密に規定した体系」とし、「音階は音律で規定されたものの中から音を選び音高で並べたもの」とします [5,6,8)]。

雅楽、西洋音楽、インドの音楽、アラブやアフリカ諸国の音楽、、、これらは各々異なる「音律」により音の高さを決めています。例えば、インドには 22 音で構成された音律が、モロッコには 26 音のもの、チュニジアには 29 音の音律があるそうです [5,7)]。また、最近では 16 音や 17 音で構成された音律についても提案されています [8)]。その中で、ピアノの鍵盤が 1 オクターブ（octave）で 12 個あるように、西洋音楽は 12 種類の音で構成されています。

西洋音楽の中でも、平均律（equal temperament）、中全音律（meantone temperament）、純正律（just intonation, pure intonation）、ピタゴラス音律（Pythagorean tuning, Pythagorean scale）など、いくつかの音律があります。

このように、時代、場所、民族などにより様々な音律が

*　東京工芸大学　生命環境化学科　教授
2018 年 2 月 9 日 受理

あるけれども、ここでは純正律と平均律を取り扱います。

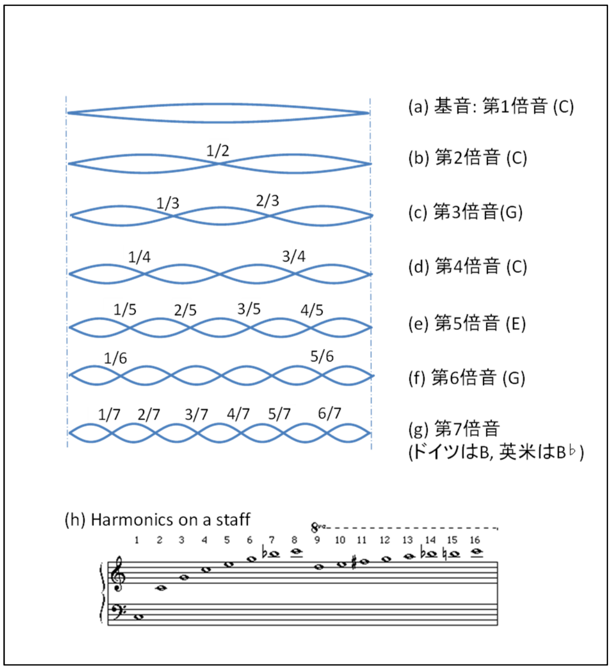

Figure 2.　Harmonics of a musical tone. [9)]

2.3　純正律の数学 [2,5,9-16)]

純正律は、基音である C（Do）の周波数を 1 としたとき、表 1 の第 3 列に「純正律の周波数比 X」として表した整数比によって決まる音律です。具体的には、D（Re）は C に対して 9/8 倍、E（Mi）は 5/4 倍、F（Fa）は 4/3 倍、G（Sol）は 3/2 倍、A（La）は 5/3 倍、H（Si）は 15/8 倍、オクターブ上の C が 2 倍の周波数に各々なります。純正律においては主要三和音（長調ではドミソとソシレとファラド）が 4 : 5 : 6 の簡単な比となり美しく響きます。この簡単な整数比、$(z+1)/z$ もしくは$(2z-1)/z$ になっています、で決まる音律はプトレマイオスが考案し [5,10)]、その後、15～16 世紀に再発見され使われるようになりました [11)]。

複数の人が音高をそろえて歌うと倍音が響きます。ハーモニーの原点です。倍音の周波数も基音の整数倍（つまり整数比でもあります）なので、いくつかの倍音は純正律の音に一致します。図 2 に様々な倍音を示しました。図 2(a)を基音とすると、(b)が第 2 倍音、(c)が第 3 倍音、(d)が第 4 倍音、(e)が第 5 倍音、(f)が第 6 倍音、(g)が第 7 倍音、、、、、と続きます。周波数が倍の音程をオクターブと呼びます。(a)基音に対して(b)第 2 倍音は周波数が 2 倍なので、1 オクターブ高いわけです。(b)第 2 倍音に対して(d)第 4 倍音は周波数が 2 倍あるので、さらに 1 オクターブ高くなります。

簡単の為に(a)を C（ハ、もしくは Do）の音として、図 2(a)から(g)までの音名を右端に記しました。つまり、(a)が C なら、(b)第 2 倍音は 1 オクターブ高い C、(d) 第 4 倍音は 2 オクターブ高い C になります。

それでは(c)第 3 倍音はというと、基音に対して 1 オクターブと完全 5 度高い所にある G（ト、もしくは Sol）になり、直下の C の 3/2 の周波数（2/3 の波長）になります。合唱の際に、第 2 倍音や第 3 倍音が聞こえた経験をお持ちの人も多いと思います。

さらに(e)の第 5 倍音は E（ホ、もしくは Mi）で、直下の C の 5/4 の周波数（4/5 の波長）になります。さらに(g)第 7 倍音は直下の C の 7/4 の周波数（4/7 の波長）で B（B はドイツ語表記、英米では B flat（B♭）、日本語は変ロ、イタリア語では Si bemolle）になります。これらの倍音を五線譜上にも示しました（図 2(h)）。但し、第 7 倍音は純正律の B♭と正確には一致しません。倍音と純正律との違いについては「6. 補遺」で後ほど触れます。

表 1 は C dur （ハ長調）の音階を構成する「C, D, E, F, G, A, H, C; Do, Re, Mi, Fa, Sol, La, Si, Do」について、純正律の音の関係をまとめたものです。左端の第 1 列には音名、第 2 列には初めて出てくる *m* 倍音、第 3 列には基音である 1 行目の C の周波数を 1 ときの周波数比 X（つまり音の高さ）を、分数と小数と $2^{n'}$、で表しました。さらに、第 4 列は後述する平均律により計算した周波数比 Y、第 5 列は純正

Table 1.　Frequency ratio of musical tones in just intonation and equal temperament.

音名 独表記(伊表記)	初めて現れる *m*倍音	純正律の周波数比 X X = 分数 = 小数 = $2^{n'}$	平均律の周波数比 Y (= 2^n)	純正律と平均律との差 純正律X − 平均律Y	[セント値= 1200 × (n′-n)]
C (Do)	1	$1 = 2^0$	$2^n = 2^0 = 1$	0	0
D (Re)	9	$9/8 = 1.125 = 2^{0.169925001}$	$2^{(2/12)} = 1.122462048$	+0.002537952	+3.910
E (Mi)	5	$5/4 = 1.25 = 2^{0.321928094}$	$2^{(4/12)} = 1.25992105$	-0.00992105	-13.686
F (Fa)	Fの第3倍音がC	$4/3 = 1.333... = 2^{0.4150375}$	$2^{(5/12)} = 1.334839854$	-0.001506521	-1.955
Fis(Fa diesis)	11*		$2^{(6/12)} = 1.414213562$		
G (Sol)	3	$3/2 = 1.5 = 2^{0.5849625}$	$2^{(7/12)} = 1.498307077$	+0.001692923	+1.955
A (La)	13*	$5/3 = 1.666... = 2^{0.7369656}$	$2^{(9/12)} = 1.681792831$	-0.015792831	-15.641
B(Si bemolle)	7*		$2^{(10/12)} = 1.781797436$		
H (Si)	15	$15/8 = 1.875 = 2^{0.90689059}$	$2^{(11/12)} = 1.887748625$	-0.012748625	-11.731
C (Do)	2	$2 = 2^1$	$2^{(12/12)} = 2^1 = 2$	0	0

**m*倍音が純正律からずれている.

律 X と平均律 Y の差、第 6 列は純正律 X と平均律 Y の差をセント値で表したものです。セント値については後ほど解説します。

分数で表される純正律の周波数比 X（つまり音の高さ）を表 1 で確認してみましょう。表 1 では純正律と平均律との差の計算を簡単にするため、分数だけでなく小数でも表してあります。3 列目「純正律の周波数比 X」を見ると、C (Do) = 1/1 = 1、D (Re) = 9/8 =1.125、E (Mi) = 5/4 =1.25、F (Fa) = 4/3 =1.333...、G (Sol) =3/2 = 1.5、 A (La) = 5/3 =1.666...、H (Si) = 15/8 =1.875 、C = 2/1 = 2、になっていますね。

2.4 平均律の数学 [5, 12, 17)]

さて困ったこと。純正律は整数比（つまり分数）で音を決めているため、音の間隔が均等になりません。それは C を基準にした純正律の音と、他の音、例えば D を基準にした純正律の音がずれることを意味します。そのため、C dur（ハ長調）の純正律で調律したピアノでは、他の調に転調して音楽を奏でると調子はずれになり演奏が難しくなるはずです。あらら、、、。

そこで音の間隔を均等にした「平均律」が発明されました。平均律では「指数と対数」、つまり $a^b = C$ や $\log_a C = b$ を使います。ここで b のことを「指数」もしくは「a を底としたときの C の対数」と言います。つまり指数と対数は同じことを表しています。たとえば、10 × 10 ＝ 100 の関係を指数関数で表すと、

$$10^2 = 100 \qquad \text{.....2)}$$

となります。同じ関係を対数関数で表示すると、

$$\log_{10} 100 = 2 \qquad \text{.....3)}$$

となります。

ちなみに、4)式に示した「底（てい）の変換公式」は有用です。

$$\log_a R = (\log_b R) / (\log_b a) \qquad \text{.....4)}$$

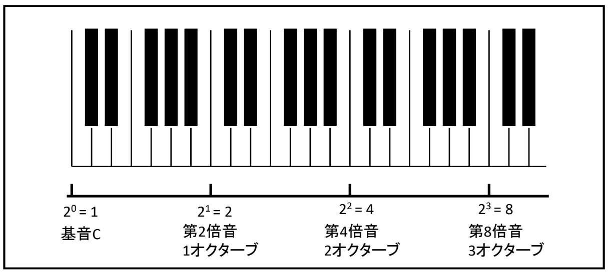

Figure 3. A piano keyboard and a logarithmic scale.

なぜ平均律で指数や対数を使うのかというと、オクターブの音の周波数の関係が倍数だからです。指数と対数を使うと倍数の関係を簡単に表すことができます。図 2 にもどって音の高さに相当する波の節（膨らんだところ）の数を数えてみましょう。(a)の基音は節の数は 1 個、(b)の第 2 倍音は節の数は 2 個、(d)の 2 オクターブうえの第 4 倍音は節の数は 4 個すなわち 2 の 2 乗（$4 = 2^2$）個、さらに 3 オクターブうえの第 8 倍音は節の数 8 個すなわち 2 の 3 乗（$8 = 2^3$）個となります。n オクターブうえになると節の数が 2^n 倍になることに気づきます。つまり n オクターブの n は、2^n の指数（もしくは対数）の n なのです。ということは図 3 に示すようにピアノの鍵盤は対数表示の定規や目盛そのものになっています [5)]。15 世紀には鍵盤楽器がありましたから [18)]、Napier や Bürgi が対数を発見した 16 世紀後半から 17 世紀よりかなり前です [19)]。へー、ちょっと驚きです。もっとも、音楽は数学の一分野だったので驚くにはあたらないかもしれません。

上述のように純正律では「C, D, E, F, G, A, H, C; Do, Re, Mi, Fa, Sol, La, Si, Do」を分数で表していました。しかし、基音が異なると倍音がずれてしまう欠点がありました。それを克服したのがこの平均律です。平均律ではオクターブが 2^n で表されることを利用しています。基音の C の周波数を 1（$1 = 2^0$）とすると、1 オクターブうえの C の周波数は $2 = 2^1$ すなわち 2 の 1 乗です。西洋音楽では 1 オクターブの中に 12 種類の音がありますから、それぞれを「$2^{(m/12)}$［2 の（m/12）乗］」で均等割りして表すと、12 音で構成される 1 オクターブうえの音でちょうど $2 = 2^{(12/12)} = 2^1$ になります。つまり $C = 2^0 = 2^{(0/12)} = 1$、$C^\# = 2^{(1/12)}$ 、$D = 2^{(2/12)}$、$D^\# = 2^{(3/12)}$、 $E= 2^{(4/12)}$、$F = 2^{(5/12)}$、$F^\# = 2^{(6/12)}$ 、$G = 2^{(7/12)}$、$G^\# = 2^{(8/12)}$ 、$A = 2^{(9/12)}$、$A^\# = 2^{(10/12)}$ 、$H = 2^{(11/12)}$ 、$C = 2^{(12/12)} = 2$、というわけです。このように音の相対的な高さを対数の均等割で決めたのが平均律です。

表 1 には、$2^{(m/12)}$で表される音の高さである「平均律の周波数比 Y」を計算した結果も記載してあります（4 列目の「平均律の音の高さ Y」）。Do, Re, Mi, Fa, Sol, La, Si, Do は各々、C (Do) = $2^0 = 2^{(0/12)} = 1$、D (Re) = $2^{(2/12)} = 1.12246$、E (Mi) = $2^{(4/12)} = 1.25992$、F (Fa) = $2^{(5/12)} = 1.33484$、G (Sol) = $2^{(7/12)} = 1.49831$、A (La) = $2^{(9/12)} = 1.68179$、H (Si) = $2^{(11/12)} = 1.88775$、$C = 2^{(12/12)} = 2$、となっていることが確認できます。

3. 和音における純正律と平均律のずれの解析 [5)]

3.1 純正律と平均律のずれ

平均律は偉大な発明です。平均律を用いることで転調が可能になり、その後の音楽が飛躍的に発展しました。しかし、和音がきれいに聞こえないという欠点があります。それは平均律と純正律の音のずれが原因です。表 1 に平均律、すなわち「$2^{(m/12)}$［2 の（m/12）乗］」で計算した音の高さ（周波数比 Y）を純正律の周波数比 X の横（第 4 列）に記しました。さらに第 5 列には純正律 X と平均律 Y との差を示します。「C, D, E, F, G, A, H, C; Do, Re, Mi, Fa, Sol, La, Si, Do」の各々を見てみると、基音の C とオクターブうえの C を除いて純正律と平均律の音が微妙にずれていることが分かります。「純正律では分数で」「平均律では指数や対数で」音の高さを決めたのですから、両者の値は当然一致しませんよね。

3.2 和音を美しく奏でるための定量的解析

具体的に表 1 を見ていきましょう。C の音はオクターブ

変わっても純正律 X と平均律 Y に差はありません(X – Y = 0)。しかし、純正律の E の音（5/4=1.25）は、平均律（$2^{(4/12)}$ = 1.25992…）に比べて、純正律－平均律 = -0.00992 だけずれています。だから階名読み（移動ド）のドミソの長和音のミはピアノより少し低く歌うときれいなハーモニーになります。一方、純正律の A の音は平均律から-0.01579 ずれています。そのためラドミの短和音の場合、ラに対してドを高めにとるとより悲しい和音になります。

表 2 に短 3 度、長 3 度、完全 4 度、完全 5 度、短 6 度、長 6 度の純正律と平均律で表した周波数比と両者の差（純正律 X - 平均律 Y）をまとめました。完全 4 度、完全 5 度の場合、それぞれ-0.00151 と+0.00169 と差はあるものの 1000 分の 1 程度と小さいことが分かります。一方、短 3 度と長 3 度の場合は文字通り桁が違います。短 3 度における差は+0.0108、長 3 度では-0.00922 と 100 分の 1 程度の差があることが分かります。これは明らかに有意な差でハーモニーに影響します。それでは次に、半音より狭い音程を表すことができる微分音やセント単位を用いて解析してみましょう。

3.3 セント（cent）単位と微分音を用いた評価 [9)]

音程を表す対数単位をセント(cent)と言い、2 つの音の周波数の比を表します。平均律の半音の間隔を 100 セントと定義されます。1 オクターブは 12 半音ありますから、その周波数比は 1200 セントです。したがって、1 セントの周波数比は 5)式で表されます。

$$1 \text{ cent} = 2^{(1/1200)} \qquad \text{………5)}$$

また、2 つの音の周波数がそれぞれ a、b ならば、その周波数比であるセント値 n は 6)式で表されます。

$$n = 1200 \times \log_2(b/a) \qquad \text{………6)}$$

表 1 と表 2 には平均律を基準とした純正律のセント値も右端に示しました。

先ほど、純正律と平均律の間の周波数比が、短 3 度では+0.0108、長 3 度では-0.00992 と、100 分の 1 程度の差があると述べました。これらについてセント値を用いて微分音（半音より狭くて全音の何分の一かの音程）を求めてみましょう。表 2 の右端を見てみると、短 3 度の差+0.0108 は+15.641 セント、長 3 度の差-0.00992 は-13.686 セントであることが分かります。全音が 200 セントですから、短 3 度に相当する短三和音の第 3 音は平均律より「(+15.641 セント) ÷ (200 セント) 」=「全音の十三分の一くらい高く」、長 3 度に相当する長三和音の第 3 音は「(-13.686 セント) ÷ (200 セント) 」=「全音の十五分の一くらい低く」奏でる必要があります。

というわけで、階名（移動ド）で歌うときは、短和音における「ラドミのド」・「ミソシのソ」・「レファラのファ」は高めに、長和音における「ドミソのミ」・「ソシレのシ」・「ファラドのラ」は低めに歌いましょう。

4. 純正律を用いた演奏に関する考察 [20)]

高く歌えとか低く歌えとか言っても、それでは具体的にどのように演奏したらよいのでしょうか？ ここでは以下の 2 曲を例にとり楽譜を見ながら考察していきましょう。

4.1 Mendelssohn（メンデルスゾーン）の Lobgesang から

交響曲第 2 番（讃歌 Lobgesang）は、グーテンベルク印刷技術完成の 400 周年を祝って作曲された独唱と合唱を伴う交響曲です。ここでは第 8 曲 Chorale の冒頭部分を取り上げます。2.4 で純正律に調律されたピアノでは転調ができないと述べましたが、ここは転調の連続になっています。無伴奏 （アカペラ: a cappella）なので平均律の音楽から解放されており、アナログで音の高低が調整できる合唱音楽ならではの純正律の音楽が楽しめます。対象となる楽譜を図 4 に [21)]、歌詞を以下に示します [22)]。

“Nun danket alle Gott
Mit Herzen, Mund und Händen,
Der sich in aller Not
Will gnädig zu uns wenden,
Der so viel Gutes tut;
Von Kindesbeinen an
Uns hielt in seiner Hut,
Und allen wohlgetan.”

Table 2. Frequency ratio of interval in just intonation and equal temperament.

音程	純正律 周波数の比率	純正律 （周波数比 $X = 2^{n'}$）	平均律 平均律の周波数比 Y（$=2^n$）	純正律と平均律との差 純正律X − 平均律Y	[セント値= 1200 × (n'-n)]
短3度	5:6	$(6/5=1.2 = 2^{0.263034405})$	$2^{(3/12)}$= 1.189207115	+0.010792885	+15.641
長3度	4:5	$(5/4=1.25= 2^{0.321928094})$	$2^{(4/12)}$= 1.25992105	-0.00992105	-13.686
完全4度	3:4	$(4/3=1.333...= 2^{0.415037499})$	$2^{(5/12)}$= 1.334839854	-0.001506521	-1.955
完全5度	2:3	$(3/2=1.5= 2^{0.5849625})$	$2^{(7/12)}$= 1.498307077	+0.001692923	+1.955
短6度	5:8	$(8/5=1.6= 2^{0.678071905})$	$2^{(8/12)}$= 1.587101052	-0.012898948	+13.686
長6度	3:5	$(5/3=1.666...= 2^{0.736965594})$	$2^{(9/12)}$= 1.681792831	-0.015126164	-15.641

「いまこそ皆、神に感謝せよ、
心と口と手をもちて。
あらゆる苦難の時にも神は
我らにその慈悲をくださるがゆえに。
神は大いなる恵みをくださる、
子供の頃より、
我らをその庇護に置き、
恵みを与える。」

Figure 4. A part of the vocal score of “Lobgesang” composed by Jakob Ludwig Felix Mendelssohn Bartholdy.[21)] [“Edition Peters Nr. 1750, 8627, LOBGESANG, Eine Symphonie-Karte (Symphonie Nr. 2) opus 52 von Felix Mendelssohn Bartholdy, p. 81 (from Takt 1 to Takt 15) of the vocal score”. Copyright C. F. Peters Corporation. Reproduced with permission.]

楽譜の上部に和音を支配している調を、長和音を大文字、短和音を小文字として加筆しました。和音の進行が素敵ですね。もちろん平均律での演奏は可能ですが、純正律を意識して第 3 音に留意しながら演奏することでより美しいハーモニーになります。

そのためには、和音において自分のパートが根音なのか、第 3 音なのか、第 5 音なのか？　そして次の和音展開において、自分のパートが根音なのか、第 3 音なのか、第 5 音なのか、を意識する必要があります。それぞれの和音において、「根音は強く」、「長和音の第 3 音は低く、短和音の第 3 音は高く」など、自分のパートの音に適するように高低や強弱をコントロールできるといいですね、でも、、、「言うは易し、歌うは難し」です。歌うに当たっては分かりやすいように、根音の音符を黒、第 3 音を赤、第 5 音を緑、その他を青など、色分けして書くと良いかもしれません。

一方、複雑な和音も随所に見られます。例えば、4 小節の 1 拍目、5 小節の 1 拍目、5 小節の 4 拍目、8 小節の 1 拍裏、9 小節の 3 拍表裏、11 小節の 3 拍表裏、同小節 4 拍表裏、13 小節の 2 拍表裏、などは単純な長和音や短和音ではありません。具体的に見ていきましょう。4 小節の 1 拍目は DCGA の複雑な和音、 5 小節の 1 拍目は d^7 でもあり F^6 でもあります。つまり階名で「ドミソラ」すなわち「短三和音＋ソ（7）」=「長三和音＋ラ（6）」となっています［以下（d^7/F^6）の様に記します］。5 小節の 4 拍目も同様の「ドミソラ」で（a^7/C^6）、8 小節の 1 拍裏も（a^7/C^6）です。9 小節の 3 拍表裏は（G^9 からより複雑に）、11 小節の 3 拍表裏は（e^7/G^6 からより複雑に）、同小節の 4 拍表裏は（$F^\#HEGC^\#$から $F^\#$）、13 小節の 2 拍表裏は（D^9 から G^6 へ）、などとなっています。

こうやって複雑な和音を書きならべると、「短三和音＋ソ（7）」=「長三和音＋ラ（6）」が多いことがわかります。演奏に際しては、これらを平均律で緊張感を持った和音とするか、短和音や長和音を強調するかなどの選択肢があると思います。いずれにせよ、これらの複雑な和音を起点や経過点として和音の展開がなされています。これに歌い手、すなわち合唱団がどう答えるかが課題です。

楽譜は示していませんが、この Chorale の 19 小節 Auftakt 以降は、ソプラノ、アルト、テノール、バスの 4 声がユニゾン（同じ音）になります。ユニゾンは倍音を奏でる究極のハーモニーです。そのことを歌い手全員が共有し共感する事が大事です。

4.2 Dvořák（ドヴォルザーク）の Stabat Mater から

最後に、Antonín Leopold Dvořák の Stabat Mater （邦訳「悲しみの聖母」） の終曲「第 10 曲 肉体は死して朽ち果てるとも （*Quando corpus morietur*）」のフィナーレの部分を例にとり、日本を代表する指揮者のひとりである松村努先生のご指導の例を紹介したいと思います。尚、以下の文章は著者の記憶と印象に基づいており、内容に関する全責任は著者にあることをあらかじめお断りします。

対象となる楽譜を図 5 に [23)]、歌詞を以下に示します [24)]。

“Quando corpus morietur,
fac, ut animae donetur
paradisi gloria. Amen”

「たとえ肉体は死んで朽ちるとしても

魂には
楽園の栄光を授けて下さい。
アーメン」

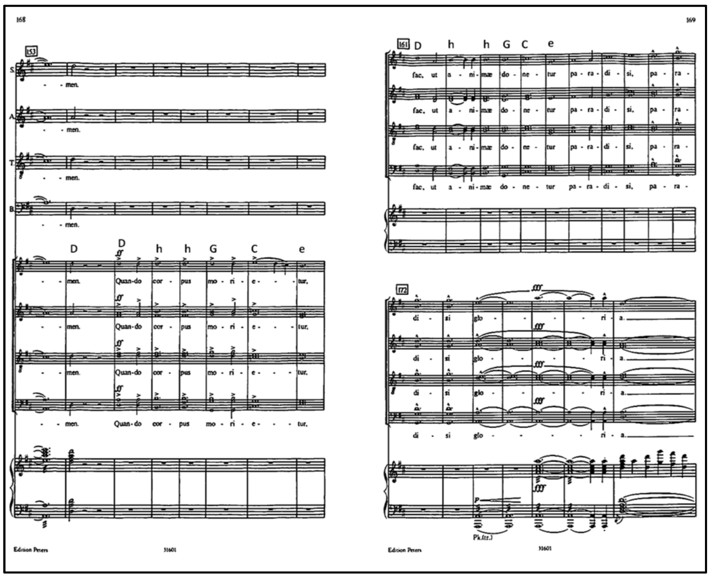

Figure 5. A part of the vocal score of “Stabat Mater” composed by Antonín Leopold Dvořák.[23] [Edition Peter Nr. 8639, 31601, (GYC00075011), STABAT MATER opus 58 von Antonín Leopold Dvořák, pp. 168-169 (from Takt 153 to Takt 178) of the vocal score”. Copyright C. F. Peters Corporation. Reproduced with permission.]

図 5 において 155 小節から 173 小節は無伴奏となっており、やはり平均律の音楽から解放されています。ここでも、合唱譜上部に和音を支配している調を、長和音を大文字、短和音を小文字として加筆しました。

もちろん平均律での演奏は可能ですが、純正律を意識して第 3 音に留意しながら演奏することでより美しいハーモニーになることは言うまでもありません。加えて、松村先生のご指導はさらに重要なことを指摘されていますので、それに従って考察します。

まず 155 小節から 160 小節までの和音進行を確認すると、155 小節が D dur（ニ長調）、156・157 小節が h moll（ロ短調）、158 小節が G dur（ト長調）、159 小節が C dur（ハ長調）、160 小節が e moll（ホ短調）、そして 161 小節で再び D dur となります。

注目すべきは和音の根音と第 3 音です。155 小節では D dur が、続く 156・157 小節では h moll が支配している平行調の関係にあります。平均律では、D dur の根音 D と h moll の第 3 音 D は、機械的に同じ高さの音であるので特に音のピッチに留意することはありません。しかし純正律の場合、h moll の第 3 音 D は平均律より周波数比の差で約 100 分の 1（全音の十三分の一程度）高くなります。その場合、どのように演奏すればよいのでしょうか？

松村先生のご指導は「155 小節から 156 小節にかけて、ソプラノの歌う『h moll の第 3 音 D』の音を『その前の D dur の根音 D』より（約 100 分の 1）高くせよ」、そして「続く G dur の 158 小節から C dur の 159 小節へかけて、ソプラノの D から E への移動は高いままとし、159 小節では C dur の純正律の和音を奏でるため他のパートが歌う C と G をソプラノに合わせて高くとれ」だったと記憶しています［() 内は著者の補足］。結果として合唱全体が約 100 分の 1（全音の十三分の一程度）ピッチが上昇します。この和音上昇のパターンは 161 小節から 166 小節でも繰り返されます。したがって、天国の栄光を歌い上げるこのフィナーレは、文字通り和音の絶対音も上昇しながら歌い上げることになります。

3 人の子供たちのいる天国が「楽園であれかし」と思う親心を感じます[25]。きっと、やがてその楽園で子供たちと再会することを思いながら作曲したのでしょうね。

5. まとめ、化学系学生の数理教育の題材として

化学者のために書かれた応用数学の成書は多くあります[26]。化学を学ぶには数学が心強いツールになるからです。しかし本学の化学系の学生は数学が苦手で避ける傾向にあります。教師としては悩みの種です。実際に教育するとなると、単純な中学・高校数学の復習の形をとったリメディアル教育は学生も受け容れがたいし、大学教育の在り方としても難しい面があります。そこで高校数学の復習を兼ねることができ、大学で習う初等数学の応用にもなるテーマを取り上げることによって、応用数学の学習における学生諸君のモチベーションを上げることを模索しています。

この小文はその試みとして、数学の一分野でもあった音楽を取り上げました。数学を音楽へ応用することで初等数学を学ぶきっかけを作り、学びを実践していくことがこの小文のもう一つの目的です。学生諸君の意見やお読みになった先生方のご批判を頂き、さらに良い方法を考えたく思います。どうかご意見・ご批判を賜りますようお願い申し上げます。

このあとは、本小文に続いて言語の発音や楽器の音色の解析に有用なフーリエ変換を取り上げる予定です。参考文献 3) で取り上げたフーリエ解析の名著として知られる「フーリエの冒険」に学びながら、フォルマントの形と美しい和声との関係を考察することを目標にしています。ご期待ください。

6. 補遺[27]

表 1 における「第 9 倍音と D(Re)の純正律」、「第 5 倍音と E(Mi)の純正律」、「第 3 倍音と G(Sol)の純正律」、「第 15 倍音と H(Si)の純正律」は周波数が一致します。

一方、表 1 の 2 列目「初めて現れる *m* 倍音」に*を付けた「第 11 倍音と純正律の $F^{\#}$(Fa diesis)」、「第 13 倍音と純正律の A(La)」、「第 7 倍音と純正律の $B^{\flat}$(Si bemolle)」は周波数が一致しません。

参考の為、これら 3 つの音の「純正律の周波数比 X」、「倍

音の周波数比 Z」、「純正律 X と平均律 Y との差（X-Y）」、ならびに「倍音 Z と平均律 Y との差（Z-Y）」を、表 1 に加えたものを付表 1(Supplement table 1)として示します。加えられた項目は斜字で示しました。詳しく見てみましょう。第 11 倍音は基音との周波数比が 11/8 であり、F#の純正律の周波数比 25/18 と違うことが分かります。同様に第 13 倍音の周波数比は 13/8 で、純正律の A の値 5/3 と違います。同じく第 7 倍音は 7/4 で、純正律の B♭の値 15/8 と違います。これらの差のセント表示や比較は読者にお任せします。

最後に、ピアノで代表される平均律と比較してみましょう。第 11 倍音は F#の平均律から-48.682 セント、第 13 倍音は A の平均律から-59.472 セント、第 7 倍音は B♭の平均律から-31.174 セント、各々異なります。半音が 100 セントなので、六分音から四分音くらい平均律から異なっていることが分かります。

Supplement table1.　Frequency ratio of musical tones in just intonation, equal temperament, and harmonic overtones.

音名 独表記(伊表記)	初めて現れる m倍音	純正律の周波数比 X　X = 分数 = 小数 = $2^{n'}$	平均律の周波数比 Y（=2^n）	純正律と平均律との差 純正律X − 平均律Y	[セント値= 1200×(n'-n)]
C (Do)	1	$1 = 2^0$	$2^n = 2^0 = 1$	0	0
D (Re)	9	$9/8 = 1.125 = 2^{0.169925001}$	$2^{(2/12)} = 1.122462048$	+0.002537952	+3.910
E (Mi)	5	$5/4 = 1.25 = 2^{0.321928094}$	$2^{(4/12)} = 1.25992105$	-0.00992105	-13.686
F (Fa)	Fの第3倍音がC	$4/3 = 1.333... = 2^{0.4150375}$	$2^{(5/12)} = 1.334839854$	-0.001506521	-1.955
Fis(Fa diesis)		*$25/18 = 1.388.. = 2^{0.4739312}$*	$2^{(6/12)} = 1.414213562$	*-0.025324673*	*-31.283*
G (Sol)	3	$3/2 = 1.5 = 2^{0.5849625}$	$2^{(7/12)} = 1.498307077$	+0.001692923	+1.955
A (La)		$5/3 = 1.666... = 2^{0.7369656}$	$2^{(9/12)} = 1.681792831$	-0.015792831	-15.641
B(Si bemolle)		*$9/5 = 1.8 = 2^{0.847996906}$*	$2^{(10/12)} = 1.781797436$	*+0.018202563*	*+17.596*
H (Si)	15	$15/8 = 1.875 = 2^{0.90689059}$	$2^{(11/12)} = 1.887748625$	-0.012748625	-11.731
C (Do)	2	$2 = 2^1$	$2^{(12/12)} = 2^1 = 2$	0	0
		倍音の基音に対する周波数比 Z		*倍音Z − 平均律Y*	*[セント値= 1200×(n'-n)]*
Fis(Fa diesis)	*11**	*$11/8 = 1.375 = 2^{0.459431618}$*	*$2^{(6/12)} = 1.414213562$*	*-0.039213562*	*-48.682*
A (La)	*13**	*$13/8 = 1.625 = 2^{0.700439718}$*	*$2^{(9/12)} = 1.681792831$*	*-0.015792831*	*-59.472*
B(Si bemolle)	*7**	*$7/4 = 1.75 = 2^{0.807354922}$*	*$2^{(10/12)} = 1.781797436$*	*-0.031797436*	*-31.174*

*m倍音が純正律からずれている.

7.　謝辞

Lobgesang（図 4）と Stabat Mater（図 5）の転載を許可していただいた Peters Corporation の Gene Caprioglio 様に深く感謝します。K. H. would like to thank Mr. Gene Caprioglio (Vice-President for New Music & Rights, Peters US) for permission of reproduction of vocal scores of “Lobgesang (Fig. 4)” and “Stabat Mater (Fig. 5)”.

この小文を書こうと思い立ったのは、湘南フィルハーモニー合唱団における松村努先生のご指導の素晴らしさゆえです。松村努先生に心から感謝申し上げます。また、同団の敬愛する先輩であり蔵前の先輩でもある指原建司様に書くきっかけを作っていただきました。感謝申し上げます。

指原様ならびに学生時代からの畏友である中莖洋一郎様、御子柴尚様、高倉伸様には拙稿を見て頂き貴重なご意見を賜りました。御礼申し上げます。

本小文をまとめるにあたり、小方厚先生が著された参考文献 5）「“音律と音階の科学”, 講談社ブルーバックス, 2007」を参考にさせて頂きました。心から御礼申し上げます。

著者は物性化学を専門とする研究者です。今回のテーマである音楽については浅学で、言葉の使い方さえままなりません。音楽の専門家の方にはお目汚しとは存じますが、お読みになっていただいた方がいれば厳しいご批判を賜れれば幸いです。

わが師である故加藤磐郎先生と故斉藤俊夫先生にこの小文を見てもらいご批判を頂きたかったです。再び会うときに叱られないよう精進したいと思います。

参考文献

1) 小口武彦, 比企能夫, 三宅哲, “物理学 C （波動・熱学）”, 槇書店, 1-68 (1984).
2) 金原寿郎編, 基礎物理学　上巻, 裳華房, 197-214 (1963).
3) トランスナショナルカレッジオブレックス編, “フーリエの冒険 新装改訂版”, 言語交流研究所 ヒッポファミリークラブ, 1-165 (2013).
4) 田村俊一, 猿渡景子, 村田幹雄, 電子情報通信学会論文誌 A, **J74-A** (1991) 570-573.
5) 小方厚, “音律と音階の科学”, 講談社ブルーバックス (2007).
6) 小方厚, 日本物理学会誌, **62**, 371 (2007).
7) 青島広志, 安藤應次郎, “究極の楽典”, 全音楽譜出版社, 11-17 (2009).
8) 小方厚, 久留智之, 日本物理学会誌, **59** (2004) 553.
9) “フリー百科事典『ウィキペディア（Wikipedia）』”, 「倍音」の項 （2017 年 9 月 26 版）から一部を転載.
10) 山本建郎 訳, “古代音楽論集 （西洋古典叢書 G057）”, 京都大学学術出版会 (2008) 105-295. 特に 130, 131, 170 ページ. 当該ページは「クラウディオス・プトレマイオス (Claudius Ptolemaeus), “ハルモニア論”」の邦訳である.
11) D. J. グラウト, C. V. パリスカ （戸口幸策, 津上英輔, 寺西基之 共訳), “新西洋音楽史　上”, 音楽之友社, 203 (1998).
12) 石桁真礼生, 末吉保雄, 丸田昭三, 飯田隆, 金光威力和雄, 飯信義, “新装版 楽典 理論と実習”, 音楽の友社 (2001).
13) Sandy Feldstein, “Practical Theory Complete”, Alfred Publishing, Van Nuy, 32-41 and 59-70 (1998).
14) Imogen Holst, “Das ABC der Music. Grundbegriffe, Harmonik, Formen, Instrumente”, Philipp Reclam jun GmbH & Co. KG (Reclam Universaal-Bibliothek Nr. 18681), Stuttgart, 13-31 (1963).
15) 小橋稔, “楽典”,ドレミ出版社 (1980).
16) 青島広志, “クラシック音楽をもっと楽しむ　やさしくわかる楽典”,日本実業出版社 (1980).
17) 永尾汎, 高橋陸男, 石井恵一, 落合豊行, 川中宣明, 佐藤正次, 八木克己, 鷲原雅子, “高等学校 数学 II”, 数研出版, 87-108 (1994).
18) 1480 年ごろ作られたチェンバロがロンドンの王立音楽大

学（The Royal College of Music）に保存されています. http://www.rcm.ac.uk/museum/

19) 日本数学会編集, “数学辞典（第 3 版）”, 岩波出版社, 434 (2004).

20) 教会音楽については, 例えば「松村努監修, “必ず役に立つ合唱の本　教会音楽編”, 株式会社ヤマハミュージックメディア (2015)」などに詳しい.

21) C. F. Peters Corporation 社の “Edition Peters Nr. 1750, 8627, Lobgesang, Eine Symphonie-Karte (Symphonie Nr. 2), Opus 52 von Felix Mendelssohn Bartholdy, Klavierauszug, Neu durchgesehen und herausgegeben von Johanna Cornelis” の 81 ページから転載.

22) 歌詞と訳は, “フリー百科事典「ウィキペディア（Wikipedia）」の「交響曲第 2 番（メンデルスゾーン）」の項 （2016 年 8 月 25 日版）」” から転載.

23) C. F. Peters Corporation 社の“Edition Peters Nr. 8639, 31601, Stabat Mater, Opus 58 von Antonín Dvořák, Neuausgabe nach den Quellen von Reinhold Kubik, Klavierauszug von Hans Feldigl, Revidiert von Rudiger Bornhlöft”の 168-169 ページから転載.

24) 歌詞と訳は, “湘南フィルハーモニー合唱団　第 26 回演奏会プログラム”から転載.

25) ロドリック・ダネット著（橘高弓枝訳）, “チェコが生んだ偉大な作曲家　ドボルザーク（伝記　世界の作曲家 9）”, 偕成社 (1999).

26) 例えば,「高分子学会編, “化学者のための数学”, 東京化学同人 (1981)」など.

27) 純正律 12 音階の周波数比（具体的には F♯と B♭）については, 岡部洋一氏のホームページ” http://www.moge.org/okabe/temp/scale/node24.html” を参考にさせて頂きました.