

博士学位論文

奇数次非球面の数学的基礎の解明と 光学設計・開発への応用についての研究

東京工芸大学大学院 工学研究科

メディア工学専攻

田邊 貴大

目次

1. はじめに.....	4
1.1. 研究背景.....	4
1.2. 研究の概要.....	8
2. 奇数次非球面の Zernike 展開の収束性と微分の完全性.....	12
2.1. はじめに.....	12
2.2. 回転対称な Zernike 多項式の完全性.....	12
2.3. 奇数次非球面に対する Zernike 展開公式の導出.....	16
2.4. 奇数次非球面に対する Zernike 展開の収束性（収束の速さ）.....	19
2.5. 奇数次非球面の Zernike 展開の微分の近似可能性.....	20
2.5.1. Zernike 多項式の微分公式.....	20
2.5.2. （準備）一般次非球面の Zernike 展開係数について成り立つ関係.....	21
2.5.3. 奇数次非球面の微分の近似についての証明.....	21
2.5.4. 3 次非球面の場合の具体例.....	24
2.5.5. 1 次非球面に関する考察（微分の近似が成り立たない例）.....	26
2.5.6. 微分の完全性についての補足.....	28
2.6. F. Zernike による Zernike 多項式の定義との関係.....	28
2.7. 光学設計による確認.....	31
2.7.1. Schmidt surface.....	31
2.7.2. 光学設計及びその結果の吟味.....	32
2.8. 第 2 章のまとめ.....	35
3. 奇数次非球面の収差特性についての考察と、実際の光学設計による実証.....	37
3.1. はじめに.....	37
3.2. 奇数次非球面の収差係数の導出.....	38
3.2.1. 小さな非球面量により加わる波面収差.....	38
3.2.2. 奇数次非球面の収差係数.....	42
3.2.3. 奇数次非球面の収差係数の Zernike 展開に関する考察.....	44
3.3. 奇数次非球面の設計例.....	49
3.3.1. 設計の概要.....	49
3.3.2. 偶数次設計と奇数次設計の比較.....	50
3.3.3. 奇数次非球面の展開公式との関係.....	55
3.4. 第 3 章のまとめ.....	57
4. レンズのへそについての新たな表現方法と、その光学設計・製造への応用 ～奇数次非球面を用いた検討～.....	60

4.1.	はじめに.....	60
4.2.	へその数学的表現.....	61
4.2.1.	Fringe Zernike 多項式による近似不可能性.....	61
4.2.2.	へその数学的モデルの検討.....	62
4.2.3.	正規分布関数を偶数次多項式で表すことの不可能性.....	64
4.3.	奇数次非球面によるへそ形状の近似.....	68
4.4.	光学設計による確認.....	70
4.4.1.	設計仕様.....	70
4.4.2.	実際のへそ形状に基づく性能劣化のシミュレーション.....	73
4.5.	第4章のまとめ.....	76
5.	全体のまとめ.....	79
6.	謝辞.....	82
7.	発表論文.....	83

1. はじめに

1.1. 研究背景

古くから光学系は球面と平面よりなる光学素子を基礎として設計、製作されてきた。その第一の理由は球面や平面の製造が容易に行えることにある。また、もう一つの理由としてこれらの面では光学設計の基礎となる光線追跡が幾何学的かつ解析的に行えることも挙げられる ([1-1],[1-2])。一方で、光学の黎明期から球面とは異なる非球面を用いた光学設計も行われている。例えば、Rene Descartes の 1637 年の研究では無収差の条件から自然にデカルトの卵型(Cartesian Oval)という 4 次非球面が現れることが導かれた。物体が無限遠という特殊な場合の屈折単レンズは楕円面となり、その他の場合にも放物面・双曲面といった二次曲面(円錐曲面、コーニック面)が得られる([1-2] Chap. 17)。したがって、偶数次非球面が無収差の条件から自然に現れることが分かる。

これを踏まえて実際の光学設計では、次の式で示される偶数次非球面を用いることが一般的である。

$$z = \frac{cr^2}{1 + \sqrt{1 - (1+k)c^2r^2}} + A_4r^4 + A_6r^6 + \dots \quad (1-1)$$

ここで、 r は動径座標、 c は曲率、 k はコーニック定数であり、 A_{2n} は $2n$ 次の非球面係数である。(1-1)において前提となる座標系を以下に示す。

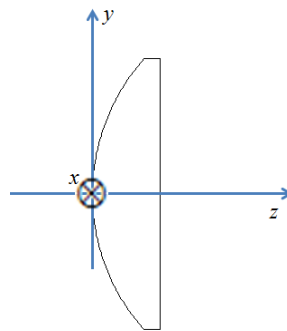


Fig. 1-1 The coordinate system for a aspherical surface

偶数次非球面の収差特性は深く研究されている。偶数次非球面の Seidel 収差は、[1-2] p. 208 や[1-3]において論じられている。5 次収差については、[1-2] Chap. 26 に 3 次収差係数との関係も含めて論じられており、[1-4]でより実際の計算に適した形に書き改められている。また、[1-1]を拡張した形として[1-5]では 6 次波面収差を論じ、実際の数値例と共に紹介されている。

偶数次非球面は理論面だけではなく、実際の光学設計にも広く用いられている。当初は非

球面形状の創成・研磨技術が未熟で面形状精度が低かったため、コンデンサレンズ、接眼レンズといった要求精度が低い光学系に用いられていた。しかし、1970年代以降、超精密研削技術と計測技術の発展により、高精度な非球面研磨が可能になり、カメラレンズをはじめとした結像光学系への利用が一般的となった。現在では、研磨・計測技術の発展により、最高精度が要求されるリソグラフィ用投影光学系への応用が可能までとなっている([1-6])。

以上で述べたように偶数次非球面に関しては、その性質がよくわかっているだけではなく、実際に製造に広く応用されている。一方、偶数次非球面の限界もまた意識されており、(1-1)とは異なる形状を持った自由曲面も多く提案されている。自由曲面の代表的なものとして、Zernike 多項式面、spline 面、XY 多項式面など([1-7], [1-8])が挙げられる。その中で、本研究での主題である奇数次非球面は次の数式で表される。

$$z = \frac{cr^2}{1 + \sqrt{1 - (1+k)c^2r^2}} + \sum_{n=1}^N A_n |r|^n, \quad (1-2)$$

これは偶数次非球面(1-1)の非球面項において、動径座標に奇数次の冪乗を含むように拡張した面形状であり、回転対称非球面の一種である。奇数次非球面については、収差補正上の効果が期待されており([1-9] pp.184-185)、また実際に特許においても応用例が示されている([1-10][1-11][1-12])。

一方、奇数次非球面は回転対称なので、奇数次非球面は高次の偶数次非球面で近似できると一般に考えられてきた。谷川・渋谷らは、奇数次非球面を偶数次多項式で表す検討を行った([1-13][1-14])。奇数次非球面は回転対称なので、直感的にはこの予想は成り立つはずである。まずは、奇数次単項式を偶数次多項式と等置してみる。(注：簡単のため動径座標 r を正規化して考える、すなわち、考えている区間は $[0,1]$ である。)

$$r^{2n-1} = \sum_k a_{2k} r^{2k} \quad (1-3)$$

この等式が成り立つとすれば二つの意味がある。一つは、右辺が無限個の項よりなる偶数次の Taylor 展開としての等式である。もう一つは、右辺はあくまで有限個であり、最小自乗近似としての(近似的な)等式である。

谷川、渋谷らは[1-13][1-14]において、レンズの性質から導関数の一致を要求することにより、前者の意味では等式が成り立ちえないことを示した。3次非球面を例にとって説明する。まず、3次非球面が偶数次の冪級数(偶数次 Taylor 展開)できると仮定する。

$$f(r) = r^3 = a_2 r^2 + a_4 r^4 + a_6 r^6 + \dots \quad (1-4)$$

ここで、(1-4)の微分を考えると、

$$f'(r) = 3r^2 = 2a_2r + 4a_4r^3 + 6a_6r^5 + \dots \quad (1-5)$$

ここで、両辺に $r/3$ をかけることにより、

$$r^3 = 2/3a_2r^2 + 4/3a_4r^4 + 2a_6r^6 + \dots \quad (1-6)$$

を得るが、(1-5)と(1-6)の右辺が等しいとすると、係数 a_{2k} はすべて0になってしまい、矛盾が導かれる。すなわち3次非球面が(1-4)のように偶数次 Taylor 展開できないことが示された。

一方、後者の最小自乗近似の意味では(1-3)は有限個の項よりなり、その中で、元の奇数次非球面との誤差の自乗和を最小にするように係数 a_{2k} が決定される。一般には、L2 ノルム

$$\begin{aligned} & \|r^{2n-1} - (a_2r^2 + a_4r^4 + a_6r^6 + \dots + a_{2N}r^{2N})\|^2 \\ &= \int_0^1 \{r^{2n-1} - (a_2r^2 + a_4r^4 + a_6r^6 + \dots + a_{2N}r^{2N})\}^2 r dr \end{aligned} \quad (1-7)$$

を最小にするように係数が決定される。(注: 単位円上の積分を考えているので、積分要素は rdr となる)。

有限項の場合と無限項の場合で一見矛盾がるように見えるが、形状の収束性については、Zernike 多項式を用いて解くことができる。Zernike 多項式は、単位円上の完全直交関数系なので([1-15])、どのような連続関数に対しても、その Zernike 展開は最小自乗近似 (L2 ノルム¹の最小化) になっている。ここで、回転対称性から、この近似は $2n$ 次の回転対称な Zernike 多項式 $Q_n(r^2)$ により、以下のようにあらわすことができる。(この記法は 2 章の記法による)

$$r^{2n-1} \sim c_0Q_0(r^2) + c_1Q_1(r^2) + \dots + c_NQ_N(r^2). \quad (1-8)$$

各 Zernike 多項式 $Q_n(r^2)$ を具体的に書き表し、並べ替えることによって、(1-4)と同じ形 (ただし有限個の項より構成されるときに限り収束が確実に保証される) を必ず得ることができる。ただし、無限個の項を用いた展開について、文献[1-13][1-14]には次のような言及がなされている。奇数次非球面を式(1-8)の形に展開し、それを(1-4)の形に並べ替えることを検討する。数値計算によると、この並べ替えは発散することが示されている。それゆえ二つの考え方 (テイラー展開不可能性と最小自乗近似) には矛盾がないと結論された。

また、実際の光学設計への応用では、最終的なスポットダイヤグラムや透過波面収差の値

¹ 単位円上の L2 ノルムは、関数 f と g の間の距離を極座標による積分として次の式で定義する :

$$\|f - g\|^2 = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 |f - g|^2 r dr$$

を比較することで、奇数次非球面の有用性が議論されている。これらの考察においては、奇数次非球面は二次非球面の項を含むことで、近軸特性を変えずに収差補正効果が期待できるとされている。

以上の成果は、これまで漠然と有効性が予想されていた奇数次非球面についてその数学的基礎と収差補正上の効果を確認した点で先駆的な研究であるといえる。しかしながら、この研究には以下のような課題が残されている。

課題 1. 奇数次非球面の Taylor 展開(1-4)の不可能性と偶数次多項式による最小自乗近似(1-8)との関係性が不明である。無限項まで考えたときに矛盾しないことは示されているが、実際のレンズ設計は有限項で行うため、両者は一見矛盾するように見える。実際のレンズ設計における奇数次非球面の数学的基礎を確立するには、その背景についての理論的考察が必要である。

より詳しく述べると以下のような説明となる。Zernike 多項式の完全性より(1-8)を無限和にすると、(1-7)のノルムの意味で、次の等式が成り立つ。

$$r^{2n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k Q_k(r^2). \quad (1-9)$$

一般に、無限個の項よりなる級数を並べ替えることはできないため、右辺を並べ替えて(1-4)の形にできるとは限らない。しかし、有限個の項であれば並べ替えは可能であり、もし有限個の項で十分に近似できるのであれば、奇数次非球面の近似多項式として偶数次非球面の形を得ることができる。

課題 2. レンズ設計では光学面（屈折面、反射面）の形状（変位）だけではなく傾きが重要である。奇数次非球面を偶数次多項式により最小自乗近似した場合の、導関数の近似精度についての評価が必要である。これを“微分の完全性”と呼んでもよいだろう。

式(1-9)により説明すれば、右辺の和は無級数なので、その項別微分が収束するとは限らない。すなわち $(\sum_{k=0}^{\infty} c_k Q_k(r^2))' \neq \sum_{k=0}^{\infty} c_k Q_k'(r^2)$ について、右辺が収束するとも限らず、“?”が成り立つとも限らない。

ここで注意しておかなくてはならない点は、偶数次 Taylor 展開の係数と最小自乗近似の係数の関係である。前者は、関数の値を、原点における高階導関数で順次近似していくため、係数は次数によらず一意に決まる。一方、後者の意味での近似多項式は、区間[0,1]での最良近似式を考えているため、次数によって多項式の係数が変動する。Zernike 展開(1-8)の係数は、関数の直交分解で一意に定まるが、得られた展開を並べ替えて多項式の形にすると、係数は近似多項式の項数が増えるごとに毎回変動するのみならず、無限個の項まで考えると 4 次以上の係数は発散することが分かる。この事実は[1-13]により数値的に実証されている。この一見矛盾するような性質と微分との関係も明らかにする必要がある。

課題 3. 奇数次非球面をレンズ設計で有効に活用するためには、奇数次非球面の収差補正可能性について、具体的にどの種の光学系に有効であるか、あるいはどのような収差補正に有効であることを明確に示す必要がある。[1-13]では、球面収差が瞳座標の偶数次多項式であることから、奇数次非球面が軸上収差の補正には不適切であること、露光光学系では効果が確認できなかったことが言及されている。実際の設計に応用するためには、より具体例に踏み込んだ理論的解析が必要である。

1.2. 研究の概要

本研究では、奇数次非球面の光学設計における有用性の背景を明らかにするため、数学的基礎を確立するとともに、光学的性質（収差特性）の解明を行った。本研究の流れを以下に示す。

まず、第 2 章において、奇数次非球面の Zernike 展開公式の理論式を導出した。係数の評価により、この展開公式は、直交関数の理論からの直接の帰結である「最小自乗近似」であることのみならず、「一様収束」することを導いた²。また、一様収束は、Zernike 展開が非常に強く収束することを意味するので、Zernike 展開が微分の近似にもなっていることが予想される。Zernike の微分公式を用いて、1 次非球面³以外のすべての奇数次非球面について、Zernike 展開の項別微分と、元の関数の微分の Zernike 展開が一致することを示した。したがって、奇数次非球面の Zernike 展開は元の面形状をその微分も含めて光学的に忠実に表現しているといえる。また、1 次非球面であっても、微分不可能な原点近傍を除けば、Zernike 多項式によって十分に近似できることを示した。Zernike 展開を有限個で打ち切れば、並べ替えによって、有限項の偶数次展開が収束し、それによって十分近似できることになる。

以上の結果を用いて、設計例として Schmidt surface の Zernike 展開の検討を行った。Schmidt surface とは、Schmidt Camera の補正板を以下の式によって設計したものである ([1-16])。

$$z = f(r) = a_3 r^3 + a_4 r^4 + a_5 r^5 + \dots \quad (1-10)$$

² ここで、「最小自乗近似」あるいは同じことだが、L2 収束とは、関数の差の自乗積分がゼロに収束することを言い、必ずしも関数の値自体の収束を意味しない。一方、「一様収束」とは、関数の値自体が定義域全体で同じスピードで収束することを言い、L2 収束より強い収束を意味している。

³ 一次非球面はいわゆるアキシコンであり、もともとの形状は原点で微分不可能である。すなわち、その Zernike 近似は微分の近似にはなっていないことは明白である。

一方、通常の Schmidt 補正板は以下の式に基づいて設計される。

$$z = f(r) = a_2 r^2 + a_4 r^4 + a_6 r^6 + \dots \quad (1-11)$$

ここでの設計検討は、次の 2 点が主眼となる。一つは(1-10)と(1-11)に収差補正上の相違があるかという点であり、もう一つは、(1-10)によって設計した面形状を、2 章で導出した展開公式によって有限個偶数次非球面によって表現したとき、収差特性が変化するかどうかである。この検討の結果、奇数次非球面 (Schmidt surface) によっても十分な収差低減が可能であり、それを有限個の偶数次で近似しても十分な近似精度が得られることが分かった。すなわち (Schmidt surface) においては、3 次以上の奇数次非球面は 2 次以上の偶数次非球面で十分に近似できることが確認できた。さらに、奇数次非球面そのものにはパワー項が含まれないが、展開後にパワー項が生じるので、奇数次非球面はある意味パワーの代用を果たしていることも導出した。このことから、奇数次非球面は共役関係 (近軸関係) を変えることなく、収差補正を行うことが可能であるという点で、光学設計に有効であることが示された。

第 3 章では、奇数次非球面の波面収差係数を導出することにより、その光学的特性を明らかにした。奇数次非球面は、原点での高次導関数が定義できないので、軸上収差には悪影響を及ぼすことが予想されている([1-13])。そこで、軸外収差の補正のための奇数次非球面の応用として、Extreme Ultraviolet Lithography (EUVL) 投影光学系の設計を検討した。本検討で取り上げた光学系は 6 枚鏡系であり、輪帯状の軸外視野によりスキャン露光を行う光学系である。この光学系への応用を念頭に、軸外の Seidel 収差係数にあたる収差係数を導出した。この非球面による光路長変化を瞳座標で Taylor 展開することによって、波面収差係数への非球面寄与が得られることを用いた([1-17])。

1 次と 3 次非球面について、収差係数の具体的計算を行った。2 次及び 4 次の収差係数は、文献[1-1][1-3]等で予想されるように、それぞれ近軸量と Seidel 収差が現れる。一方、本検討により、奇数次非球面の場合は、これらに相当する瞳座標に関しての低次収差であっても、高次非点収差、高次アス、Tetrafoil といった高次収差が現れることが導かれた。それゆえ、奇数次非球面は軸外の高次収差の補正に役立つと予想できる。

以上の検討に基づき、EUVL 投影光学系の奇数次非球面応用を検討した。従来の偶数次設計では汎用光学ソフトで一般に使用可能な 30 次まで用いても、高次アス、Tetrafoil といった高次収差が残っており、最新露光装置に要求される Strehl 比 99.9%以上の達成が困難であった([1-18])。一方、奇数次非球面を適切な位置で使った設計では、これらの高次収差を補正することができ、Strehl 比 99.9%を達成した。このように奇数次非球面の収差特性を踏まえた収差補正効果が確認できた。

また、2 章で示された奇数次非球面の Zernike 展開可能性との関係を検討した。数学的には、奇数次非球面は傾きも含めて有限な項数の Zernike 多項式によって十分近似される。しかし、EUVL の設計例では、Zernike 展開を通じて、設計形状を偶数次非球面で近似した

ところ、設計ソフトで扱える最高次でも光学系の透過波面は全く再現しなかった。すなわち数学的には、Zernike 展開は有限項数で奇数次非球面を完全に展開できるものの、実用的な項数では奇数次非球面を偶数次非球面で表すことができないことが導かれた。この結果は 2 章の結果と矛盾するようであるが、実はどちらも正しい。すなわち、数学的表現可能性とは別に、光学系への要求精度によつての表現可能性という現実的問題があるので、結果として奇数次非球面は設計に有効であるといえる。

最後に、第 4 章において以上の議論から奇数次非球面の持つ形状表現の自由度に着目し、奇数次非球面の製造面への応用を検討した。近年、非球面や大口径レンズの形状創成には点加工方式が一般化している。点加工方式においては中心部に局在した形状誤差である「へそ」がしばしば問題となる([1-19])。面形状創成段階において、へそが生じないような加工プロセスの開発も必要だが、設計段階で、どの程度のへそならば許容できるかの公差設計も重要である。従来はへそ形状の表現方法が確立されておらず、へその公差シミュレーションについてはほとんど定量的な議論はほとんどなされていなかった。4 章の研究では、実際のへそ形状が Zernike 多項式で表現しきれないこと⁴を数値的に実証したうえで、へその数学的モデルとして「正規分布関数」を用いることを提案し、良い近似を得ることが分かった。正規分布は高さと半値幅という二つのパラメータで表されるので、設計だけでなく製造上の評価もしやすい。しかし、多くの光学設計ソフトでは、正規分布関数をそのまま扱うことはできない。そこで、正規分布関数を多項式によつて表現することが必要だが、実際のへそ形状が Zernike 多項式で近似できないことから予想される通り、急峻な形状を持つ正規分布関数もまた Zernike 展開できない。そこで、奇数次を含む多項式による正規分布関数近似を試み、それを通じて、へそ形状のシミュレーションを行うことを提案し、実際に十分良い近似である事を数値的に確認した。その結果、へそによる MTF 劣化などの光学性能変化を予想予測することが可能となった。このように、奇数次非球面の製造への新たな応用を提案することができた。

参考文献

- [1-1] R. Kingslake, *Lens design fundamentals*, Academic Press, New York (1978)
- [1-2] M. Herzberger, *Modern Geometrical Optics*, Interscience Publishers, Inc., New York (1958)
- [1-3] 松居, 収差論, JOEM
- [1-4] 松居, 5 次収差論の実用化に関する研究, Thesis
- [1-5] J. M. Sasian, "Theory of sixth-order wave aberrations," *Applied Optics*, Vol. 49, No. 16 (2010).

⁴ この結果も一見 Zernike 多項式の完全性に矛盾するようであるが、実は矛盾ではない。というのも、実用的な項数である Fringe Zernike の 37 項[1-7][1-8]では項数が不足しており、急峻な形状誤差を表しきれないためである。

- [1-6] T. Matsuyama et al., "The lithographic lens: its history and evolution," *Proc. SPIE* 6154, Optical Microlithography XIX, 615403 (2006); doi:10.1117/12.656163
- [1-7] CodeV reference manual
- [1-8] Zemax reference manual
- [1-9] 中川治平, レンズ設計工学, 東海大学出版会(1985)
- [1-10] 佐藤賢一, 特開 2003-241081
- [1-11] 佐藤治夫, 特開 2001-159732
- [1-12] 小松田秀其, 特開 2004-31801
- [1-13] 谷川他, "奇数次非球面の有効性," *光学* 36(11) 646–660 (2007)
- [1-14] M. Shibuya et al., "Theoretical investigation of the meaning of odd-order aspherical surface and numerical confirmation of effectiveness in rotational-symmetric but off-axis optics," *Opt. Eng.* 49(7), 073003 (2010)
- [1-15] Born & Wolf, *Principles of Optics*, Second (Revised) Edition. Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom (1999).
- [1-16] ISO-10110.-12, "Optics and photonics — Preparation of drawings for optical elements and systems —Part 12: Aspheric surfaces,"
- [1-17] A. E. Conrady, *Applied Optics and Optical Design* Part I and II, Dover Publications, Inc., New York (1957)
- [1-18] S. Ishiyama et al., "High-order aberration control during exposure for leading-edge lithography projection optics," *Proc. of SPIE* Vol. 9780 (2016) [doi: 10.1117/12.2218840]
- [1-19] Nittoh Kogaku K.K., *Through the Lens We Capture the Future*, http://www.eliteoptics100.com/content/images/Nittoh%20Introduction_FINAL.pdf (final access: May 12, 2017)

2. 奇数次非球面の Zernike 展開の収束性と微分の完全性

2.1. はじめに

本章で示す研究において、奇数次非球面の正確な Zernike 展開公式を、われわれが知る限り初めて理論的に導出した。類似の公式は偶数次単項式に対しては文献[2-1]で求められていたが、本研究ではさらに踏み込んで一般次数（奇数次・偶数次を含み、正の実数冪）の単項式の展開式を求めた。偶数次単項式を Zernike 展開すると、回転対称な Zernike 多項式は偶数次多項式であることから明らかに有限個の項のみ現れる。一方、一般次数の非球面では無限個の項が現れる。その結果、収束性や微分可能性といった問題が生じる。

本章では、一般次数非球面の Zernike 展開公式を吟味したうえで、その収束性を示すことにより、奇数次非球面の偶数次非球面近似が可能であることを初めて明確に示した。さらに、Zernike 多項式の微分公式により、1 次非球面（これはそもそも原点で微分不可能である）の原点近傍を除き、奇数次非球面の Zernike 展開は微分の近似になっていることも示すことができた。すなわち、奇数次非球面は有限個の偶数次多項式で表現可能であることを示した。また、この結果の妥当性を示すため、Schmidt Surface を用いた Schmidt Camera の設計を検討した。

2.2. 回転対称な Zernike 多項式の完全性

まず Zernike 多項式の完全性(completeness)の定義を明確にする。領域 C 上で定義された関数の集合 $\{\varphi_k\}_{k=0}^{\infty}$ が完全系(または単に完全)であるとは、 C 上の任意の関数 f が φ_k の一次結合で表されることである[2-2]。

$$f = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \varphi_k \quad (2-1)$$

右辺の和は無限級数なので、収束性を明確にする必要がある。収束性としては、最小二乗近似に相当する L_2 ノルム、あるいは一様収束ノルム⁵が一般的に用いられる。例えば、(2-1)の収束が L_2 ノルムの意味での収束の場合、以下が成り立つことを意味する。

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_C \left| f - \sum_{k=0}^N a_k \varphi_k \right|^2 dv = 0 \quad (2-2)$$

ここで、 dv は C 上の積分要素である。

⁵ L_2 ノルムは、関数の差の自乗積分を関数の間の「距離」とする。また、一様収束ノルムは関数の差の最大値を「距離」とする。そのノルムでの収束とは、(2-1)において、右辺の項数を増していくにつれ「距離」が 0 に収束することを意味する。

Zernike 多項式の完全性を示すためには、[2-2]に倣い単項式 $x^i y^j$ から直接構成する方法もあるが、直交関数系の定義からの帰結として導く方法もある。ここでは、F.Zernike の方法 [2-3][2-4]に則って、その内容を概説する⁶。

簡単のため、2章以降で主に用いる回転対称な Zernike 多項式の定義を、直交関数系の理論に基づいて説明する。単位円上の積分要素は $dv = r dr d\varphi$ なので、単位円上の内積は次のように定義される。

$$(f, g) = \int_0^1 r dr \int_0^{2\pi} d\varphi f(r, \varphi) g(r, \varphi). \quad (2-3)$$

特に、回転対称な関数を考えると、角度方向の積分 $\int_0^{2\pi} d\varphi$ は定数となるので、動径方向の積分のみ考えればよい。すなわち

$$(f, g) = 2\pi \int_0^1 f(r) g(r) r dr. \quad (2-4)$$

ここで、変数変換 $t = r^2$ を行うと、 $dt = 2r dr$ なので、(2-4)は以下のようにになる。

$$(f, g) = \pi \int_0^1 f(t) g(t) dt. \quad (2-5)$$

さらに一般化した議論をするため、(2-5)を重み関数を $w(t)$ として一般化した内積を考える。

$$(f, g) = \int_0^1 f(t) g(t) w(t) dt. \quad (2-6)$$

関数 $w(t)$ は重み関数と呼ばれる。重み関数 $w(t)$ が特に $w(t) = t^a (1-t)^b$ の形をしているとき、式(2-6)で定義された内積に対する直交関数系は、次の式で与えられる([2-5] p.220)。

$$p_n(t) = \frac{c_n}{w(t)} \frac{d^n}{dt^n} w(t) t^n (1-t)^n. \quad (2-7)$$

ここで、 c_n は正規化定数である。式(2-5)の場合、重み関数は $w(t) = \pi$ なので定数であるが、 $p_n(1) = 1$ になるように正規化することにより⁷、以下の直交関数系を得る。

$$Q_n(t) = \frac{(-1)^n}{n!} \frac{d^n}{dt^n} t^n (1-t)^n. \quad (2-8)$$

この式は t の n 次式であり、Shifted Legendre 多項式とも呼ばれる。実際、最初の5項を計算したものを以下に示す。

⁶ また、この議論を、レーザービームの瞳アポダイゼーションを考慮して一般化した[2-6]でも、基礎的な事項について詳しい。

⁷ この正規化の結果、 $t = 0$ の値は $(-1)^n$ となる。

$$\begin{aligned}
Q_0(t) &= 1, \\
Q_1(t) &= 2t - 1, \\
Q_2(t) &= 6t^2 - 6t + 1, \\
Q_3(t) &= 20t^3 - 30t^2 + 12t - 1, \\
Q_4(t) &= 70t^4 - 140t^3 + 90t^2 - 20t + 1, \\
Q_5(t) &= 252t^5 - 630t^4 + 560t^3 - 210t^2 + 30t - 1.
\end{aligned}
\tag{2-9}$$

これらの関数は、変数変換 $t = r^2$ を用いたので、 $Q_n(t)$ は r の $2n$ 次式であるが、それぞれ回転対称な Zernike 多項式に対応する。具体的には、Fringe Zernike 多項式の $Z_0, Z_4, Z_9, Z_{16}, Z_{25}, Z_{36}$ に対応している([2-7][2-8])。これらの関数形状を Fig. 2-1 に示す。

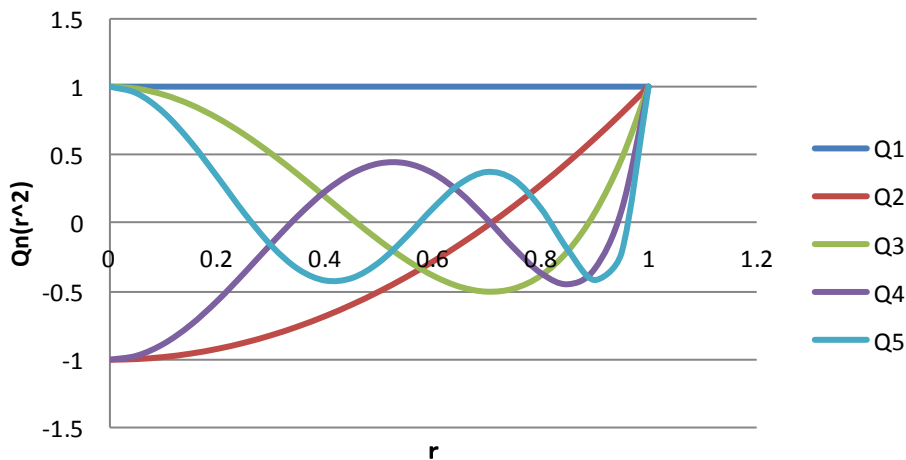


Fig. 2-1 Rotationally Symmetrical Zernike Polynomials

(2-8)で定義される関数系が区間 $[0,1]$ における完全系をなすことは、以下のようにして示すことができる⁸。

Weierstrass の多項式近似定理より、 $[0,1]$ における任意の連続関数 $f(t)$ は、ある多項式 $P(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \dots + a_nt^n$ により、区間 $[0,1]$ において一様近似することができる。すなわち、どのような小さな正の数 ε をとっても、多項式 $P(t)$ を適当にとれば、区間 $[0,1]$ 上の

⁸ なお、[2-3]のように Zernike 多項式を自己随伴微分方程式の固有関数として定義する場合、完全性は明白であるが、ここではより直感的に説明する。

どの t であっても、次の不等式が成り立つ。

$$|f(t) - P(t)| < \varepsilon. \quad (2-10)$$

ここで、 $P(t)$ は n 次多項式なので、shifted Legendre polynomial $Q_n(t)$ の一次結合で表される。

$$P(t) = \sum_{k=0}^n c_k Q_k(t). \quad (2-11)$$

すなわち、(2-10)を書き直すと、以下の不等式が成り立つ。

$$\left| f(t) - \sum_{k=0}^n c_k Q_k(t) \right| < \varepsilon. \quad (2-12)$$

ここで、変数変換 $t = r^2$ を逆に $r = \sqrt{t}$ と考えると、 $t \geq 0$ なので、この変数変換は連続である。そこで $f(t) = F(\sqrt{t})$ を考えても、近似可能性については等価である。つまり、以下の不等式が成り立つ。

$$\left| F(r) - \sum_{k=0}^n c_k Q_k(r^2) \right| < \varepsilon. \quad (2-13)$$

ここで、変数 t によって定義された shifted Legendre polynomial は動径関数 r の関数と考えると回転対称な Zernike 多項式に対応する ([2-2])。そして、これらは変数 t の多項式なので、 r の偶数次多項式である。

以上の議論より、 r の任意の連続関数が回転対称な Zernike 多項式、ないし偶数次多項式で近似できることが示された。

これを奇数次非球面に当てはめて考えるため、例として 3 次非球面 $F(r) = r^3$ を取り上げる。変数変換 $t = r^2$ により、 $F(r)$ は $f(t) = t^{3/2}$ と書きなおされる。ところが、 $f(t)$ は $[0,1]$ における連続関数なので、(2-12)の議論より $f(t)$ を一様近似する有限個の Zernike 多項式 (shifted Legendre polynomial) の一次結合が存在するはずである。さらに、変数変換 $t = r^2$ の関係により、3 次非球面は有限個の項数からなる Zernike 多項式の一次結合によって、任意の精度で近似できることが分かる。

ここで、次のような課題がある。第一の課題は、奇数次非球面が具体的にどのような偶数次多項式で表されるかということ。もう一つは、Weierstrass の近似定理はあくまで元の関数からの差の絶対値を考えているだけなので、微分の近似が成立するかどうかである。というのも、光線追跡では、面形状だけでなく傾きも非常に重要だからである。

そこで、2.3 節及び 2.4 節では、第一の課題にこたえるべく、奇数次非球面について具体的な Zernike 展開公式を導き、その近似精度について議論する。さらに、2.5 節では、第二の課題への解として、その近似関数が、微分の近似も同時に与えるということを示す。

2.3. 奇数次非球面に対する Zernike 展開公式の導出

本節では奇数次非球面の Zernike 展開公式を導出するとともに、その一様収束性を導く。(微分近似可能性については、2.5 節で論じる) Zernike 多項式の直交関係は以下の式で与えられる。

$$\int_0^1 Q_n(t)Q_m(t)dt = \frac{1}{2n+1}\delta_{m,n}, \quad (2-14)$$

ここで、 $\delta_{m,n}$ は Kronecker のデルタである。

関数系 $\{Q_n\}$ は区間 $[0,1]$ において上記の内積の下で L2 完全系をなすので、任意の連続関数 $f(t)$ はこの関数系で展開可能である。直交関係(2-14)より、

$$f(t) = a_0Q_0(t) + a_1Q_1(t) + a_2Q_2(t) + \dots, \quad (2-15)$$

と展開した場合の展開係数 a_n は次で与えられる。

$$a_n = (2n+1) \int_0^1 f(t)Q_n(t)dt. \quad (2-16)$$

ここで、奇数次非球面を構成する単項式 r^{2k-1} を考える。この式は、変数変換 $t = r^2$ により、 $r^{2k-1} = t^{(2k-1)/2}$ のように、変数 t の半整数乗となる。さらに、これを一般化した次の式を考える。

$$f(t) = t^\alpha, \quad (2-17)$$

ここで、 α は正の実数であるとする。前述のように、 $2k-1$ 次の奇数次非球面の場合、半整数 $\alpha = (2k-1)/2$ となる。また、 $2k$ 次の偶数次非球面の場合は整数 $\alpha = k$ となる(両者とも k は整数)。この Zernike 展開は、Zernike 多項式の定義(2-8)を(2-16)に代入し、部分積分を繰り返すことにより、次のように計算することができる。

$$\begin{aligned} a_n &= (2n+1) \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^1 t^\alpha \frac{d^n}{dt^n} t^n (1-t)^n dt \\ &= \frac{2n+1}{n!} \alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1) \int_0^1 t^{\alpha-n} t^n (1-t)^n dt \\ &= \frac{2n+1}{n!} \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-n+1)} B(\alpha+1, n+1) \\ &= (2n+1) \frac{\Gamma(\alpha+1)^2}{\Gamma(\alpha-n+1)\Gamma(\alpha+n+2)}. \end{aligned} \quad (2-18)$$

ここで、ベータ関数の定義

$$B(p+1, q+1) = \int_0^1 t^p (1-t)^q, \quad (2-19)$$

と、ベータ関数とガンマ関数の関係式

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}, \quad (2-20)$$

を用いた([2-9])。

以上の結果を要約すると、一般次数の非球面に対して、以下の展開公式が成り立つ。

$$t^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} a_n Q_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)\Gamma(\alpha+1)^2}{\Gamma(\alpha+n+2)\Gamma(\alpha-n+1)} Q_n(t). \quad (2-21)$$

ここで偶数次単項式 $r^{2k}=t^k$ の場合を考察する。この場合、(2-21)の第二行において、 $(\alpha-n+1)$ が含まれるので、 $n \geq k+1$ の場合、すべて $a_n = 0$ となる。すなわち、偶数次単項式は $2n$ 次までの有限個の Zernike 多項式の線形結合で表現できるという当然の帰結を得る。

一方、 α が自然数でない場合（つまり、偶数次単項式以外の場合）は、(2-21)の第二行はいかなる n に対しても0にならない。つまり、一般次数の場合、Zernike 展開は無限個の Zernike 多項式の線形結合になり、それゆえ収束の問題及び微分の近似性の問題が生じることになる。すなわち、(2-21)のような無限個の項からなる関数項級数は、仮にそれぞれの点で収束するとしても、関数として収束するとは限らない。また、関数としての収束は、各点収束、一様収束、 L^2 収束、 L^n 収束等様々な収束性の強さが存在するが、一様収束である事を確認したい。さらに、関数としての収束性には、導関数の性質は全く関与しないので、関数項級数が収束するからと言っても、級数の項別微分ができるとも限らない。微分が収束するとは限らない。

ここで、一般次の非球面について(2-21)が一様収束することを示す。ただし、 $\alpha \geq 1/2$ の一般次数の非球面を想定する⁹。

ガンマ関数について、Euler の反射公式 $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\sin \pi z}{\pi}$ が知られている([2-9])。これを用いると、(2-20)右辺の分母第1項について

$$\Gamma(\alpha-n+1) = \frac{\sin \pi(n-\alpha)}{\pi} \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}, \quad (2-22)$$

が得られる。また、ガンマ関数の定義 $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ ¹⁰を用いると

⁹奇数次単項式は $r^{(2k-1)}=t^{(2k-1)/2}$ となり、 $\alpha = (2k-1)/2$ 、すなわち半整数の場合に相当する。さらに、最低次の奇数次非球面は1次非球面であることから、 α の最小値は1/2である。

¹⁰ ガンマ関数は、この定義を複素平面全体に解析接続した関数である。

$$\Gamma(\alpha + n + 2) = (\alpha + n + 1)(\alpha + n)\Gamma(n + \alpha), \quad (2-23)$$

が得られる。したがって、(2-20)右辺分母は次のように変形できる。

$$\begin{aligned} & \Gamma(\alpha + n + 2)\Gamma(\alpha - n + 1) \\ &= \frac{\sin \pi(n - \alpha)}{\pi} \\ & \times (\alpha + n + 1)(\alpha + n) \frac{\Gamma(n + \alpha)}{\Gamma(n - \alpha)}, \end{aligned} \quad (2-24)$$

ここで、最初の仮定 $\alpha \geq 1/2$ より、不等式 $n + \alpha > n + \alpha - 1 \geq n - \alpha$ が成り立つ。また、ガンマ関数は単調増加なので次の不等式が成り立つ。

$$\begin{aligned} \Gamma(n + \alpha) &= (n + \alpha - 1)\Gamma(n + \alpha - 1) \\ &> (n + \alpha - 1)\Gamma(n - \alpha), \end{aligned} \quad (2-25)$$

それゆえ、(2-24)について、以下のような不等式が成り立つ。

$$\begin{aligned} & |\Gamma(\alpha + n + 2)\Gamma(\alpha - n + 1)| \\ & > \left| \frac{\sin \pi(n - \alpha)}{\pi} \right| \\ & \times (\alpha + n + 1)(\alpha + n)(n + \alpha - 1). \end{aligned} \quad (2-26)$$

ここで、(2-18)に戻って、 a_n を評価すると、以下のような不等式が成り立つ。

$$\begin{aligned} |a_n| &= \left| \frac{(2n + 1)\Gamma(\alpha + 1)^2}{\Gamma(\alpha + n + 2)\Gamma(\alpha - n + 1)} \right| \\ &< M \frac{(2n + 1)}{(\alpha + n + 1)(\alpha + n)(n + \alpha - 1)}. \end{aligned} \quad (2-27)$$

ここで、 $M = \left| \frac{\sin \pi(n - \alpha)}{\pi} \right|$ とおいたが、これはどんな n と α についても 1 以下の有限な値をとる。右辺の分子分母の n の次数を考えると、 $|a_n|$ は少なくとも n^{-2} より早く収束することが分かる。

さらに、(2-15)まで戻って考えると、Zernike 多項式は $|Q_n(t)| \leq 1$ なので、

$$\begin{aligned} |f(t)| &= |a_0 Q_0(t) + a_1 Q_1(t) + a_2 Q_2(t) + \dots| \\ &\leq |a_0| + |a_1| + |a_2| + \dots, \end{aligned} \quad (2-28)$$

$|a_n|$ は n が十分大きいとき、 n^{-2} より早く収束することから、右辺の級数は収束する。したがって、奇数次非球面に対して、(2-15)は一様収束¹¹の意味で等号が成立することが示され

¹¹ 関数項級数の一様収束とは、その定義域すべての点で、級数が同じ速度で収束することを意味する。一方、L2 収束は自乗平均の収束なので、点毎の収束性は要求していない。すなわち、一様収束は L2 収束より強い収束条件である。

た。

以上の結果をまとめると、任意次数（当然偶数次非球面も奇数次非球面も含まれる）の非球面単項式 $f(t) = t^\alpha = r^{2\alpha}$ について、Zernike 展開公式(2-18)を導出した。また、この係数の収束性を評価することにより、Zernike 展開は一様収束することが示された。

2.4. 奇数次非球面に対する Zernike 展開の収束性（収束の速さ）

特に奇数次非球面の場合、ガンマ関数の公式を用いることにより係数 a_n の収束性について(2-27)より詳しい評価が可能である。もし、 $n \geq k$ であれば、半整数について成り立つガンマ関数の公式[2-9]

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + m\right) = \frac{(2m)!}{4^m m!} \sqrt{\pi}, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2} - m\right) = \frac{(-4)^m m!}{(2m)!} \sqrt{\pi} \quad (2-29)$$

を(2-18)に代入することにより、係数 a_n の具体的な式を次のように得る。

$$\begin{aligned} a_n &= 4^{n+k+1} \frac{(n+k+1)!}{\{2(n+k+1)\}!} \frac{\{2(n-k)\}!}{(-4)^{n-k} (n-k)!} (2n+1) \left(\frac{(2k)!}{4^k k!}\right)^2 \\ &= (-1)^{n-k} 4^{2k+1} \frac{(n+k+1) \cdots (n-k+1)}{(2n+2k+2) \cdots (2n-2k+1)} (2n+1) \left(\frac{(2k)!}{4^k k!}\right)^2 \end{aligned} \quad (2-30)$$

この式は、分子に $2k+1$ 個の、分母に $4k+1$ 個の n を含んでいる。したがって、 $|a_n|$ は n^{-2k} のオーダーで 0 に収束することが分かる。

たとえば、3 次非球面の単項式 $f(t) = t^{3/2}$ については、具体的な式は

$$\begin{aligned} a_n &= (-1)^n (2n+1) \frac{9}{16} \\ &\quad \times \frac{2^{10} (n+3)(n+2)(n+1)n(n-1)}{(2n+6)(2n+5)(2n+4)(2n+3)(2n+2)(2n+1)2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)} \end{aligned} \quad (2-31)$$

であり、分子分母の n の個数を数えることで n^{-4} のオーダーで収束することが示される。

さらに、最も次数の低い 1 次非球面 $f(t) = t^{1/2}$ については、

$$\begin{aligned} a_n &= (-1)^{n-1} (2n+1) \\ &\quad \times \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{(2n+4)(2n+3)(2n+2)(2n+1)2n(2n-1)} \end{aligned} \quad (2-32)$$

となり、同様に n^{-2} のオーダーで収束することが示される。これは 2.3 での議論のうち、最も次数が低い場合に他ならない。このように、奇数次非球面に対して具体的に Zernike 展開公式を求めることが可能になったうえ、その結果を用いて収束性の評価も可能になった。

同様の議論により奇数次非球面の Zernike 展開は一様収束し、各係数も奇数次の次数に応じて、高次であればあるほど速く収束することが示される。さらに、一様収束という強

い収束条件から、微分の近似も成り立つのではないかという予想ができるが、これを次節で Zernike の微分公式によって証明する。

2.5. 奇数次非球面の Zernike 展開の微分の近似可能性

2.4 節では、奇数次非球面を構成する単項式の Zernike 展開(2-15)が絶対収束することを示した。また、3 次及び 1 次の場合において、具体的な展開公式(2-31)、(2-32)を導出し、収束スピードを具体的に求めた。

以上の議論により奇数次の Zernike 展開が元の形状を近似することが示された。一方、光学設計においては、面の傾きも重要である。というのも、光線追跡には、面法線ベクトルの情報が必要であり、法線ベクトルは接線ベクトル（面の傾き、微分）を計算することと同じだからである。それゆえ、Zernike 展開が形状だけでなく、傾きをも近似することが望ましい。本節では、微分の近似が実際に成り立つことを、[2-11]に示された Zernike の微分公式を用いて証明する。

2.5.1. Zernike 多項式の微分公式

文献[2-11]には Zernike の微分公式が非回転対称な場合も含めて、一般的な公式として網羅されている。ここでは、より簡単な回転対称な Zernike 多項式について、より簡単な方法により改めて微分公式を導出する。回転対称な Zernike 多項式 $Q_n(t)$ は t の n 次多項式なので、これを t で微分すれば $n-1$ 次多項式となる。したがって、次の式が成り立つ。

$$Q'_n(t) = c_0 Q_0(t) + c_1 Q_1(t) + \cdots + c_{n-1} Q_{n-1}(t). \quad (2-33)$$

ここで、各係数 c_k は、(2-16)と同様に、 $Q'_n(t)$ と $Q_k(t)$ の内積をとることで計算できる。部分積分により次を得る。

$$\begin{aligned} c_m &= (2m+1) \int_0^1 Q'_n(t) Q_m(t) dt \\ &= (2m+1) [Q_n(t) Q_m(t)]_0^1 \\ &\quad - (2m+1) \int_0^1 Q_n(t) Q'_m(t) dt. \end{aligned} \quad (2-34)$$

ここで、 $Q'_m(t)$ の次数は n より小さいので、積分第二項は 0 になる。また、 $Q_n(0) = (-1)^n$ かつ $Q_n(1) = 1$ なので、結局以下を得る。

$$c_m = \begin{cases} (2m+1) \{ (-1)^{n+m} - 1 \} & (m < n) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases} \quad (2-35)$$

最初の 5 項を具体的に計算したものを次に示す。

$$\begin{aligned}
Q'_0 &= 0 \\
Q'_1 &= 2Q_0 \\
Q'_2 &= 6Q_1 \\
Q'_3 &= 2Q_0 + 10Q_2 \\
Q'_4 &= 6Q_1 + 14Q_3 \\
Q'_5 &= 2Q_0 + 10Q_2 + 18Q_4
\end{aligned} \tag{2-36}$$

このように、Zernike 多項式の微分は、偶数次の場合、自分より次数の低い奇数次多項式の和で、奇数次の場合、偶数次の和で表現されることが分かった。

2.5.2. (準備) 一般次非球面の Zernike 展開係数について成り立つ関係

まず準備として、Zernike 展開係数に関して成り立つ関係式を示す。関数 $f(t) = t^\alpha$ について、 $f(0) = 0$ と $f(1) = 1$ が成り立つ。また、Zernike 多項式 $Q_n(t)$ について、 $Q_n(0) = (-1)^n, Q_n(1) = 1$ である。これらに関数 $f(t)$ の Zernike 展開(2-15)に代入することにより、以下の関係式を得る。

$$f(0) = a_0 - a_1 + a_2 - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = 0, \tag{2-37}$$

$$f(1) = a_0 + a_1 + a_2 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1.$$

これらを辺々足し引きすることにより、結局以下の関係式を得る。

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{2k} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{2k-1} = \frac{1}{2} \tag{2-38}$$

2.5.3. 奇数次非球面の微分の近似についての証明

ここでは、第二章の第 2 番目の主要な結果である、奇数次非球面の Zernike 展開の微分の近似可能性について示す。近似を証明するには、Zernike 展開における項別微分が、元の

関数の微分の Zernike 展開と一致することが成り立つことを示せばよい。

一般次非球面の Zernike 展開 $f(t) = t^\alpha = \sum a_n Q_n(t)$ について、2.3 で述べたように、右辺は無有限個の項を含む。従って、 $f'(t) = ? \sum a_n Q_n'(t)$ について、等号“=”は必ずしも成り立たない¹²。

この等号“=”が成り立つための条件について吟味する。微分の Zernike 展開が次の式で表されるとする。

$$f'(t) = b_0 Q_0(t) + b_1 Q_1(t) + b_2 Q_2(t) + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} b_k Q_k(t). \quad (2-39)$$

等号“=”が成り立つためには Zernike 展開の項別微分が元の関数の微分となっていることを示せば十分である。しかし、これを直接計算することはできないが、次の 2 条件を証明すれば、Zernike 展開が微分の近似にもなっていると言える。

(条件 1) 式(2-39)の右辺は $f'(t)$ に収束する。

(条件 2) 式(2-15)の項別微分が式(2-39)の右辺と一致する。

条件 1 の意味するところは、導関数の Zernike 展開の収束性である。これは奇数次非球面の Zernike 展開の収束性により、ほぼ明らかである。すなわち、一般次の非球面 $f(t) = t^\alpha$ について、 $f'(t) = \alpha t^{\alpha-1}$ なので、 $\alpha \geq 1$ の場合、 $f'(t)$ は有界な（有限の値をとる）連続関数である。これは、偶数次または奇数次非球面の次数が 2 次以上であれば満たされる条件である。また、ここから見て取れるように、1 次非球面は例外である。

次に条件 2 について示す。(2-15)を収束性は問わず、形式的に項別微分すると、Zernike の微分公式(2-35)により、次を得る。

$$\begin{aligned} (a_0 Q_0(t) + a_1 Q_1(t) + a_2 Q_2(t) + \dots)' &= 2(a_1 + a_3 + a_5 + \dots) Q_0 \\ &\quad + 6(a_2 + a_4 + a_6 + \dots) Q_1 \\ &\quad + 10(a_3 + a_5 + a_7 + \dots) Q_2 \\ &\quad + 14(a_4 + a_6 + a_8 + \dots) Q_3 \\ &\quad + 18(a_5 + a_7 + a_9 + \dots) Q_4 \\ &\quad \dots \end{aligned} \quad (2-40)$$

ここで、(2-39)の係数 b_m を具体的に計算する。部分積分より

¹² 数学的に述べれば、 $f(t) = \sum a_n Q_n(t)$ の右辺そのものが収束するにもかかわらず、右辺を微分したものが収束するとは限らない。また、仮に収束したとしても、左辺の微分と一致するとも限らない

$$\begin{aligned}
b_m &= (2m+1) \int_0^1 f'(t) Q_m(t) dt \\
&= (2m+1) \left[f(t) Q_m(t) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(t) Q_m'(t) dt \right] \\
&= (2m+1) \left[1 - \int_0^1 f(t) Q_m'(t) dt \right],
\end{aligned} \tag{2-41}$$

これは、 $Q_m'(t)$ が m の偶奇により変わることに、 b_m 自体も m の偶奇で変わってくる。特に、 m が偶数の場合を取り上げて吟味する。

Zernike の微分公式(2-35)より、

$$\begin{aligned}
b_{2n} &= (4n+1) \left[1 - \int_0^1 f(t) Q_{2n}'(t) dt \right] \\
&= (4n+1) \left[1 - 2 \int_0^1 f(t) \sum_{k=1}^n (4k-1) Q_{2k-1}(t) dt \right],
\end{aligned} \tag{2-42}$$

ここで、最後の項について以下が成り立つ。

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 f(t) (4k-1) Q_{2k-1}(t) dt \\
&= \{2(2k-1) + 1\} \int_0^1 f(t) Q_{2k-1}(t) dt = a_{2k-1}.
\end{aligned} \tag{2-43}$$

したがって、(2-42)の b_{2n} は a_k を用いて、次のように表現が可能である。

$$\begin{aligned}
b_{2n} &= (4n+1) \left[1 - 2 \sum_{k=1}^n a_{2k-1} \right] \\
&= 2(4n+1) \sum_{k=n+1}^{\infty} a_{2k-1}.
\end{aligned} \tag{2-44}$$

後半の等号は(2-38)による。また、奇数の場合 b_{2n+1} も同様に計算し、以下を得る。

$$b_{2n+1} = 2(4n+3) \sum_{k=n+1}^{\infty} a_{2k}. \tag{2-45}$$

Zernike 多項式の微分の展開係数 b_n について、最初の 5 項は具体的に書き表し、2.5.2 節の結果を用いて変形する。展開係数 a_n と b_n の間には以下の関係が成り立つことが分かる。

$$\begin{aligned}
b_0 &= 1 = 2(a_1 + a_3 + a_5 + \dots) \\
b_1 &= 6\left(\frac{1}{2} - a_0\right) = 6(a_2 + a_4 + a_6 + \dots) \\
b_2 &= 10\left(\frac{1}{2} - a_1\right) = 10(a_3 + a_5 + a_7 + \dots) \\
b_3 &= 14\left(\frac{1}{2} - a_0 - a_2\right) = 14(a_4 + a_6 + a_8 + \dots) \\
b_4 &= 18\left(\frac{1}{2} - a_1 - a_3\right) = 18(a_5 + a_7 + a_9 + \dots) \\
b_5 &= 22\left(\frac{1}{2} - a_0 - a_2 - a_4\right) = 22(a_6 + a_8 + a_{10} + \dots)
\end{aligned} \tag{2-46}$$

これは、(2-40)に他ならない。したがって、条件 2 が成立することが証明された。

2.5.4. 3 次非球面の場合の具体例

本節では、具体例として 3 次非球面の場合を取り上げる。まず、3 次非球面 $f(t) = t^{3/2} = r^3$ の場合について、Zernike 展開とその微分公式を計算する。(2-31)を 10 次まで (t の 5 次まで) 具体的に計算することにより、以下の近似式を得る。

$$t^{\frac{3}{2}} \cong \frac{2}{5}Q_0(t) + \frac{18}{35}Q_1(t) + \frac{2}{21}Q_2(t) - \frac{2}{165}Q_3(t) + \frac{18}{5005}Q_4(t) - \frac{2}{1365}Q_5(t) \tag{2-47}$$

この和は有限和なので、各 Zernike 多項式を t の多項式で書き表し、並べ替えることにより、3 次非球面の偶数次近似を得る¹³。

$$t^{\frac{3}{2}} \cong \frac{4}{2145} + \frac{28}{143}t + \frac{224}{143}t^2 - \frac{224}{143}t^3 + \frac{168}{143}t^4 - \frac{24}{65}t^5 \tag{2-48}$$

この近似式と元の 3 次非球面との比較を Fig. 2-2 に示す。

¹³ 参考文献[2-13][2-14]でも指摘されている通り、無限個の項を含む Zernike 展開を並べ替えて通常多項式の形にしようとする係数は発散してしまう。ここでの議論はあくまで有限個の Zernike 多項式を考えているので、収束性の問題は生じない。

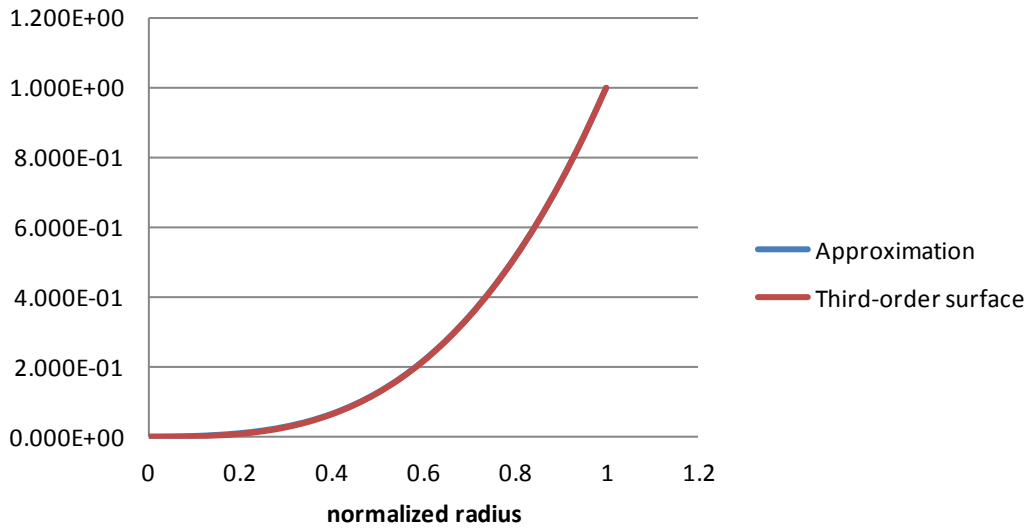


Fig. 2-2 Zernike Approximation for the third-order surface

さらに、(2-48)の近似誤差を Fig. 2-3 に示す。

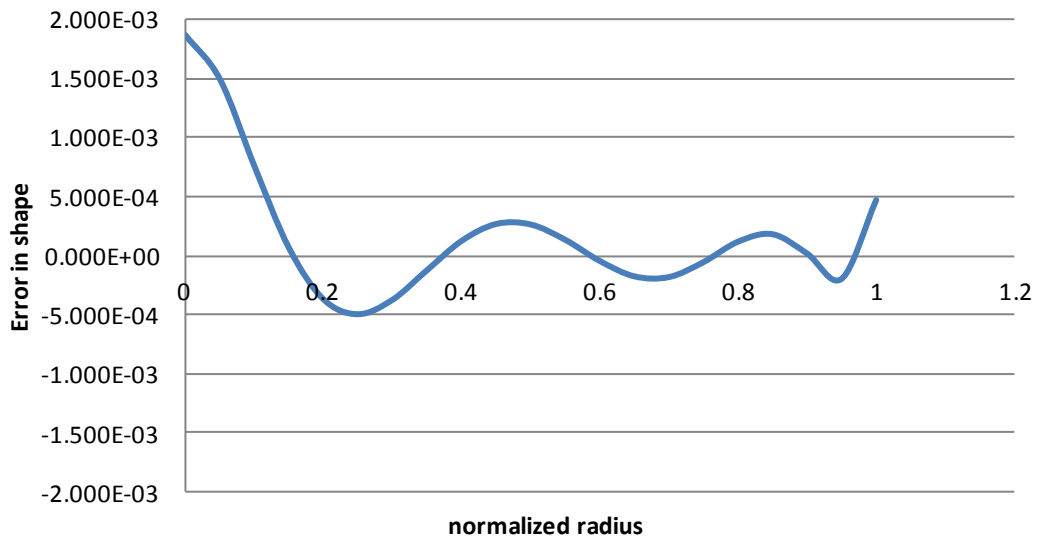


Fig. 2-3 Surface form error for approximation Eq. (2-48)

さらに、微分の近似精度について検討を行う。(2-45)に上記の係数を代入することにより、以下を得る：

$$\frac{d}{dt}(t^{3/2}) \cong Q_0(t) + \frac{3}{5}Q_1(t) - \frac{1}{7}Q_2(t) + \frac{1}{15}Q_3(t) - \frac{3}{77}Q_4(t) \quad (2-49)$$

これを Fig. 2-4 に示す。

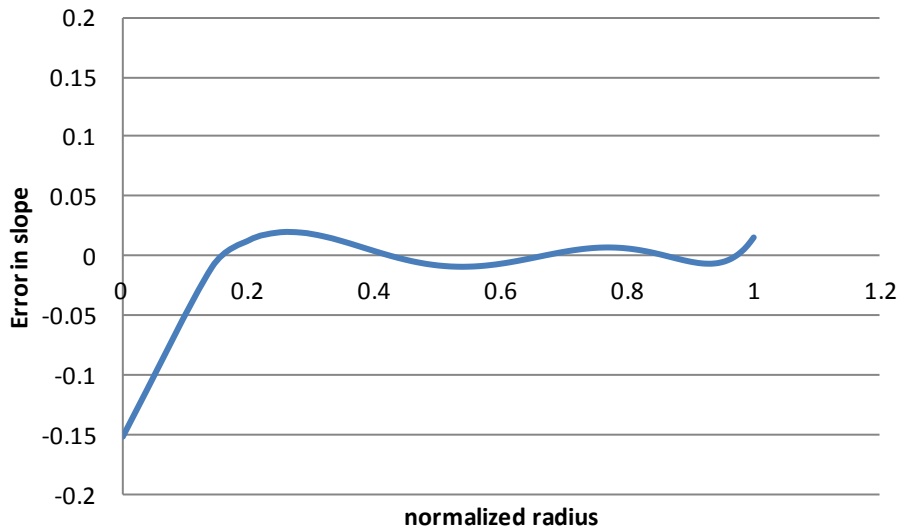


Fig. 2-4 Surface slope error for approximation for Eq. (2-48)

形状と傾きについては、絶対的な大きさを直接比較することはできないが、Fig. 2-4 から、傾き誤差は形状誤差より 10 倍程度悪くなっていることが見て取れる。

最後に、Zernike 多項式の次数と、形状、傾きの近似誤差について議論する。Fig. 2-3、Fig. 2-4 より、双方とも最大誤差は $t = 0$ の値である。一方、 $f(t) = t^{3/2}$ は、 $t = 0$ でその値も導関数もゼロとなるので、形状誤差は $\sum_{k=0}^n (-1)^k a_k$ によって、傾きの誤差は $\sum_{k=0}^n (-1)^k b_k$ によって評価することができる。Fig. 2-5 にその関係を示す。

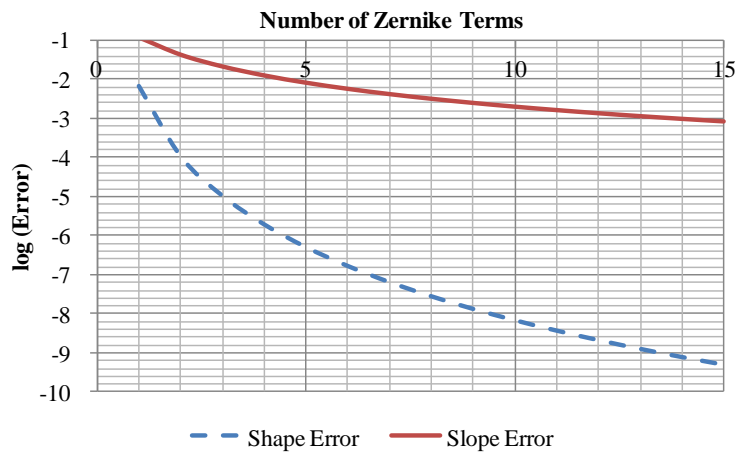


Fig. 2-5 Figure and slope error vs. the number of Zernike terms

2.5.5. 1 次非球面に関する考察（微分の近似が成り立たない例）

2.5 節を通じて、奇数次非球面の傾きを含めた偶数次近似可能性について証明し、実例について議論を行った。ここでは、傾きの近似が成り立たない例として、一次非球面を取り上

げる。

一次非球面の展開公式は(2-32)によれば以下の式で与えられる。

$$t^{1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} (2n+1) \times \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{(2n+4)(2n+3)(2n+2)(2n+1)2n(2n-1)} Q_n(t) \quad (2-50)$$

これを n=5 まで取ることにより以下の式を得る。

$$t^{1/2} \cong \frac{2}{3} Q_0(t) + \frac{2}{5} Q_1(t) - \frac{2}{21} Q_2(t) + \frac{2}{45} Q_3(t) - \frac{2}{77} Q_4(t) + \frac{2}{117} Q_5(t) \quad (2-51)$$

これを用いた 1 次非球面の Zernike 展開近似と、元の形状とを比較した結果を Fig. 2-6 に示す。

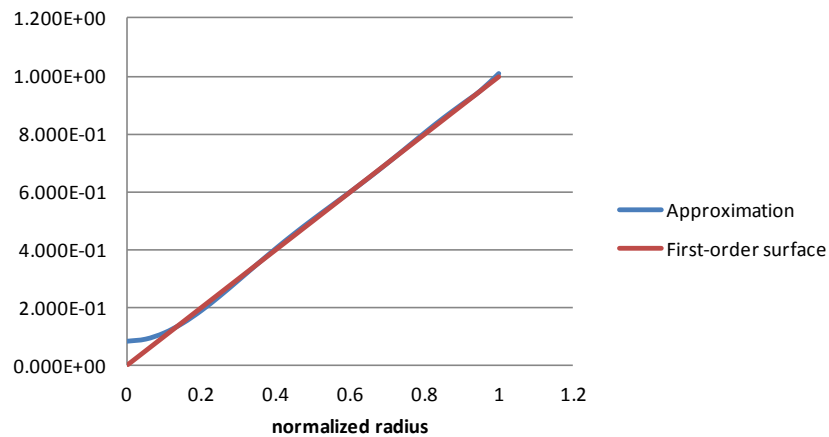


Fig. 2-6 Zernike Approximation for the first-order surface

形状の近似誤差を Fig. 2-7 に示す。

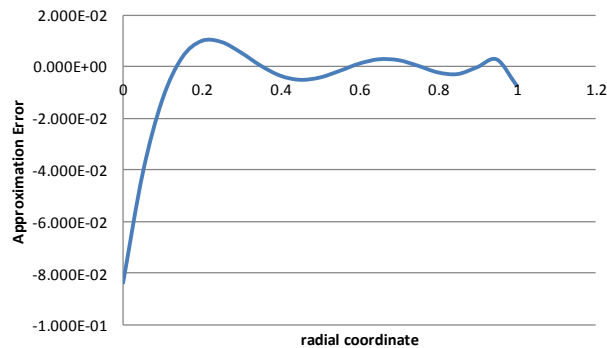


Fig. 2-7 Surface slope error for approximation for Eq. (2-51)

3次非球面とは異なり、1次非球面の Zernike 展開は原点における誤差が非常に大きくなっているうえ、傾きの近似が成り立たない。

2.5.6. 微分の完全性についての補足

2.5.3 節で証明した微分可能性は、変数 t に関するものであり、通常座標系 (x, y) に関するものではない。本節では、この点について補足する。奇数次非球面 $z = r^{2k-1}$ を、2.3 節で定義した変数 $t = r^2$ を用いて書き直すと、 $z = r^{2k-1} = t^{(2k-1)/2}$ となる。Zernike 展開公式より、 a_k を(2-17)で導出した Zernike 係数として、以下の展開式を得る。

$$r^{2k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k Q_k(r^2) \quad (2-52)$$

この式は、動径座標 r の奇数次が、右辺のように r の偶数次多項式で表現できることを表している。ここで、項別微分可能性、すなわち r に対する微分についても等号が成り立つことを示す。まず、右辺の r に対する微分を以下のように変形する

$$\frac{d}{dr} \sum_{k=0}^{\infty} a_k Q_k(r^2) = \frac{dt}{dr} \frac{d}{dt} \sum_{k=0}^{\infty} a_k Q_k(r^2) = 2r \frac{d}{dt} \sum_{k=0}^{\infty} a_k Q_k(t) \quad (2-53)$$

さらに、最も右の項は、2.5.3 節で証明した Zernike 展開の項別微分可能性から以下のように変形できる。

$$2r \frac{d}{dt} \sum_{k=0}^{\infty} a_k Q_k(t) = 2r \left(t^{\frac{2k-1}{2}} \right)' = 2r \frac{2k-1}{2} t^{\frac{2k-3}{2}} = (2k-1)r^{2k-2} \quad (2-54)$$

したがって、これは(2-52)の左辺を微分したもの、 $(r^{2k-1})' = (2k-1)r^{2k-2}$ と一致する。すなわち、 r に対する微分についても等号が成り立つことが示された。

2.6. F. Zernike による Zernike 多項式の定義との関係

2章全体を通じて、内積に関して、多項式系を直交化した関数として Zernike 多項式を導入した。この定義方法は[2-2]に則った方法である。しかし、元来の Zernike 多項式は、多少異なった方法で定義されている。ここでは、2章で用いた定義方法と、F. Zernike が[2-3]で導入した方法との関連を要約する。

F. Zernike は[2-3]において座標系の回転不変な以下のような2階偏微分方程式を考えた。

$$\left\{ \Delta + \alpha \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right)^2 + \beta \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right) + \gamma \right\} V = 0 \quad (2-55)$$

ここで、 α と β はそれぞれ正規化と自己随伴性から定まる定数であり $\alpha = -1$, $\beta = -2$ である。また Δ はラプラシアンである。方程式(2-55)を極座標 (r, φ) で考える。まず、Laplacian は極座標では以下のようなになる。

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \quad (2-56)$$

また、演算子 $\left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right)$ は極座標では以下のようなになる。

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r} \frac{\partial}{\partial y} = \cos \varphi \frac{\partial}{\partial x} + \sin \varphi \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{r} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad (2-57)$$

したがって

$$\left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right) = r \frac{\partial}{\partial r}. \quad (2-58)$$

ここで、(2-55)を変数分離によって解く。すなわち、 $V(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$ とおくと、

$$\frac{\Phi}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right) R + \frac{R}{r^2} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + \alpha \Phi \left(r \frac{d}{dr} \right)^2 R + \beta \Phi \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \gamma R \Phi = 0 \quad (2-59)$$

さらに、これを両辺を $V(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$ で割る。

$$\frac{1}{rR} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right) R + \frac{1}{r^2 \Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + \frac{\alpha}{R} \left(r \frac{d}{dr} \right)^2 R + \frac{\beta}{R} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \gamma = 0 \quad (2-60)$$

左辺を r の関数、右辺を φ の関数で整理する。

$$\frac{r^2}{R} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right) R + \frac{\alpha r^2}{R} \left(r \frac{d}{dr} \right)^2 R + \frac{\beta r^2}{R} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \gamma = -\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} \quad (2-61)$$

変数分離ができたので、両辺とも定数である必要があり、これを m^2 とおく。このことにより、位相成分について以下の方程式が成り立ち、これを解くと $\Phi = e^{\pm im\varphi}$ を得る。したがって、 r の関数 $R(r)$ について以下の方程式を得る。

$$\frac{r^2}{R} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right) R + \frac{\alpha r^2}{R} \left(r \frac{d}{dr} \right)^2 R + \frac{\beta r^2}{R} \left(r \frac{dR}{dr} \right) + \gamma = -m^2 \quad (2-62)$$

変数変換 $t = r^2$ によって、(2-62)は次の方程式に変換される。

$$4t(1+at)\frac{d^2R}{dt^2} + (4+4at+2\beta t)\frac{dR}{dt} + \left(\gamma - \frac{m^2}{t}\right)R = 0 \quad (2-63)$$

ここで、 $t = 0, 1$ で確定特異点¹⁴であるためには、 $\alpha = -1$ である必要がある。

さらに、直交性の要請よりこの方程式が Sturm-Liouville 型¹⁵であるためには $\beta = -2$ である必要がある。このとき(2-64)は以下の形に変形される。

$$4t(1-t)\frac{d^2R}{dt^2} + 4(1-2t)\frac{dR}{dt} + \left(\gamma - \frac{m^2}{t}\right)R = 0 \quad (2-64)$$

特に $m = 0$ の場合(回転対称のとき)、この方程式は

$$t(1-t)\frac{d^2R}{dt^2} + (1-2t)\frac{dR}{dt} + \frac{\gamma}{4}R = 0 \quad (2-65)$$

となる。ここで、 $\gamma = 4n(n+1)$ のとき、

$$t(1-t)\frac{d^2R}{dt^2} + (1-2t)\frac{dR}{dt} + n(n+1)R = 0 \quad (2-66)$$

となる。この方程式の解は、Gauss の超幾何級数 $F(a, b; c; t)$ を用いて、 $R(t) = F(n+1, -n; 1; t)$ と表される¹⁶。この方程式の解は(2-8)に一致することが知られているので、回転対称な Zernike 多項式については、Zernike 自身の導入法と、直交多項式による定義が一致することが示された。

¹⁴ 常微分方程式 $\frac{d^n u}{dt^n} + q_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}u}{dt^{n-1}} + \dots + q_0(t)u(t) = 0$ の確定特異点とは、その点において各係数 $q_k(t)$ が高々極を持つことを意味する。このとき、その常微分方程式は確定特異点の周りで解析的な解を持つ。

¹⁵ $\frac{d}{dt}p(t)\frac{du}{dt} + q(t)u(t) - \lambda u(t) = 0$ の形の方程式を Sturm-Liouville 型の微分方程式と呼び、 λ を固有値という。異なる固有値に対する解同士は直交する。

¹⁶ Gauss の超幾何関数 $F(a, b; c; x)$ とは、方程式 $x(1-x)y'' + \{c - (1+a+b)\}y' - aby = 0$ の一つの確定特異点 $x = 0$ の周りで解であり、次の級数で表される。

$$F(a, b; c; x) = 1 + \frac{ab}{c}x + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)}\frac{x^2}{2} + \frac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{c(c+1)(c+2)}\frac{x^3}{3!} + \dots$$

2.7. 光学設計による確認

2.7.1. Schmidt surface

本節では、Schmidt surface の設計を通じて、奇数次非球面展開公式の精度について議論する。Schmidt surface とは、Fig. 2-8 に示す Schmidt camera の補正板で、特に次の式で表されるものをいう([2-15])。

$$z = A_3r^3 + A_4r^4 + A_5r^5 + \dots \quad (2-67)$$

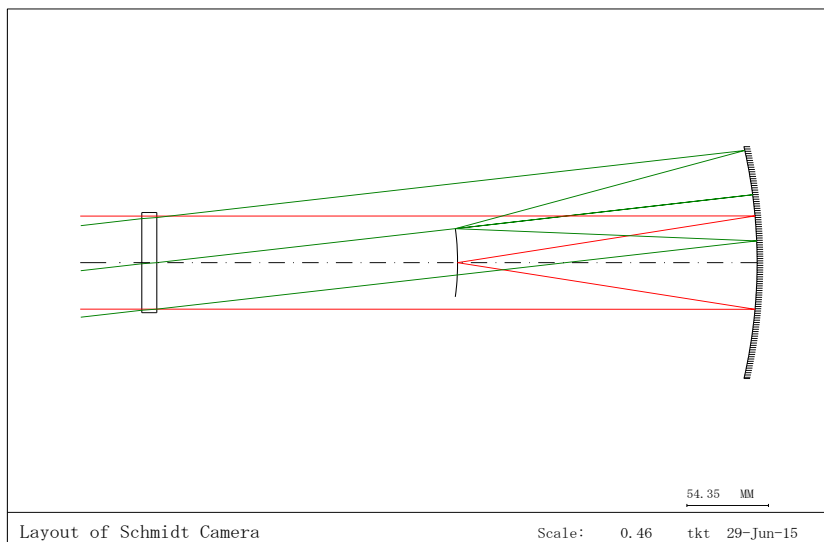


Fig. 2-8 Layout of Schmidt camera

元来、Schmidt camera の補正板は、Schmidt corrector plate と呼ばれ、主鏡の曲率中心(=絞り位置)におかれ、球面収差を補正する役割を担う。コマ・非点収差は絞りが曲率中心にあるので、もともとゼロである。像面湾曲は Petzval 和を補正するすべがないので、像面は絞りを曲率中心とした曲面になる。球面収差は瞳半径の偶数次多項式であるので、本来の補正板形状はパワー項(r^2 項)を含む偶数次非球面である([2-16] pp.158-170)。

一方、文献[2-15]には、パワー項のない式(2-67)が例示されている。我々は、この形状の Schmidt surface が収差補正上何らかの効果を持つのではないかと考え、Schmidt surface の光学設計を行った。

2.7.2. 光学設計及びその結果の吟味

例として、Table 1 に示す仕様に対して Schmidt surface を用いて光学設計を行った。基本的なレンズデータを Table 2 に示すが、曲率半径、空気間隔等は固定し、非球面(2面)の曲率半径のみ変数とする。

Table 1 Lens design specifications

Specifications	Attributes
Wavelength	587.56 nm
Focal length	200 mm
F number	3
Half FOV	7 deg
Residual wavefront aberration	< 0.0156 λ RMS (Strehl ratio > 0.99)

Table 2 The basic lens data

	R	d	Glass
0	Infinity	Infinity	
1	Infinity	10	n=1.51633
2(*)	Infinity	200	
3	Infinity	200	
4	-400	-200.000	Reflect
5	variable	variable	

光学設計の結果、(2-67)において 3 次非球面項と 4 次から 16 次の偶数次非球面のみで Table 1 に示す RMS 波面収差への要求仕様を満たすことができた。さらに、奇数次非球面の偶数次展開との関係を考察するため、3 次非球面項を(2-47)によって偶数次で表現することを試みた。この場合 3 次非球面の偶数次展開をもととの偶数次非球面係数に加えればよい。この場合、RMS 波面収差が仕様内に入るためには、20 次までの偶数次非球面が必要であった。以上の議論の結果得られた非球面係数を Table 3 に示す。また、形状および傾きの比較を Fig. 2-9 に示す。

Table 3 Aspherical coefficients for the Schmidt surface

Aspherical Coefficients	Original Design	Approximation
A2		-1.009321E-05
A3	-2.923781E-06	
A4	2.192910E-07	-4.641273E-08
A6	-4.867503E-10	5.052101E-10
A8	1.023192E-12	-2.492068E-12
A10	-1.418425E-15	7.259246E-15
A12	1.199493E-18	-1.314277E-17
A14	-5.588738E-22	1.495951E-20
A16	1.096804E-25	-1.041559E-23
A18		4.054177E-27
A20		-6.760936E-31

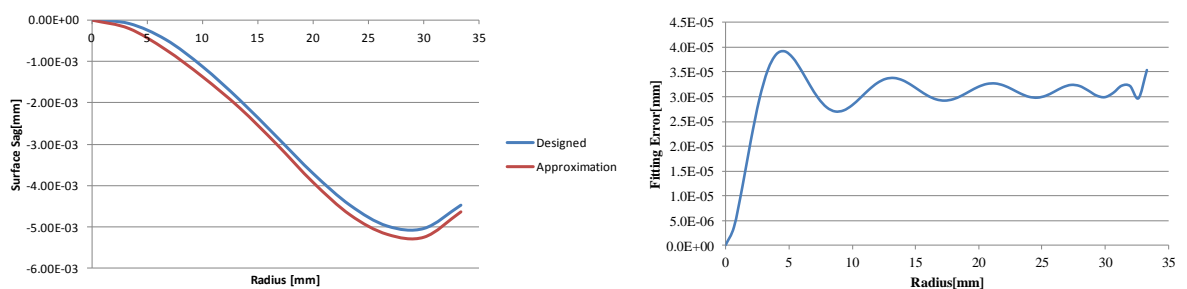
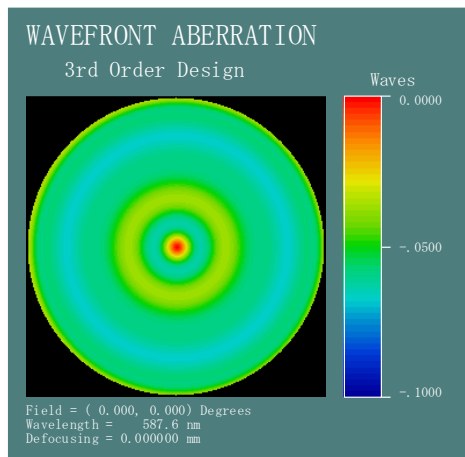
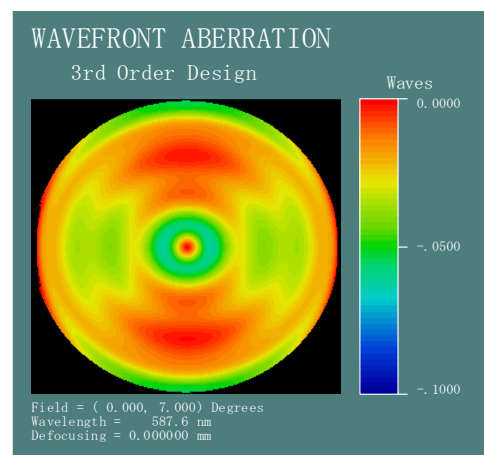


Fig. 2-9 Approximation errors for shape and slope

ここで、Peak-to-valley (PV)形状誤差は 3.88×10^{-5} mm であり、PV0.034 λ に対応する。この誤差は、RMS に換算するとほとんど影響はない。元の奇数次設計と展開形状を用いた設計の透過波面収差の比較を Fig. 2-10 と Fig. 2-11 に示す。

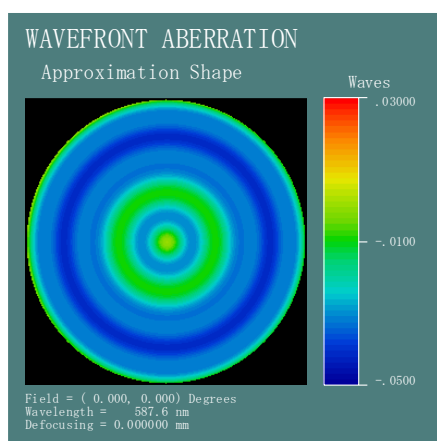


(a) On-axis (0.0090λ)

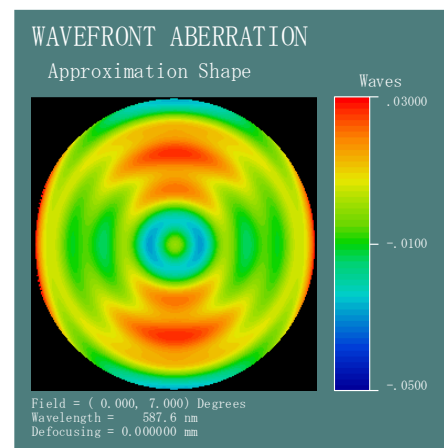


(b) Off-axis 7deg (0.0124λ)

Fig. 2-10 Designed wavefront (with odd-order surface)



(a) On-axis (0.0093λ)



(b) Off-axis 7deg (0.0123λ)

Fig. 2-11 Approximation wavefront (expanded even-order surface)

この比較から分かるように、可視域の Schmidt surface の設計において、本章で導いた Zernike 展開公式(2-30)は透過波面のレベルで形状を再現している。このことは傾きについても十分な精度で近似できていることに他ならない。

一方、Zernike 展開公式(2-30)によると、奇数次非球面の Zernike 展開において、必ずパワー成分が含まれる。というのも、各 Zernike 多項式は常にパワー成分を持っているためである。換言すれば、奇数次非球面はパワー成分の代用となる一方で、近軸量を変化させずに収差補正する効果があるともいえる。

2.8. 第2章のまとめ

本章では、奇数次非球面の Zernike 展開公式の正確な理論式を導出した。この公式はガンマ関数を含む簡易な式であり、ガンマ関数の変形と不等式評価を用いることによって、Zernike 展開公式の収束性を吟味できるようになった。さらに、Zernike 多項式の微分公式を用いて、Zernike 展開公式の項別微分が可能であることを導出した。これらの展開公式の係数評価により、元の関数についても、その導関数についても Zernike 展開によって有限な項数で十分に近似できることが分かった。

以上を光学的に解釈すると、Zernike 展開は「形状」だけでなく、光学的に重要な「傾き」も十分に近似している、すなわち、光学設計や製造において Zernike 展開を用いることは妥当であることが証明された。

このように理論的に導出した結果を、Schmidt surface の設計結果を用いて吟味した。この設計は、Schmidt camera において、パワーを含まない奇数次非球面で補正板形状を表現した形状である。今回の検討は $f=400\text{mm}$ 、可視(波長 550nm)、 $F/3$ の仕様である。奇数次を用いた設計を、本章で導出した展開公式を用いて偶数次展開し、元の設計と透過波面収差を比較した。Zernike の 20 次まで使って展開した結果、この Schmidt surface においては、展開後の形状であっても透過波面収差をよく再現することが分かった。つまり、本章の展開公式は形状の良い近似になっているだけでなく、光学設計で重要な傾きも含めて十分に近似していることが分かった。

また、奇数次非球面（今回は 3 次非球面）は当然ながらパワー項(2 次非球面)とは異なるため、近軸量（焦点距離）を変化させない。しかし、Zernike 展開後の表式は 2 次項を含むものとなる。したがって、奇数次非球面は近軸量を保ったまま収差補正に有効であることが示された。

参考文献

- [2-1] J. J. M. Braat and A. J. E. M. Janssen, "Double Zernike expansion of the optical aberration function from its power series expansion," *J. Opt. Soc. Am. A* Vol. 30, No. 6, 1213-1222 (2013).
- [2-2] A. B. Bhatia and E. Wolf, "On the circle polynomials of Zernike and related orthogonal sets," *Math. Proc. of the Cambridge Philosophical Society, Volume 50, Issue 1 January 1954, pp. 40-48*
- [2-3] F. Zernike, "Beugungstheorie des schneidenverfahrens und seiner verbesserten form, der phasenkontrastmethode," *Physica* (1934)
- [2-4] 鶴田, "第9光の鉛筆 11 Zernike の収差直交展開～位相差法の発明と収差測定の理論～," 新技術コミュニケーションズ
- [2-5] 後藤他, "詳解 物理応用 数学演習," 共立出版株式会社(1979)

- [2-6] 有本, “直行関数系によるレーザービーム光学系の評価解析,” 光学第3巻第4号 (Aug. 1974)
- [2-7] Code V reference manual
- [2-8] Zemax Reference manual
- [2-9] G. Arfken and H. Weber, *Mathematical Methods for Physicists, Fifth edition*. Academic Press, New York (2001).
- [2-10] R. Kingslake, *Lens design fundamentals*, Academic Press, New York (1978)
- [2-11] B. R. A. Nijboer, “The diffraction theory of aberrations,” Ph.D.thesis, Rijksuniversiteit Groningen (1942)
- [2-12] G. Szegő, *Orthogonal Polynomials*, Fourth Edition, American Mathematical Society (1975)
- [2-13] M. Tanikawa et al., "Effectiveness of Odd Order Aspherical Surface," J 36 (11) 646-660 (2007) (in Japanese).
- [2-14] M. Shibuya et al., "Theoretical investigation of the meaning of odd-order aspherical surface and numerical confirmation of effectiveness in rotational-symmetric but off-axis optics," *Opt. Eng.* 49(7), 073003 (2010)
- [2-15] ISO-10110.-12, "Optics and photonics — Preparation of drawings for optical elements and systems —Part 12: Aspheric surfaces,"
- [2-16] 吉田, “天文アマチュアのための 新版反射望遠鏡光学入門,” 成文堂新光社 (2005)

3. 奇数次非球面の収差特性についての考察と、実際の光学設計による実証

3.1. はじめに

奇数次非球面を用いた光学設計が広まっている。最初期の設計例はインスタントカメラのファインダーに応用され、偏心収差の補正に用いられた([3-1])。当初、奇数次非球面はこのような比較的要求精度の低い光学系に用いられたが、製造技術の進歩により、プロジェクタ投射レンズやカメラレンズといった比較的要求精度の高い光学系にも応用されるようになった([3-2][3-3])。

これらの設計において、奇数次非球面の効果は必ずしも明確にされておらず、単に偶数次非球面に比較して自由度が増えたと素朴に考えられている。また、第2章では、数学的に奇数次非球面が偶数次非球面で近似できることを示したが、実際の設計において使用できる項で十分な近似になっていない場合も当然ありうる。この場合は、奇数次非球面が設計において本質的に有効であると考えられているが、十分な解析はなされていない。このように、奇数次非球面に関する設計理論は必ずしも確立されているとは言えなかった。そこで、本章における研究では、奇数次非球面の収差理論の確立を試みた。

通常の球面光学系の収差論は高次収差を含めて深く研究されている。さらに、その拡張としての偶数次非球面の収差論が位置付けられており、偶数次非球面の収差特性はよくわかっているといっている。

正規化された収差係数については、[3-4]を発展させたものとして、[3-5][3-6]に導出方法が詳しく述べられている。また、[3-7]には非球面の5次収差についても詳しい。一方、正規化されていない収差係数は、[3-8]に基礎的な導出方法が述べられており、[3-9]にはその要約がある。この導出方法は光路長(Optical path difference, OPD)を瞳座標について Taylor 展開することに基づいている。この結果をさらに非球面に体系的に応用したのものとして、[3-10]を挙げることができる。

本章における検討では、[3-10]の表記法に基づき、奇数次非球面の収差係数を導出した。奇数次非球面は、原点において高次導関数が定義できないので、軸上収差は必ずしも良い素性であるとは言えない[3-11]。

そこで、本研究では、軸外収差に着目し、その収差係数を導出した。軸外の主光線の周りの細い光束(軸上の Seidel 領域に対応する)を考え、その中のある光線と主光線の間、非球面によって生じる光路長差を考えた。これを瞳座標で Taylor 展開することで一般的な非球面の収差係数を示した。

その結果、奇数次非球面では、低次(1次ないし3次)の非球面で、かつ瞳座標についての低次の(Seidel 収差に対応する次数の)収差係数であっても、従来の収差係数に分解してみると、高次アスや Tetrafoil といった高次収差を含んでいることが分かった。このことから、奇数次非球面は軸外光束の高次収差の補正に有効であることが予想される。

ここで得られた結果を、実際の光学設計によって確認した。題材とする光学系は Extreme

Ultraviolet Lithography (EUVL) 投影光学系である。この用途の光学系は様々な設計が知られているが、すべて反射鏡で構成され、用いる視野は軸外の円弧状の視野に限られている ([3-12][3-13])。そこで、この光学系に対して奇数次非球面の応用を検討し、実際に高次収差の補正効果を確認した。さらに、第 2 章で導出した展開公式を用いて、奇数次非球面を偶数次非球面で近似したところ、実用的な項数では、近似が不可能であることを示した。

3.2. 奇数次非球面の収差係数の導出

3.2.1. 小さな非球面量により加わる波面収差

収差係数は、光路長差 (Optical Path Difference, OPD) を瞳座標の冪級数に展開することにより得られる。本研究では [3-8] の方法に則って、奇数次非球面の収差係数を導出した。Fig. 3-1 に物体—瞳—像の間の座標関係を示す。

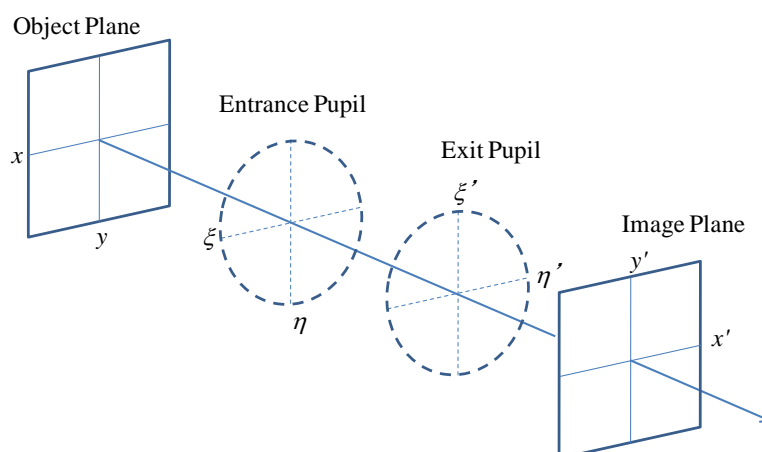


Fig. 3-1 Configuration of object-pupil-image

ここで、4 次の波面収差を考える限りにおいて、瞳収差を無視することができる ([3-7][3-10])。すなわち、入射瞳座標と射出瞳座標を同一視し、どちらも一つの「瞳座標」として取り扱ってよい。そこで、正規化された瞳座標 (ξ, η) を考え、物体—像に関しては実寸で考えることにする。

波面収差は、ある像高 h に対して、主光線と瞳座標 (ξ, η) を通る光線との間の光路長として定義される。さらに波面収差を瞳収差 (ξ, η) の冪級数に展開することにより収差係数が得られる。Shack の記法 [3-10] によると、通常回転対称形に対して、この波面収差を展開した結果は以下ようになる。

$$\begin{aligned}
W(\xi, \eta; h) = & W_{000} + W_{200}h^2 + W_{111}h\eta + W_{020}(\xi^2 + \eta^2) \\
& + W_{040}(\xi^2 + \eta^2)^2 + W_{131}h\eta(\xi^2 + \eta^2) + W_{222}h^2\eta^2 \\
& + W_{220}h^2(\xi^2 + \eta^2) + W_{311}h^3\eta + \dots
\end{aligned} \tag{3-1}$$

ここで現れる係数 W_{ijk} は収差係数に対応する。例えば低次収差として、 W_{000} は結像に関係ないピストン項、 W_{200} は像高ごとのピストン、 W_{111} は倍率誤差、そして W_{020} はパワー項である。これらは瞳と像高の高々2次の項である。4次の項は Seidel 収差に対応する。(3-1)において、 W_{040} は球面収差、 W_{131} はコマ収差、 W_{222} は非点収差、 W_{220} は像面湾曲、そして W_{311} は歪曲である。通常の球面や偶数次非球面で構成された光学系の収差は(3-1)に則った表式で書き表すことができる。

ここで、一般的な非球面に対して収差係数を考察するため、以下のような一般的な非球面式を取り上げる。

$$z = \frac{cr^2}{1 + \sqrt{1 - c^2r^2}} + f(X, Y), \tag{3-2}$$

ここで、 c はベース球面の曲率半径であり、動径座標は $r = \sqrt{X^2 + Y^2}$ である。第1項 $cr^2/(1 + \sqrt{1 - c^2r^2})$ はベース球面を表し、 $f(X, Y)$ は非球面量である。これらの関係を Fig. 3-2 に示す。

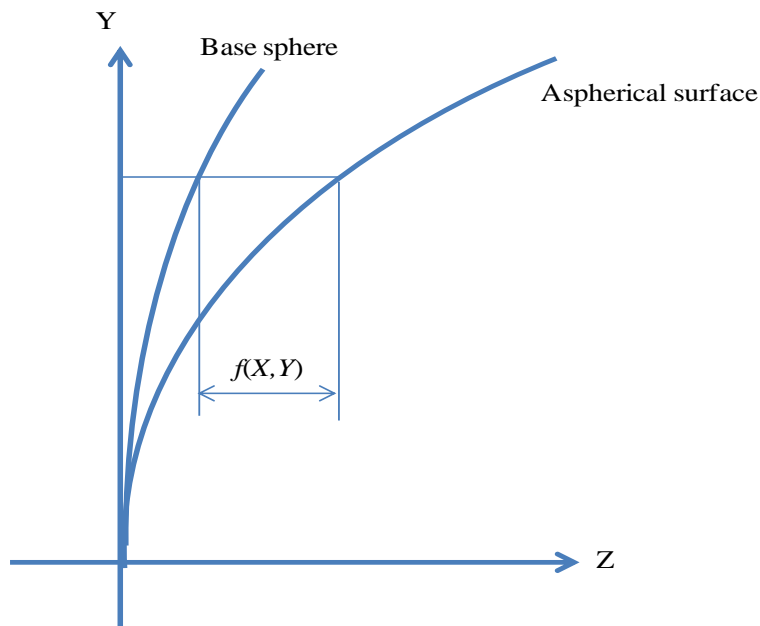


Fig. 3-2 Definition of small asphericity

非球面による光路長差を求めるため、非球面に入射する1本の光線を考える。

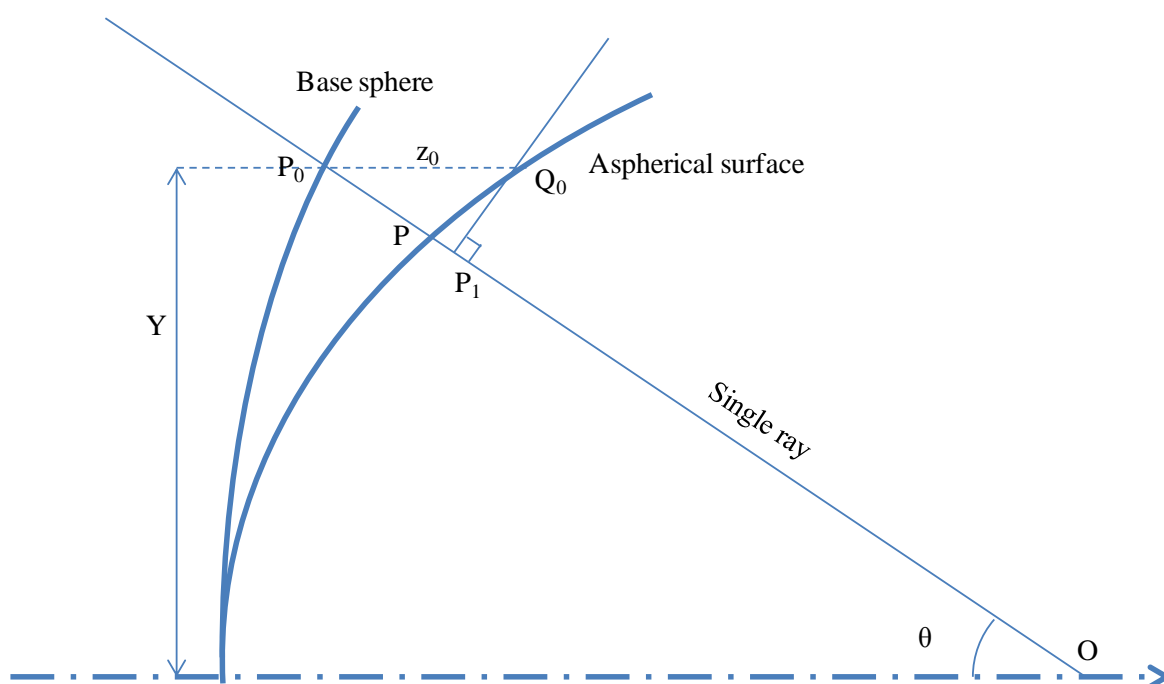


Fig. 3-3 An incident ray for deriving the additional OPD

球面やコーニック面とは異なり、非球面と光線の交点は解析的に求めることはできないので、実際にはニュートン法によって数値的に交点座標が求められる。低次の収差係数は、この光路長の一次近似に対応する。Fig. 3-3によると、光路長の一次近似は次の式で与えられる。

$$[P_0P] \sim [P_0P_1] = z_0 \cos \theta = f(X_0, Y_0) \cos \theta, \quad (3-3)$$

ここで、 $\cos \theta$ は入射光線方向の余弦成分、 (X_0, Y_0) は光線とベース球面との交点を (X, Y) 平面に投影した座標である。(ただし、空気から媒質への入射を仮定している)

ここで、正規化された瞳座標 (ξ, η) と (X_0, Y_0) の関係を考察する。光線座標について、 y と \bar{y} をそれぞれ軸上マージナル光線と主光線の実寸に基づく近軸光線追跡結果とする。Fig. 3-4によると、 (X_0, Y_0) と瞳座標の関係は以下の式で与えられる。

$$(X_0, Y_0) = (y\xi, y\eta + \bar{y}), \quad (3-4)$$

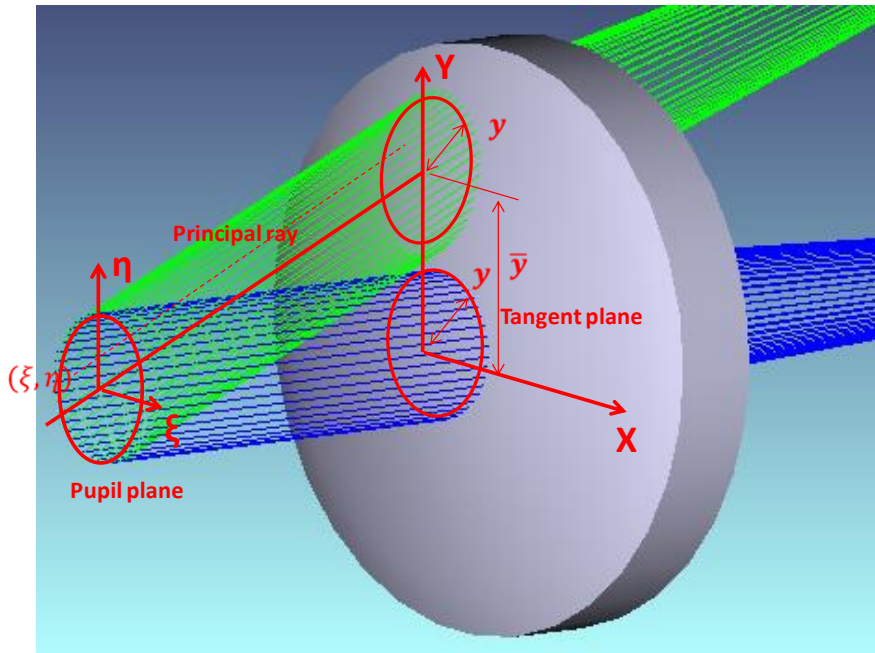


Fig. 3-4 The coordinate at tangent plane derived from paraxial ray tracing

式(3-3)は、光線が空気から面に入射するときの光路長である。射出側について、媒質の屈折率を n とし、射出角の方向余弦を $\cos \theta'$ とする。波面収差 $W(\xi, \eta)$ は任意の光線と主光線との間の光路長の差である。したがって、

$$W(\xi, \eta; \bar{y}) = (n \cos \theta' - \cos \theta) \{f(y\xi, y\eta + \bar{y}) - f(0, \bar{y})\}. \quad (3-5)$$

(3-5)を瞳座標で冪級数展開することにより、収差係数を得る。そのためには、 $f(y\xi, y\eta + \bar{y}) - f(0, \bar{y})$ を Taylor 展開により書き直せばよい。

$$\begin{aligned} W(\xi, \eta; \bar{y}) = & (n \cos \theta' - \cos \theta) \times \{ \\ & y \left(\frac{\partial f}{\partial X} \xi + \frac{\partial f}{\partial Y} \eta \right) + \frac{y^2}{2} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial X^2} \xi^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial X \partial Y} \xi \eta + \frac{\partial^2 f}{\partial Y^2} \eta^2 \right) \\ & + \frac{y^3}{3!} \left(\frac{\partial^3 f}{\partial X^3} \xi^3 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial X^2 \partial Y} \xi^2 \eta + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial X \partial Y^2} \xi \eta^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial Y^3} \eta^3 \right) \\ & + \frac{y^4}{4!} \left(\frac{\partial^4 f}{\partial X^4} \xi^4 + 4 \frac{\partial^4 f}{\partial X^3 \partial Y} \xi^3 \eta + 6 \frac{\partial^4 f}{\partial X^2 \partial Y^2} \xi^2 \eta^2 + 4 \frac{\partial^4 f}{\partial X \partial Y^3} \xi \eta^3 \right. \\ & \left. + \frac{\partial^4 f}{\partial Y^4} \eta^4 \right) + \dots \}, \end{aligned} \quad (3-6)$$

ここで、 $\frac{\partial^{m+n} f}{\partial X^m \partial Y^n}$ は微分係数 $\frac{\partial^{m+n} f}{\partial X^m \partial Y^n}(0, \bar{y})$ を意味する。これよりも高次の項は瞳収差を考慮していないので意味をなさないが、ここで挙げた4次の項は Seidel 収差として正しい

3.2.2. 奇数次非球面の収差係数

本節では、(3-6)式に基づき、具体的に $f(X, Y)$ の表式を与えることで収差係数を導出する。奇数次非球面の収差係数を計算するにあたり、準備として、最初に通常の偶数次非球面について(3-6)式に基づいた収差係数を計算する。

最も簡単な偶数次非球面は2次非球面であり、以下の表式で与えられる。

$$f(X, Y) = A(X^2 + Y^2), \quad (3-7)$$

これを(3-6)に当てはめると、3次以上の項はすべて0になり、波面収差は以下のようになる。

$$\begin{aligned} W(\xi, \eta) &= A(n-1) \cos \theta \{(y\xi)^2 + (y\eta + \bar{y})^2 - \bar{y}^2\} \\ &= A(n-1) \cos \theta \{y^2(\xi^2 + \eta^2) + 2y\bar{y}\eta\}, \end{aligned} \quad (3-8)$$

ここで、右辺第1項はパワー成分（デフォーカス）であり、第2項は倍率誤差である

次に簡単な偶数次非球面は4次非球面である。この非球面は、Seidel 収差論でもよく知られている通り、Seidel 収差に対応する[3-5]-[3-10]。4次非球面

$$f(X, Y) = A(X^2 + Y^2)^2. \quad (3-9)$$

を(3-6)に当てはめると、5次以上の項はすべて0になる、波面収差は以下のようになる。

$$W(\xi, \eta) = A(n-1) \cos \theta \times \quad (3-10)$$

$$\{4y\bar{y}^3\eta + 2y^2\bar{y}^2(\xi^2 + 3\eta^2) + 3y^3\bar{y}\eta(\xi^2 + \eta^2) + y^4(\xi^2 + \eta^2)^2\},$$

右辺のそれぞれの項は Seidel 収差の歪曲、非点収差、コマ、球面収差に対応する。

一方、奇数次非球面について考察する。1次非球面は $f(X, Y) = A(X^2 + Y^2)^{1/2}$ 、3次非球面は $f(X, Y) = A(X^2 + Y^2)^{3/2}$ なので、偶数次非球面と異なり、高次導関数 $\frac{\partial^{m+n} f}{\partial X^m \partial Y^n}(0, \bar{y})$ は0にはならない。これらの非球面式を(3-6)に当てはめると、3次非球面の場合、波面収差として以下を得る。

$$W(\xi, \eta) = A(n-1) \cos \theta \times \quad (3-11)$$

$$\left\{ 3y\bar{y}^2\eta + \frac{3y^2\bar{y}}{2}(\xi^2 + 2\eta^2) + \frac{y^3}{2}\eta(3\xi^2 + 2\eta^2) + \frac{3y^4}{8\bar{y}} \times \xi^4 \dots \right\}.$$

また、1次非球面の波面収差は次のようになる。

$$W(\xi, \eta) = A(n-1) \cos \theta \times \quad (3-12)$$

$$\left\{ y\eta + \frac{y^2}{2\bar{y}} \times \xi^2 - \frac{y^3}{2\bar{y}^2} \times \xi^2\eta - \frac{y^4}{8\bar{y}^3} \times (\xi^4 - 4\xi^2\eta^2) + \dots \right\}.$$

これらの表式は Seidel 収差にはあてはまらないため、次のように考察する。収差係数の

性質は、軸上マージナル光線 y （瞳半径、光束径）の次数で分類される。例えば、2次非球面では、 y^2 に比例する項と、 y に比例する項が現れるが、それぞれデフォーカスと倍率誤差(像の移動)を意味する。また、4次非球面では、 y の4, 3, 2, 1 乗に比例する項が現れるが、それぞれ球面収差、コマ収差、非点収差、歪曲に対応する。そこで、(3-11), (3-12)に現れる各項を y の次数によって分類する。偶数次非球面(2次, 4次)との対比を Table 3-1 に掲げる。

Table 3-1 Wavefront aberration coefficients of up to the fourth-order aspherical surface

次数	1次非球面	2次非球面	3次非球面	4次非球面
y	$y\eta$	$2y\bar{y}\eta$ (magnification error)	$3y\bar{y}^2\eta$	$4y\bar{y}^3\eta$ (distortion)
y^2	$\frac{y^2}{2\bar{y}} \times \xi^2$	$y^2(\xi^2 + \eta^2)$ (defocus)	$\frac{3y^2\bar{y}}{2}(\xi^2 + 2\eta^2)$	$2y^2\bar{y}^2 \times (\xi^2 + 3\eta^2)$ (astigmatism)
y^3	$-\frac{y^3}{2\bar{y}^2} \times \xi^2\eta$	0	$\frac{y^3}{2} \eta(3\xi^2 + 2\eta^2)$	$3y^3\bar{y} \times \eta(\xi^2 + \eta^2)$ (coma)
y^4	$-\frac{y^4}{8\bar{y}^3} \times (\xi^4 - 4\xi^2\eta^2)$	0	$\frac{3y^4}{8\bar{y}} \times \xi^4$	$y^4 \times (\xi^2 + \eta^2)^2$ (spherical)

ここで1次非球面と3次非球面に着目すると、4次非球面とは異なり、回転対称でないことが分かる。そこで、奇数次非球面の各項を、従来から行われている収差の分類法である Zernike 展開することで、各収差がどのような収差成分に対応しているかを検討する。

例えば、3次非球面の y^4 に比例する項を取り上げる(簡単のため、係数は無視して、瞳座標の多項式部分のみ考える)。

$$\begin{aligned}\xi^4 &= r^4 \cos^4 \varphi = \frac{r^4}{8} (4 \cos 2\varphi + \cos 4\varphi + 3) \\ &= \frac{1}{8} \left\{ \left(\frac{1}{2} Z_9 + \frac{3}{2} Z_4 + 1 \right) + (Z_{12} + 3Z_5) + Z_{17} \right\}\end{aligned}\tag{3-13}$$

ここで、右辺第 1 項は球面収差 Z_9 とデフォーカス Z_4 、第 2 項は Seidel の非点収差 Z_5 と高次非点収差 Z_{12} 、第 3 項は tetrafoil に対応する。すなわち奇数次非球面は、Seidel の球面収差に対応するような低次の項であっても、高次収差を含んでいる。

また、収差の次数については、以下のように奇数次非球面は偶数次非球面の次数と対応する。例えば、球面収差については、4 次非球面であれば、光束径の 4 乗の比例するが、3 次非球面では、光束径の 4 乗に比例し、主光線高の 1 乗に反比例する。その意味で、この収差は 3 次の次数を持っている。この関係は他の収差、他の次数の奇数次非球面すべてに当てはまることである。さらに、奇数次非球面の収差係数は主光線高に反比例する項が現れることから、像高が高くなればなるほど、奇数次非球面特有の収差の影響は小さくなり、通常の収差に近づいていくことも予想される。

以上を踏まえたうえで、3.2.3 節では、1 次非球面と 3 次非球面の各収差に対して Zernike 展開を行うことによりこれらの収差特性について考察する。

3.2.3. 奇数次非球面の収差係数の Zernike 展開に関する考察

(ア) 歪曲に対応する項

この項は近軸マージナル光線高さ y に比例する項である。波面収差の具体的な形状を Fig. 3-5 に示す。

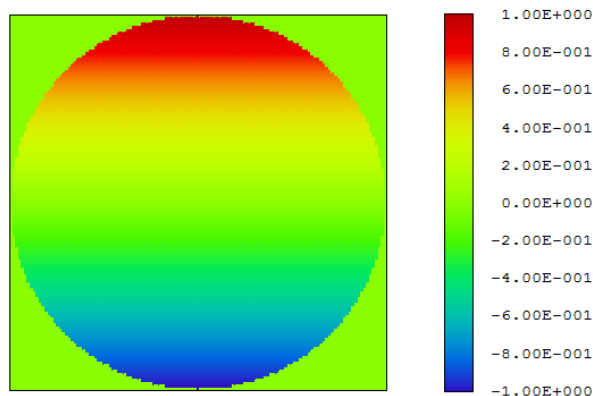


Fig. 3-5 Distortion wavefront component for the first- and third-order surfaces

これは 1 次非球面も 3 次非球面も η であり、像の横ずれを表す Y-tilt 項 Z_2 と一致する。すなわち、奇数次非球面であっても、偶数次非球面であっても、歪曲に相当する項はすべて同様の Z_2 が現れる。面の傾きそのものに起因する項であり、曲率を持つすべての面に共通する性質である。

(イ) 非点収差に対応する項

この項は近軸マージナル光線高さ y の2乗に比例する項である。波面収差の具体的な形状を Fig. 3-6 に示す。

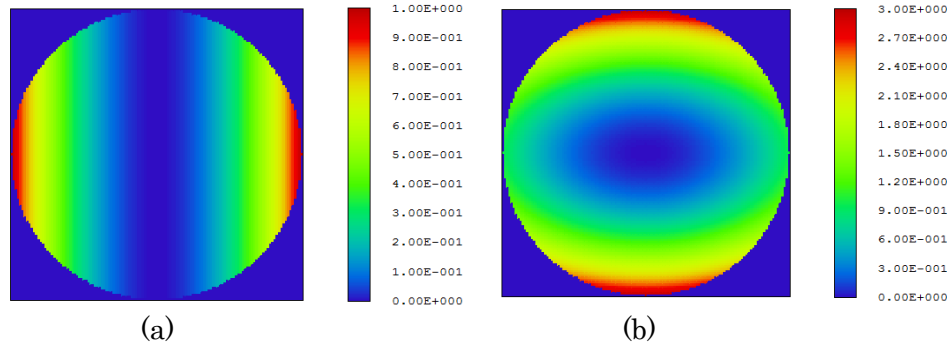
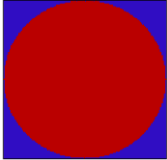
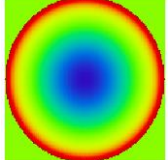
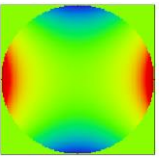


Fig. 3-6 Astigmatic wavefront components
(a: first-order surface b:third-order surface)

これらの波面収差関数を Zernike 展開すると、Seidel の非点収差 $Z5$ に対応する項と、パワーに対応する項 $Z4$ が現れる。この2つの項は、4次非球面の非点収差で現れる項と同一であり、奇数次非球面の非点収差も、本質的には通常の偶数次非球面に類似した性質を持つと考えられる。展開係数を Table 3-2 に示す。

Table 3-2 Zernike expansion of astigmatic aberrations for the first- and the third-order surfaces

Components	Z1 (Piston)	Z4 (Power)	Z5 (XY astig)
Wavefront Map			
First-order surface	1/4	1/4	1/2
Third-order surface	1	1	-1

(ウ) コマ収差に対応する項

この項は近軸マージナル光線高さ y の3乗に比例する項である。波面収差の具体的な形状を Fig. 3-7 に示す。

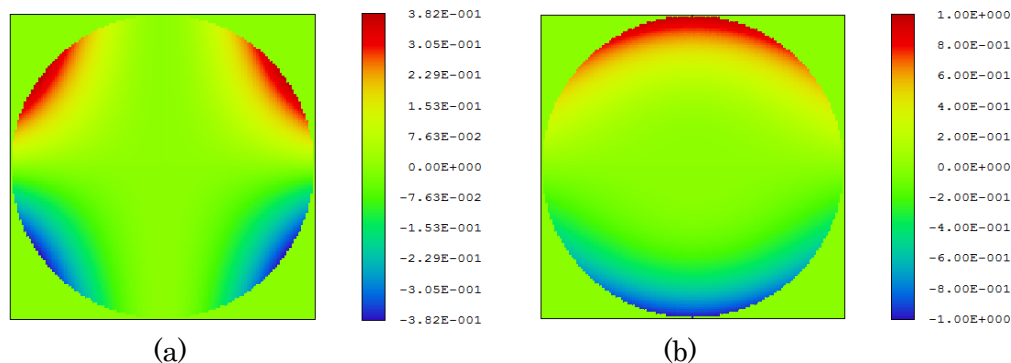
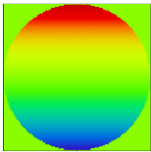
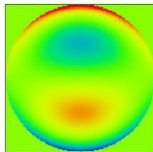
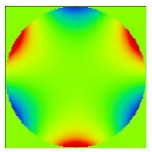


Fig. 3-7 Coma-like wavefront components
(a: first-order surface b:third-order surface)

歪曲・非点収差に対応する項とは異なり、この次数から高次収差が現れる。1次非球面、3次非球面ともに、Yコマ(Z8)と Trefoil (Z11)を含む。したがって、奇数次非球面は低次収差であっても Trefoil を補正するために役立つと考えられる。展開係数を Table 3-3 に示す。

Table 3-4 Zernike expansion of coma-like aberrations for the first- and the third-order surfaces

Components	Z3(Y-tilt)	Z8 (Y-coma)	Z11 (Trefoil)
Wavefront Map			
First-order surface	1/6	1/12	1/4
Third-order surface	1/2	1/4	-1/4

(エ) 球面収差に対応する項

この項は近軸マージナル光線高さ y の3乗に比例する項である。波面収差の具体的な形状を Fig. 3-8 に示す。

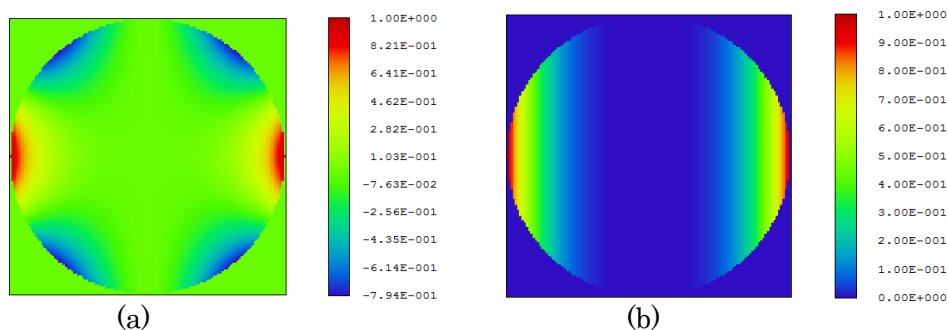
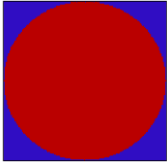
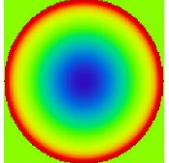
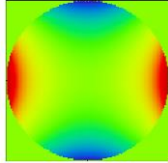
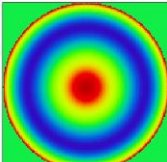
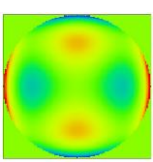
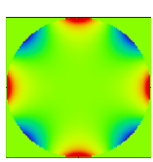


Fig. 3-8 Spherical-like wavefront components
(a: first-order surface b:third-order surface)

これらの波面収差を Zernike 展開すると通常の球面収差で現れる Z1 (Piston), Z4 (Defocus), Z9 (Seidel spherical)以外に Z12 (5th astigmatism)と Z17 (Tetrafoil)が現れる Zernike 展開した結果を Table 3-5 に示す。

Table 3-5 Zernike expansion of spherical-like aberrations for the first- and the third-order surfaces

Components	Z1(Piston)	Z4 (Defocus)	Z5(Seidel astigmatism)
Wavefront Map			
First-order surface	1/8	3/16	3/8
Third-order surface	-1/24	-1/16	3/8

Components	Z9 (Seidel spherical)	Z12 (5th astigmatism)	Z17 (Tetrafoil)
Wavefront Map			
First-order surface	1/16	1/8	1/8
Third-order surface	-1/48	1/8	5/8

奇数次非球面の球面収差に対応する項は、他の収差と異なり、多くの高次収差成分を含む。1次非球面の場合は、非点収差成分が最も大きく、3次非球面の場合は Tetrafoil 成分が最大である。この特性は、奇数次非球面の収差補正効果を最もよく表している。すなわち、奇数次非球面を導入することにより、瞳の低次であっても高次収差を補正することができ、したがって、もともとの光学系に残存する高次アス、Tetrafoil といった高次収差の補正効果が期待できる。

3.3. 奇数次非球面の設計例

3.3.1. 設計の概要

1990 年前半から EUVL 投影光学系の設計について広範な検討がなされてきた。EUV 領域では透過部材が使えないため、EUV 光学系はすべて反射系で設計される。様々なタイプのうち、1 回の瞳リレーを含む 6 枚鏡系が視野と無遮蔽の NA のバランスに優れているとされる([3-12][3-13])。この種の光学系は軸外視野のみを用い、軸上結像を使わないため、各ミラーの有効口径は円弧状で、見かけ上は偏心光学系のように見えるが、実際はすべての面頂点が共通の光軸上にあり、本質的には回転対称形である。設計例を Fig. 3-9 に示す。

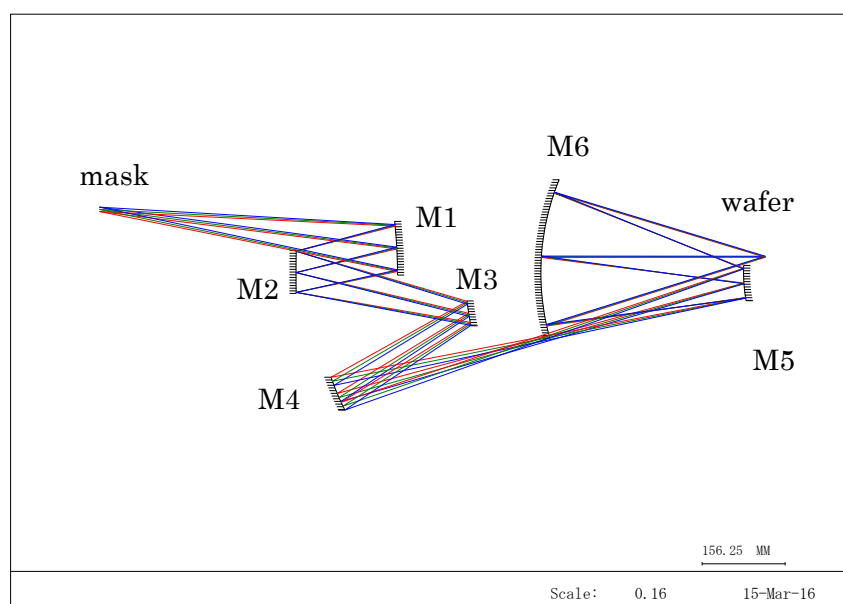


Fig. 3-9 Basic configuration of six-mirror-system

この設計は、本質的には 3 群に分かれていると考えられる。マスク側の群(M1, M2)は次のリレーに入る軸外光線の入射角を小さくする働きをしている。リレー群(M3, M4) は M2 に位置する開口絞りの像を、次の結像群の中に形成する。結像群(M5, M6) はリレーによって内部に瞳が作られ、さらに最終的に像を形成する役割を持っている。

本章では、この 6 枚鏡系について、その収差特性を明らかにすると共に、奇数次非球面の導入がどのような収差補正効果が得られるかを検討した結果を示す。検討に用いた光学系の仕様を Table 3-6 に示す。

Table 3-6 Optical design specifications for EUVL camera.

Specifications	Attributes
Wavelength	13.5nm
Numerical Aperture	0.3 on wafer side
Exposure Field	Y'=28.5 to 30.5 (2mm slit)
Magnification	-1/4
Telecentricity	Telecentric at wafer plane
Residual wavefront aberration	Less than 0.006λ (Strehl ratio > 0.998)

3.3.2. 偶数次設計と奇数次設計の比較

従来設計方針に基づく設計にどのような限界があるかを調べるため、ここでは偶数次非球面による設計を検討する。得られた設計データ(RDN)を Table 3-7 に示す。

Table 3-7 Optical design data for even-order design

	Radius of curvature	Thickness	Material
Object	Infinity	560.8785	
1	-820.9470	-190.176	Reflective
2*	2206.467	319.2278	Reflective
3	474.5155	-287.472	Reflective
4	573.4281	810.925	Reflective
5	286.7007	-381.439	Reflective
6	453.9792	422.1489	Reflective
Image	Infinity		

また、この設計では、すべての面が次に示す偶数次非球面である。

$$z = \frac{cr^2}{1 + \sqrt{1 - c^2r^2}} + \sum_{n=1}^{12} A_n \rho^n \quad (3-14)$$

ここで、 c はベース球面の曲率半径、 r は動径座標、そして ρ は正規化された動径座標である。また、ここで使用された非球面係数を Table 3-8 に示す。

Table 3-8 Aspherical coefficients for the even-order design

Surface No.	1	2	3	4	5	6
Normalization	90	40.5	100	257.5	48.5	150
Radius						
A1	0	0	0	0	0	0
A2	0	0	0	0	0	0
A3	0	0	0	0	0	0
A4	2.232809E-01	-2.881597E-03	-2.152907E-01	-9.832075E-02	-2.395010E-03	3.696353E-02
A5	0	0	0	0	0	0
A6	-4.772316E-02	-3.131182E-04	6.599907E-03	1.272619E-02	2.296908E-02	5.349752E-03
A7	0	0	0	0	0	0
A8	1.286259E-02	-3.977065E-05	1.192252E-03	-2.210501E-02	-3.021419E-03	6.579361E-04
A9	0	0	0	0	0	0
A10	-3.111194E-03	-3.388733E-06	-1.066165E-03	1.081757E-02	5.460242E-04	7.172373E-05
A11	0	0	0	0	0	0
A12	4.695752E-04	0	2.058089E-04	-1.694801E-03	-1.072324E-04	1.554783E-05

設計仕様 Table 3-6 を満たすためには、第 2 面を除く各面で 12 次までの偶数次非球面係数が必要だった。しかし、この設計による Strehl ratio は 0.99 のレベルであり、現代のリソグラフィに必要とされる 0.995 までには達していない([3-14])。Strehl ratio を向上させるため、より高次(CodeV の偶数次非球面の上限である 30 次)の非球面係数、および 2 次の項を導入したが、波面収差低減にはつながらなかった。

偶数次設計の透過波面収差を Fig. 3-10 に示す。ここで、スケールは $\lambda/10 \sim -\lambda/10$ であり、それぞれの透過波面収差は $0.012, 0.008, 0.011\lambda$ である。また、対応する Strehl 比は 0.995, 0.997, 0.996 である。

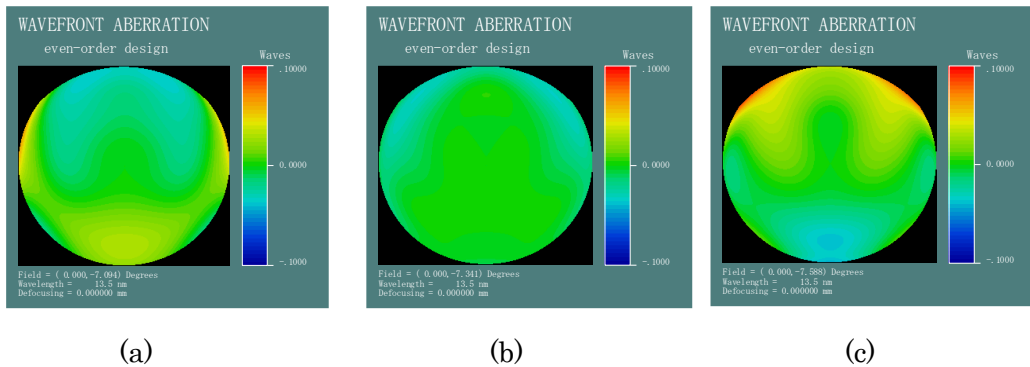


Fig. 3-10 Wavefront aberration of even-order design
(a: bottom , b: middle , c:top of the field)

さらに、どの収差が支配的かを確認するため、透過波面収差の Zernike 展開を行った。その結果を Fig. 3-11 に示す。

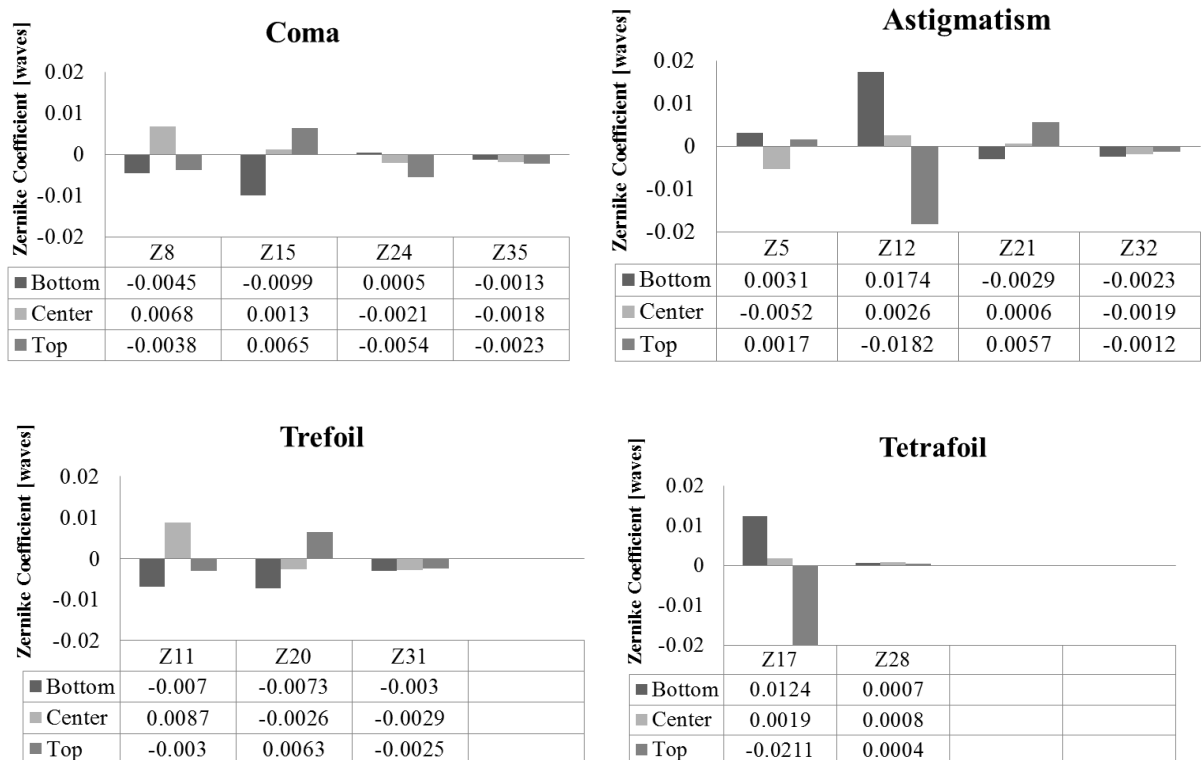


Fig. 3-11 Zernike decomposition of wavefront aberrations of even-order design

Fig. 3-11 によると、軸外視野のみ用いることと、またそれに伴う M3, M4 の配置の非対称性から、コマ、非点収差といった軸外収差が支配的である。Seidel のコマ(Z8)および非点収差(Z5)はよく補正されているが、高次アス(Z12)及び Tetrafoil(Z17)が大きい。

これらの残収差を補正するため、奇数次非球面の導入を検討する。[3-11]の考察によると、奇数次非球面は軸上収差に悪影響が及ぼされることが予想される。実際、この光学系においても、光束が面の対称軸上を通過する M1, 2, 5, 6 に奇数次非球面を用いても効果はなかった。3.2.2 節の結果によれば、奇数次非球面が有効性を発揮するのは、軸外光束の高次収差の補正であると考えられる。そこで、有効口径が軸外のみに限られる M3, 4 に対する奇数次非球面の導入を検討したところ、収差を改善することができた。その結果を Table 3-9 及び Table 3-10 に示す。

Table 3-9 Optical design data for odd-order design

	Radius of curvature	Thickness	Material
Object	Infinity	573.3432	
1	-839.4372	-200.5083	Reflective
2*	1945.2131	353.6812	Reflective
3	529.8170	-288.8153	Reflective
4	584.2007	857.2901	Reflective
5	281.1104	-376.3534	Reflective
6	454.4199	423.0405	Reflective
Image	Infinity		

Table 3-10 Aspherical coefficients for odd-order design

Surface No.	1	2	3	4	5	6
Normalization						
Radius	91.5	40.5	103	262	48	150
A1	0	0	2.025075E-01	-5.005588E-01	0	0
A2	0	0	0	0	0	0
A3	0	0	1.015068E+00	-5.603777E-01	0	0
A4	2.359900E-01	-2.580754E-03	-9.049848E-01	-2.558581E-01	-3.623837E-03	3.862932E-02
A5	0	0	4.549866E-02	-4.558530E-02	0	0
A6	-3.896598E-02	-2.214112E-04	1.561940E-01	1.008751E-01	1.514787E-02	5.490149E-03
A7	0	0	5.883905E-02	9.252107E-02	0	0
A8	8.224229E-03	-3.315761E-05	-4.329746E-02	7.071586E-04	-1.313364E-03	6.231698E-04
A9	0	0	-6.664260E-02	-9.514685E-02	0	0
A10	-1.684451E-03	0	1.680247E-03	-6.676155E-02	2.858667E-04	1.114371E-04
A11	0	0	5.288878E-02	8.182442E-02	0	0
A12	2.327812E-04	0	-2.077366E-02	-1.109241E-02	-7.407131E-05	0

奇数次非球面による透過波面収差を Fig. 3-12 に示す。これらの RMS 値はそれぞれ 0.0058λ , 0.0056λ , 0.0056λ であり、目標であった Strehl 比 0.999 を満足している。

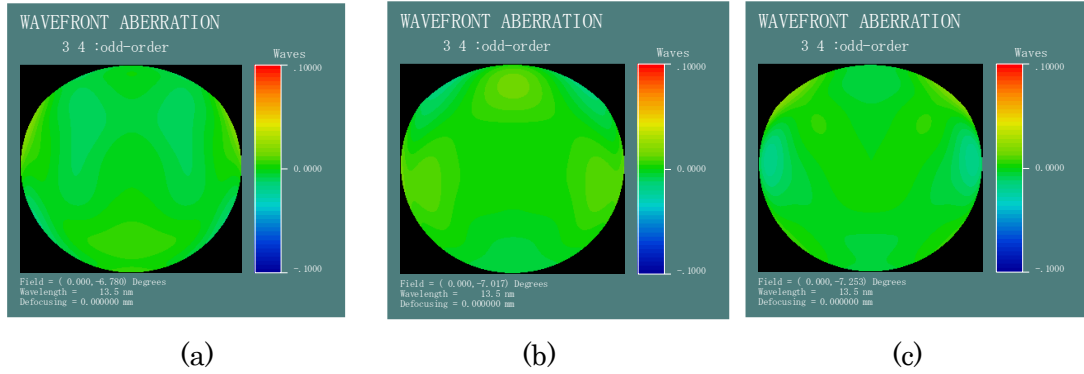


Fig. 3-12 Wavefront aberration of odd-order design

(a: bottom, b: middle, c: top of the field)

成分ごとの収差補正状況を Fig. 3-11 と比較するため、同様に Zernike 展開を行った。その結果を

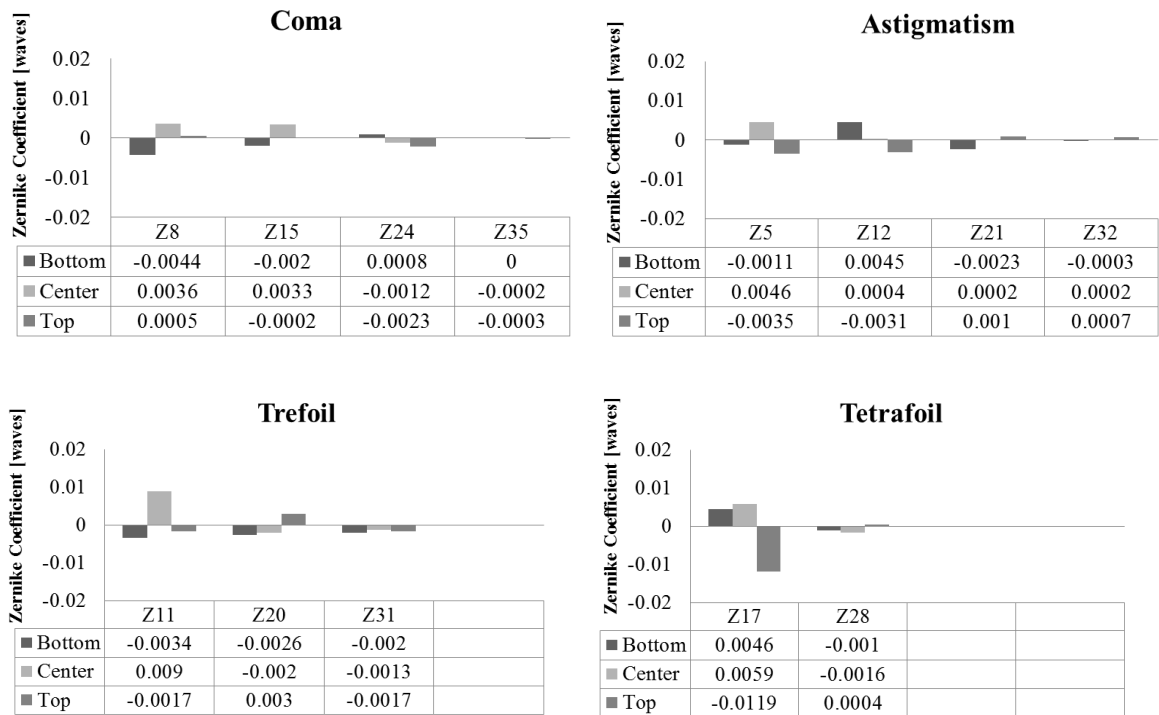


Fig. 3-13 Zernike decomposition of wavefront aberrations of even-order design

この Zernike 展開から、高次アス(Z12)および Tetrafoil(Z17)が大きく減少している一方

で、もともとの Seidel 収差のバランスは大きく変化していないことが分かる。これらの結果から、奇数次非球面の収差係数に対する考察から予想されるように、奇数次は高次収差を効率よく補正できることが実証された。

3.3.3. 奇数次非球面の展開公式との関係

最後に、第 2 章で導出した奇数次非球面の偶数次展開公式との関係について考察する。第 2 章では、奇数次非球面の偶数次展開の理論式を導いた。また、その結果を通じ、この展開公式が数学的には、形状のみならず、傾きについても元の非球面を再現することを示した。換言すれば、奇数次非球面は偶数次非球面と等価ということになる。しかし、実際の設計においては、利用可能な展開係数の数は限られているため、有限個の項で実用上問題のない精度まで近似できるかという疑問が生じる。

2.7 節では、可視域($\lambda=550\text{nm}$)における Schmidt camera に対して、Schmidt surface として奇数次非球面設計を行った。その形状を展開公式により偶数次非球面により表現したところ、12 次まで用いることによって、波面収差が十分に再現することを確認した。

本節では EUV 領域($\lambda=13.5\text{nm}$)に対して同様の検討を行う。一般次数の非球面 $r^{2\alpha} = t^\alpha$ に対する展開公式(2-21)を再掲する。

$$t^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} a_n Q_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)\Gamma(\alpha+1)^2}{\Gamma(\alpha+n+2)\Gamma(\alpha-n+1)} Q_n(t). \quad (3-15)$$

この公式を用いて、奇数次非球面 M3, M4 の形状を偶数次非球面で表現する。各奇数次項を 30 次(これは CodeV の Odd asphre の最高次である)までの偶数次非球面により展開することを検討する。設計に用いた 1 次から 11 次までの奇数次非球面の展開係数を Table 3-11 に示す。

Table 3-11 Expanded coefficients for odd-order surfaces

N	R	r^3	r^5	r^7	r^9	r^{11}
0	3.128055E-02	-9.245482E-05	1.388211E-06	-4.983320E-08	3.329260E-09	-3.650024E-10
2	7.976540E+00	7.072794E-02	-5.899895E-04	1.779045E-05	-1.091521E-06	1.137589E-07
4	-1.675073E+02	4.455860E+00	1.115080E-01	-1.867997E-03	9.627219E-05	-9.214472E-06
6	2.758287E+03	-4.076287E+01	3.060275E+00	1.537985E-01	-4.403561E-03	3.540405E-04
8	-2.955308E+04	3.668658E+02	-1.530138E+01	2.306977E+00	1.981603E-01	-8.851012E-03
10	2.123881E+05	-2.421314E+03	8.483083E+01	-7.105489E+00	1.831001E+00	2.453500E-01
12	-1.061941E+06	1.150872E+04	-3.702933E+02	2.605346E+01	-3.729816E+00	1.499361E+00
14	3.795979E+06	-3.977874E+04	1.216678E+03	-7.861612E+01	9.453943E+00	-2.111346E+00
16	-9.869546E+06	1.009768E+05	-2.986392E+03	1.834376E+02	-2.025845E+01	3.800422E+00
18	1.881449E+07	-1.890718E+05	5.459453E+03	-3.242584E+02	3.404197E+01	-5.864849E+00
20	-2.626107E+07	2.602517E+05	-7.381180E+03	4.280211E+02	-4.344994E+01	7.116017E+00
22	2.650911E+07	-2.597989E+05	7.266354E+03	-4.138716E+02	4.101917E+01	-6.495838E+00
24	-1.882531E+07	1.828215E+05	-5.056702E+03	2.840296E+02	-2.764996E+01	4.275039E+00
26	8.915846E+06	-8.593126E+04	2.355235E+03	-1.308252E+02	1.255941E+01	-1.907325E+00
28	-2.527167E+06	2.420105E+04	-6.582955E+02	3.623438E+01	-3.440012E+00	5.151838E-01
30	3.241745E+05	-3.087377E+03	8.344261E+01	-4.558181E+00	4.288184E-01	-6.350921E-02

ここで得られた展開係数は、一般に考えられている近似多項式とは異なり、次数により振動しているように見て取れる。これは次のことを示唆する。すなわち、奇数次非球面の偶数次による表現は、Zernike 展開を通じた展開は収束し、傾きをも十分に近似している。しかし、有限個の Zernike 多項式の各項を並べ替えることにより、偶数次非球面の形にした場合の係数は発散してしまう。

以上の事実にかかわらず、有限個の項の並べ替えには収束性の問題は生じないはずなので、Table 3-11 を用いて M3, M4 の設計形状を偶数次近似する。例として、M3 の形状と近似形状との差を Fig. 3-14 に示す。

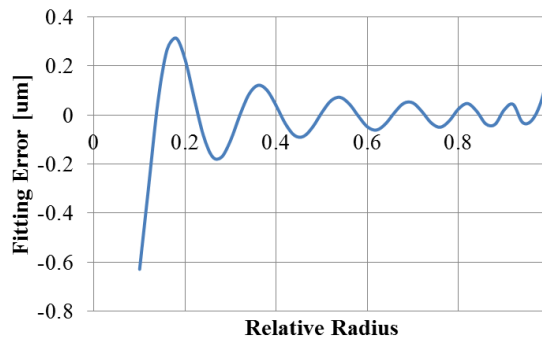


Fig. 3-14 Difference between the designed shape and expanded shape of M3

この図では省略されているが、奇数次非球面の偶数次近似では、軸上付近の近似誤差が最も大きくなる。このことは、軸上を用いる面に奇数次非球面を用いても逆効果のほうが大きくなることを示唆している。しかし、今回の M3, M4 においては、軸上は使われておらず、その有効口径は輪帯状であるため、比較的誤差が小さい領域である。

そこで、以上の公式によって M3, M4 を偶数次によって近似する。その結果としての透過波面収差を Fig. 3-15 に示す。

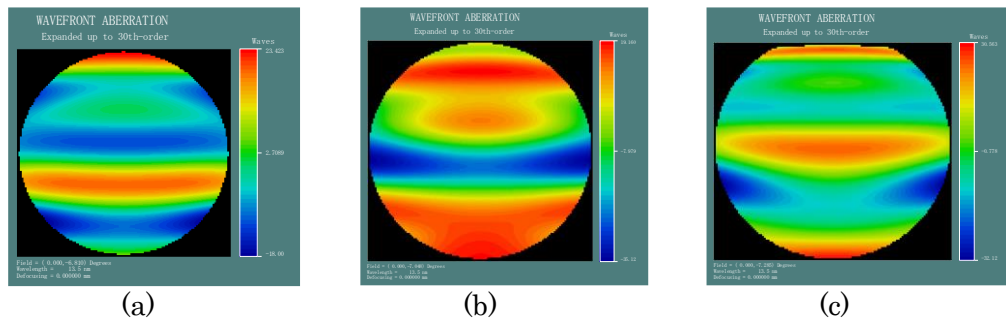


Fig. 3-15 Wavefront aberration by expanded shape

すなわち、この設計においては、偶数次非球面は奇数次非球面の代用にはならない。この結果は 2.7 節で議論した結果と一見矛盾するようであるが、実は両方とも正しい。奇数次非球面は、偶数次非球面によって十分に近似できるが、その要求精度は、設計波長や要求される透過波面収差の大きさによる。

2.7 節で例として取り上げた Schmidt surface は $\lambda=550\text{nm}$ で設計したため、要求される精度がそれほど厳密ではなく、20 次までの偶数次非球面により、3 次非球面を透過波面まで含めて再現することができた。一方、本節での EUVL 投影光学系においては、使用波長が $\lambda=13.5\text{nm}$ であるため、形状に要求される精度が $1/40$ であり、実用的に用いられる 30 項の偶数次非球面では十分に近似することはできなかった。

以上の考察により、波長が極めて短い場合や、波面収差に要求される精度が極めて高い場合には、奇数次非球面は実用的な項数の偶数次非球面で表すことができないことが分かった。さらに、3.2 の考察で求めた奇数次非球面の収差係数は偶数次非球面のそれと大きく異なる。以上を要約すると、奇数次非球面は、要求精度が高く、かつ軸上を用いない光学系において特に有効であることが分かった。

3.4. 第 3 章のまとめ

本章では、奇数次非球面の収差特性について考察した。これまでは、奇数次非球面について漠然と自由度が増えるために設計に有効であるとされていたが、本章の検討を通じ、奇数次非球面の収差係数を求めることにより、奇数次非球面は軸外収差に対して特徴のある収

差上の影響を与えることが示された。通常の偶数次非球面で Seidel 収差に相当する低次の項であっても、高次アスや Tetrafoil といった高次収差を含んでおり、軸外のみ使う光学系（例えば EUVL 投影光学系）に奇数次非球面を利用することにより、軸外の高次収差を効率的に補正することができるようになることを理論的に示した。

この理論的予測を、EUVL 投影光学系を例にとって実証した。通常の偶数次設計では、高次アスや Tetrafoil といった軸外の高次収差が残留してしまうことで、Strehl 比 0.999 を達成することができなかった。そこで、軸外光束のみが通過する面に、実際に奇数次非球面を導入して設計を行った。その結果、3.2.2 節で予想されたように、高次のアス、Tetrafoil を効率的に補正することができ、Strehl 比 0.999 を達成することができた。

本章の最後に、2 章で導出した奇数次非球面の Zernike 展開公式との関係を検討した。数学的には、奇数次非球面は偶数次非球面で完全に近似され¹⁷、2.7 節の設計例で確認したように、可視域では Schmidt Camera の透過波面収差まで含めて完全に再現することを確認した。しかし、同様の検討を 3.3 節で設計した EUVL 投影光学系に対して適用したところ、設計ソフトで扱いうる最高次（30 次）まで用いても、残存する形状誤差のため、透過波面は再現しなかった。すなわち、光学系の使用波長が極端に短い場合や、要求される精度が非常に高い場合（EUVL 投影光学系はその両方である）、実用的には奇数次非球面は偶数次非球面で表現しきれないことが分った。

以上の検討により、EUVL 投影光学系において、奇数次非球面は収差係数の考察と実際の設計により収差補正上有効であることが実証された。それだけでなく、第 2 章で議論した奇数次非球面の偶数次展開公式を通じて、EUVL 光学系のように極端に波長が短く、高精度が要求される系では、逆に奇数次非球面を偶数次非球面で十分な精度で表しきれないことも分かった。すなわち、これまで漠然と有効性が予想されていた奇数次非球面について、有効性が理論的背景からも示された。なお、ここで示した EUVL 投影光学系のみならず、他の軸外を主に使う光学系（プロジェクタ光学系や軸外し望遠鏡を含むであろう）でも、奇数次非球面は同様に有効であると考えられる。

参考文献：

[3-1] 1. W. T. Plummer, "Viewfinder for a reflex camera," U. S. Patent No. 3,810,221 (1974).

[3-2] M. Amano, "Projection optical system and projection display apparatus," U. S. Patent No. 8,967,812 (2015)

[3-3] K. Sato, "Wide angle zoom lens including at least one aspheric lens surface," U. S. Patent No. 6,982,834 (2006)

[3-4] M. Herzberger, Modern Geometrical Optics, Interscience Publishers, New York

¹⁷ ここでいう「完全」とは、形状のみならず、傾きも含めて近似されているということの意味する。換言すれば「傾きを含めた完全性」ということである。

(1958)

[3-5] 松居, 収差論, JOEM

[3-6] Y. Matsui and K. Nariai, *Fundamentals of Practical Aberration Theory*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore (1993)

[3-7] 松居, 5次収差論の実用化に関する研究, Thesis

[3-8] A. E. Conrady, *Applied Optics and Optical Design Part I and II*, Dover Publications, Inc., New York (1957)

[3-9] R. Kingslake, *Lens design fundamentals*, Academic Press, New York (1978).

[3-10] J. M. Sasián, “Theory of sixth-order wave aberrations,” *Applied Optics*, Vol. 49, No. 16 (2010).

[3-11] M. Tanikawa et al., “Effectiveness of odd order aspherical surface,” *Jpn. J. Opt.* 36(11) 646–660 (2007) (in Japanese)

[3-12] S. A. Lerner, J. M. Sasián, and M. R. Descour, “Design approach and comparison of projection cameras for EUV lithography,” *Opt. Eng.* 39(3) 792–802 (March 2000)

[3-13] Y. Li. et al., “Progress of Optical Design for EUV Lithography Tools in BIT,” 2014 EUVL Workshop, (accessed 2 February 2016) [<http://www.euvlitho.com/2014/P56.pdf>]

[3-14] S. Ishiyama et al., “High-order aberration control during exposure for leading-edge lithography projection optics,” *Proc. of SPIE Vol. 9780* (2016) [doi: 10.1117/12.2218840]

4. レンズのへそについての新たな表現方法と、その光学設計・製造への応用 ～奇数次非球面を用いた検討～

4.1. はじめに

レンズ、ミラー、そしてプリズム等の光学素子は、伝統的に、研削・荒ずりそして研磨といった工程で製作される[4-1]。一方、近年では、超精密切削(Super Precision Diamond Turning, SPDT)や磁性流体研磨(magnetorhological polishing, MRF)といった点加工方式も広く用いられるようになってきた[4-1]-[4-6]。前者はプラスチックや赤外光学材料といった柔らかい材質に非球面形状を創成するのに用いられる[4-4]-[4-6]。後者は、ガラス球面レンズに対する超精密仕上げや、小さな非球面を導入するのに用いられる。

これらの加工法に共通する問題として、へそが挙げられる。(center artifact, あるいは center error と呼ばれる[4-7][4-8])。これら回転対称であって、中央部に局在した形状誤差のことである。代表的な干渉図形が[4-7]の Figure 14 や、[4-8]の Figure 2.1, あるいは[4-10]の p.13 に示されている。

へそが光学性能に及ぼす影響は大きい。例えば、広角レンズの前群においては光束が狭くなっているので、中央部に局在した急峻な形状誤差は中心視野の像に大きな悪影響を与える。すなわち、へそは口径に対する広がり小さくても、像質に影響する。それゆえ、へその公差設定は光学設計や製造面でも重要であると考えられる。へその影響は十分には解析されていないので、我々はこの理論的背景を解明しなくてはならない。

光学設計や製造において、光学面の設計形状からのずれは、Zernike 多項式を用いて表現される[4-11]。Zernike 多項式は、F. Zernike によってはじめて導入されたが[4-12]、様々な並べ方が提案されている[4-11][4-13][4-14]。その中で、Fringe Zernike 多項式と呼ばれる特別な 37 項の集合が、実際の形状評価に最もよく使われる[4-15][4-16]。Fringe Zernike 多項式で表せない成分は、ある意味ランダムな成分と考えられ、mid-spatial frequency と呼ばれる[4-17][4-18]。しかしながら、へそはあまりに局在しているので、Fringe Zernike で表すことができないにも関わらず、mid-spatial frequency には分類するのは適切でない。というのもへそは、いわゆる mid-spatial frequency と比べて大きい振幅(peak-to-valley; PV)を持っているからである。

これまで、へそについては定量的な議論はあまりなされてこなかった。そこで本章では、新たなへその表現方法について提案する。

まず、へその数学的表現についての検討を行う、我々は局在した形状の表現について、正規分布関数に着目し、これが正確な近似を与えることを見出した。しかし、正規分布関数は通常の光学設計ソフトウェアで扱うことはできない。そこで、これを非球面形状として表現することを検討する。従来の偶数次非球面としては、Taylor 展開と Fringe Zernike 展開が考えられるが、そのいずれも適切な近似を与えない。前者については、正規分布を形式的に Taylor 展開すると、中央から離れるにつれて発散する級数になってしまう。また、Fringe

Zernike 多項式によっては、前述したように次数が低いため、局在した形状を表すことができない。

そこで、我々は 2 章、3 章で検討した奇数次非球面の特殊な性質に着目した。というのも、場合によっては、奇数次非球面は現実的な項数の偶数次非球面で十分に表現しきれないため、面形状を表現するうえで特異な性質を持っていると考えられるからである。また、奇数次非球面は通常的设计ソフトウェアによって容易に扱える。実際、多項式近似の方法によって、正規分布関数は奇数次非球面で表現可能であることを示すことができた。さらに、この結果を用いて、実際のへそ形状の近似結果から、point-spread-function (PSF) や modulation-transfer-function (MTF) を容易に計算できる。

実際に光学設計ソフトで評価するときは奇数次非球面を用いて行うことになるが、正規分布関数は高さと半値幅という二つのパラメータで表現できるので、簡明で実際的なへその図面表記ができる。この方法は、へその影響を定量的に示す手法の一つとして光学設計開発に有効なものであるといえる。

4.2. へその数学的表現

4.2.1. Fringe Zernike 多項式による近似不可能性

光学素子の製造においては、製造誤差を Fringe Zernike 多項式で表現するのが一般的である。しかしながら、へそをこの方法で表すことができない。このことを数値的に示すため、精密切削された非球面レンズを例として取り上げる。

面形状は、3次元座標測定器 UA-3P にて直交する 2 方向について測定を行った。2 方向の面形状はほとんど一致しているので、面形状は回転対称であると仮定してよい。Fig. 4-1 にその形状の例、及びその Fringe Zernike 多項式による近似を示す。

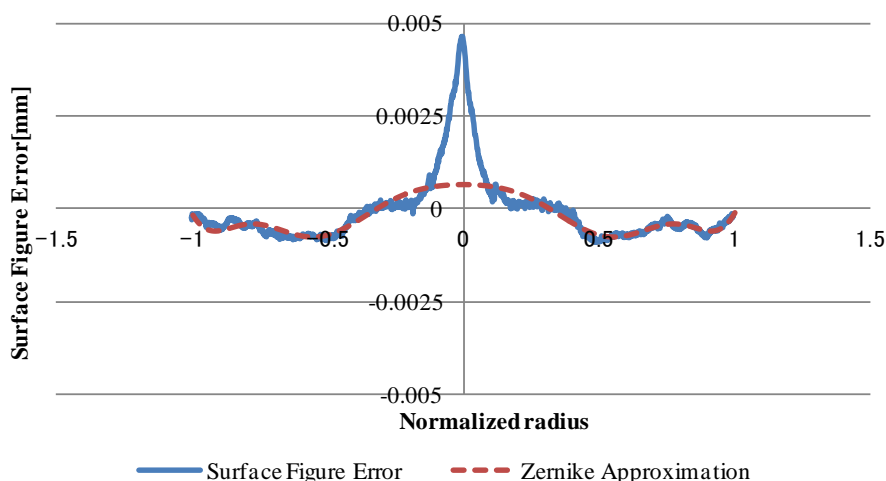


Fig. 4-1 An example of surface figure error and its Zernike approximation

Fig. 4-1 において横軸は正規化された動径座標であり、実際の寸法は直径 26mm に対応する。縦軸は面形状の設計値からのずれであり、単位は mm である。青の実線は実際の測定形状である、赤の点線は測定形状を回転対称な Fringe Zernike 多項式($Z_1, Z_4, Z_9, Z_{16}, Z_{25}, Z_{36}, Z_{37}$)によって最小自乗近似した結果である。

Fig. 4-2 に測定形状から近似形状を引いた残差を示す。

Fig. 4-2 から見てとれるように、へその特徴的な形状は、Fringe Zernike 多項式によっては十分に表現されていない。したがって、へその形状を表すための数学的モデルが新たに必要になる。

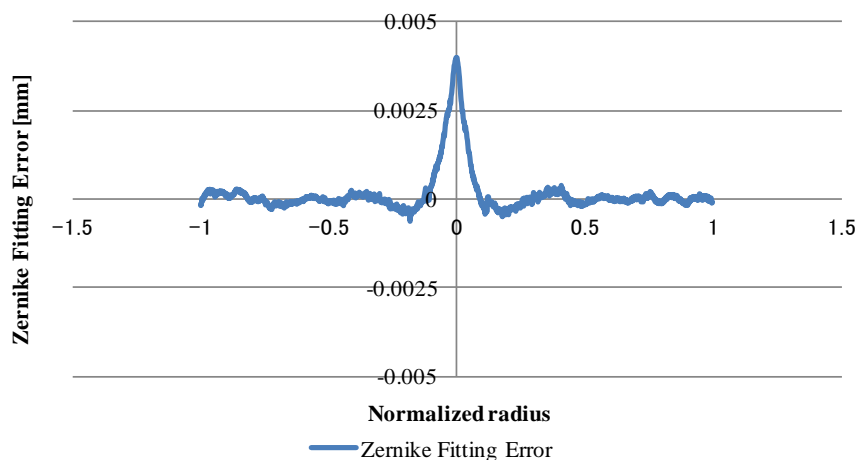


Fig. 4-2 Fitting error of center artifact using 12th-order Fringe Zernike Polynomials

4.2.2. へその数学的モデルの検討

へその形状を数学的に表すため、以下のように正規分布関数をもとにした関数による表現を検討する。

$$f(r) = A \exp\left(-\frac{r^2}{\sigma^2}\right), \quad (4-1)$$

この関数の最大値は A であり、最小値は 0 である。また半値全幅(full width at half maximum; FWHM)は、正規分布関数の性質から 2.53σ である。すなわち、 σ は関数の広がりの幅を表しており、 σ が小さくなればなるほど、急峻なへそを表現することになる。

Fig. 4-2 の形状においては、最小自乗法により、 $A=0.0036$, $\sigma=0.054$ と求まる。Fig. 4-3 に Zernike 近似結果を示す。

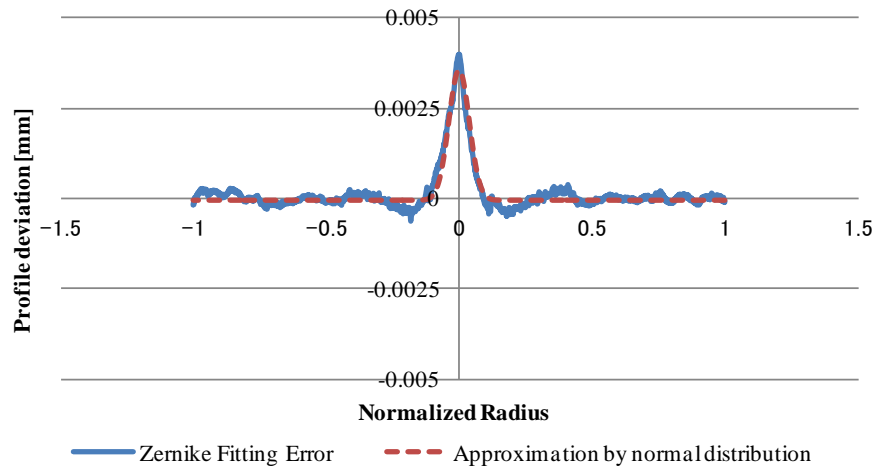


Fig. 4-3 Zernike fitting error and its approximation by Eq. (1)

Fig. 4-3 における近似の残差を Fig. 4-4 に示す。すなわち、Fig. 4-3 における Zernike Fitting Error (青の実線) から正規分布による近似(赤の点線)を引いたものが示されている。この結果から見て取れるように、最大近似誤差はサブミクロンの精度であり、切削非球面の形状精度として満足できるレベルにある。すなわち、正規分布関数によるへその表現は妥当であるといえる。

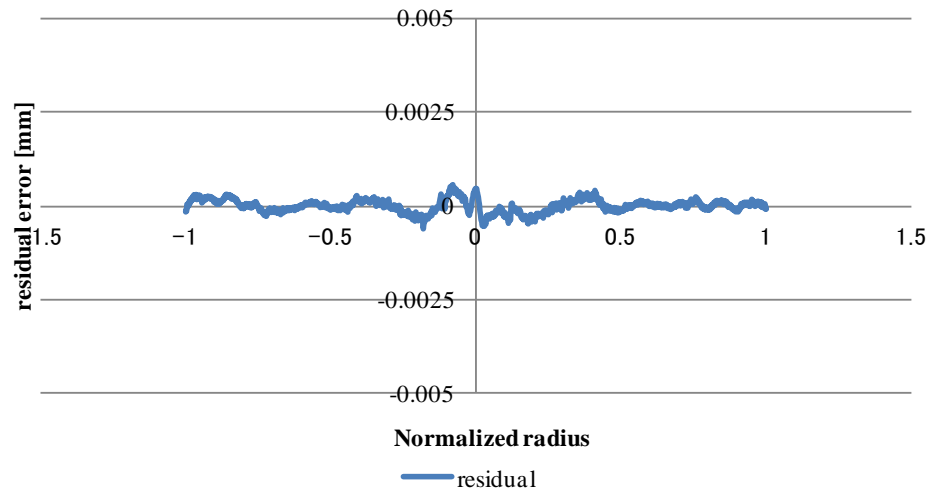


Fig. 4-4 The residual of an approximation using normal distribution function.

4.2.3. 正規分布関数を偶数次多項式で表すことの不可能性

前節で、へその形状を正規分布関数で表すことの検討を行い、それが妥当であることを示した。しかし、一般の光学設計ソフトウェアでは、正規分布関数をそのまま扱うことはできないため、(4-1)を扱いに適した形に書き改める必要がある。

ここでは、正規分布関数が通常の偶数次非球面で表現できないことを示す。式(4-1)を偶数次非球面で表すには、Taylor 展開による方法と Zernike 展開による方法の二通りが考えられるが、どちらの方法によっても正規分布(ひいてはへそ形状)を適切に示すことができない。

まず最初に、(4-1)の Taylor 展開を検討する。

$$\exp\left(-\frac{r^2}{\sigma^2}\right) \sim 1 - \frac{r^2}{\sigma^2} + \frac{1}{2} \frac{r^4}{\sigma^4} - \frac{1}{6} \frac{r^6}{\sigma^6} + \dots + \frac{(-1)^n}{n!} \left(\frac{r^2}{\sigma^2}\right)^n + \dots \quad (4-2)$$

しかしながら、この式はいかなる有限個の項をとっても十分に元の関数近似することができない。例えば、最初の 15 項(30 次非球面¹⁸⁾を取り、元の関数において $\sigma=0.2$ とした関数と比較した結果を Fig. 4-5 に示す。

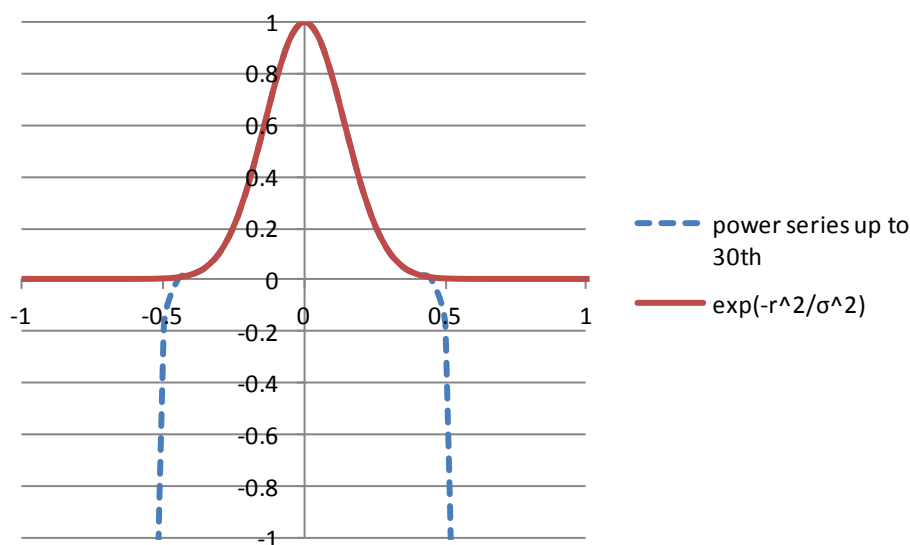


Fig. 4-5 Comparison of the power series up to 30th with the normal distribution function for $\sigma=0.2$

すなわち、(4-1)の Taylor 展開によって正規分布を表現することは適切ではない。

次に、Zernike 展開による(4-1)の表現を考察する。これは、4.2.1 節で実際の面形状に対して議論したように、適切に表現できないことが予想される。そこで、この結果を(4-1)に基づき、数学的に不可能性を実証する。

¹⁸ これは代表的な光学設計ソフトウェアである Code-V の偶数次非球面で扱える最大次数である。

回転対称な Zernike 多項式を(4-3)に示す。

$$Q_n(t) = \frac{(-1)^n}{n!} \frac{d^n}{dt^n} t^n (1-t)^n \quad (4-3)$$

ここで、 t は動径座標 r の二乗である。式(4-3)の最初の 6 項は、Fringe Zernike の 37 項のうち、回転対称成分に対応するが、それを Table 4-1 に示す。

Table 4-1 Relationship between $Q_n(t)$ of Eq. (4-3) and Fringe Zernike polynomials

Definition in Eq.(4-3)	Fringe Zernike	Description
$Q_0(t)$	Z_1	1
$Q_1(t)$	Z_4	$2r^2 - 1$
$Q_2(t)$	Z_9	$6r^4 - 6r^2 + 1$
$Q_3(t)$	Z_{16}	$20r^6 - 30r^4 + 12r^2 - 1$
$Q_4(t)$	Z_{25}	$70r^8 - 140r^6 + 90r^4 - 20r^2 + 1$
$Q_5(t)$	Z_{36}	$252r^{10} - 630r^8 + 560r^6 - 210r^4 + 30r^2 - 1$
$Q_6(t)$	Z_{37}	$924r^{12} - 2772r^{10} + 3150r^8 - 1680r^6 + 420r^4 - 42r^2 + 1$

関数 $f(t)$ の Zernike 展開は以下の式で与えられる。

$$f(t) = c_0 Q_0(t) + c_1 Q_1(t) + c_2 Q_2(t) + c_3 Q_3(t) + c_4 Q_4(t) + c_5 Q_5(t) + c_6 Q_6(t), \quad (4-4)$$

ここで、 a_n は Fringe Zernike 係数であり、式(4-3)の直交性から次のように計算される。

$$c_n = (2n + 1) \int_0^1 f(t) Q_n(t) dt \quad (4-5)$$

関数 $f(t)$ として、正規分布関数 $\exp(-r^2/\sigma^2)$ をとる。すなわち、 $t = r^2$ なので、 $f(t) = \exp(-t/\sigma^2)$ とおく。式(4-5)により、係数 a_n は以下の式で計算される。

$$c_n = (-1)^n \frac{(2n + 1)}{n!} \int_0^1 \exp(-t/\sigma^2) \frac{d^n}{dt^n} t^n (1-t)^n dt. \quad (4-6)$$

この計算結果を Table 4-2 に示す。

Table 4-2 Fringe Zernike coefficients of $\exp(-r^2/\sigma^2)$

n	c_n
0	$\sigma^2(1 - e^{-1/\sigma^2})$
1	$6\sigma^4(1 - e^{-1/\sigma^2}) - 3\sigma^2(1 + e^{-1/\sigma^2})$
2	$(60\sigma^6 + 5\sigma^2)(1 - e^{-1/\sigma^2}) - 30\sigma^4(1 + e^{-1/\sigma^2})$
3	$(840\sigma^8 + 84\sigma^4)(1 - e^{-1/\sigma^2}) - (420\sigma^6 + 7\sigma^2)(1 + e^{-1/\sigma^2})$
4	$(15120\sigma^{10} + 1620\sigma^6 + 9\sigma^2)(1 - e^{-1/\sigma^2}) - (7560\sigma^8 + 180\sigma^4)(1 + e^{-1/\sigma^2})$
5	$(332640\sigma^{12} + 36960\sigma^8 + 330\sigma^4)(1 - e^{-1/\sigma^2}) - (166320\sigma^{10} + 4620\sigma^6 + 11\sigma^2)(1 + e^{-1/\sigma^2})$
6	$(8648640\sigma^{14} + 982800\sigma^{10} + 10920\sigma^6 + 13\sigma^2)(1 - e^{-1/\sigma^2}) - (4324320\sigma^{12} + 131040\sigma^8 + 546\sigma^4)(1 + e^{-1/\sigma^2})$

第 4.2.1 節で実際のへそ形状に対して Zernike 近似を行うことは適していないことを実証した。それゆえ、ここで正規分布によりモデル化したへそ形状も Zernike 展開によって表現しきれないと予想される。一方、第 2 章で議論したように、Zernike 多項式は完全系をなすので、任意の連続関数は Zernike 多項式によって十分に近似できるはずである。しかし、十分な近似が実用的な項数によって可能かどうかは、また別の問題である。そこで念のため広がり小さな正規分布関数の Zernike 展開が不適切であることを数値的に実証する。

正規分布関数に対して、広がり狭い (σ が小さい) 場合において、Zernike 多項式による近似が必ずしも十分でないことを示す。 $\sigma=0.2, 0.1, 0.05$ に対して、Table 4-2 を計算した結果を Table 4-3 に示す。

Table 4-3 Fringe Zernike Coefficients for normal distribution function

Sigma	0.2	0.1	0.05
c_0	0.040000	0.010000	0.002500
c_1	-0.110400	-0.029400	-0.007463
c_2	0.155840	0.047060	0.012313
c_3	-0.170330	-0.062012	-0.016982
c_4	0.157875	0.073546	0.021400
c_5	-0.128731	-0.081267	-0.025508
c_6	0.094161	0.085104	0.029253

また、ここで得られた係数により求められた近似関数と、元の関数との比較を Fig. 4-6 に示す。

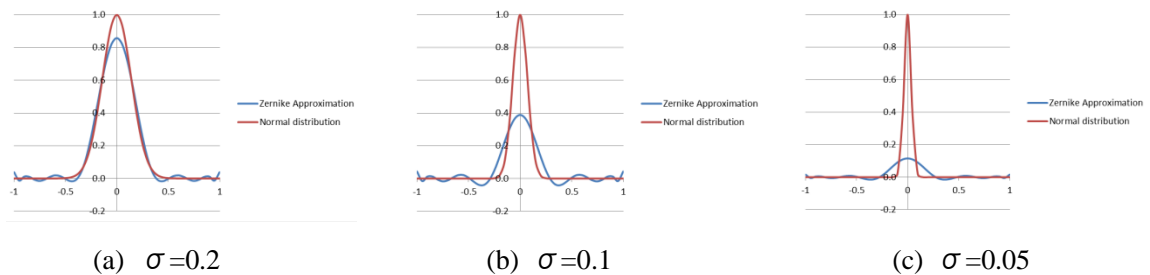


Fig. 4-6 Comparison of Normal distribution functions for $\sigma=0.2, 0.1, 0.05$ and their Fringe Zernike expansion

この結果によると、 $\sigma=0.2$ といった比較的幅の広い正規分布関数に対しては、Fringe Zernike 多項式により面形状がほぼ近似できているが、 $\sigma=0.1, 0.05$ のように幅が狭くなるにつれ、急速に近似精度は落ちている。一方、実際のへそ形状は

Fig. 4-2 でも見て取れるように、 $\sigma=0.05$ 以下になる可能性は十分にある。したがって、へそ形状を Fringe Zernike で表現することは必ずしも適切ではない。

以上のように、正規分布関数で表現されたへそは、偶数次 Taylor 展開によっても、Fringe Zernike 展開によっても形状を十分に示すことが困難であることが示された。それゆえ、これらの展開の帰結である偶数次展開によっても表現することができないことが結論できる。

4.3. 奇数次非球面によるへそ形状の近似

第2章、第3章では、奇数次非球面の数学的基礎について議論し、奇数次非球面が偶数次非球面や Zernike 多項式とは異なる数学的特性を持っていることを示した。そこで、本節では奇数次非球面の持つ自由度に着目し、正規分布関数を奇数次非球面で表現することを検討する。もし、正規分布関数、ひいてはへそ形状が実用的な項数の奇数次非球面で表現できれば、光学設計ソフトウェアで容易に扱うことができるので、へその光学性能におよぼす影響が定量的に評価することができるようになる。

Fig. 4-7 に示す一般の曲線について、有限個の点の座標を用いて多項式近似を求める。

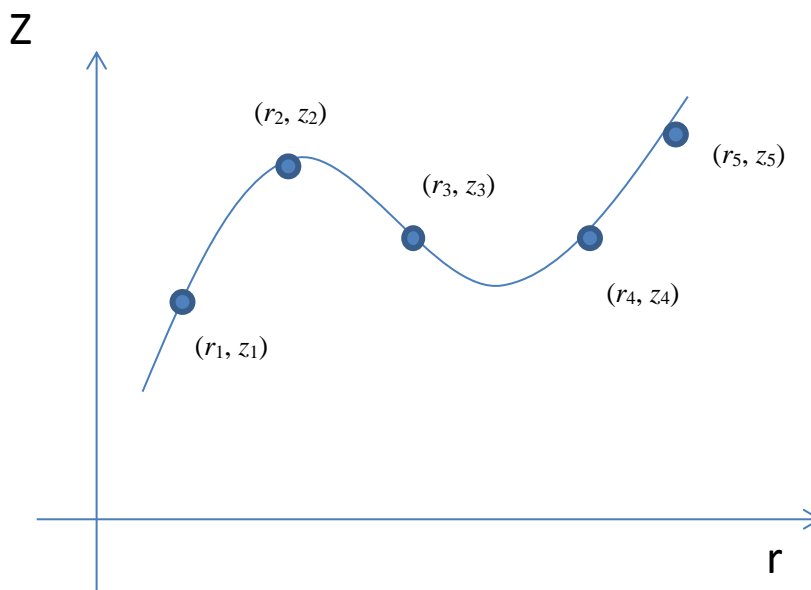


Fig. 4-7 An approximation for a general curve by a polynomial

式(4-7)に一般の N 次非球面を示す。

$$g(r) = a_0 + a_1|r| + a_2|r|^2 + a_3|r|^3 + \dots + a_N|r|^N \quad (4-7)$$

曲線 $z = g(r)$ が $N+1$ 個の点 (r_k, z_k) $k = 0, 1, \dots, N$ を通るための条件 (連立方程式) を解くことで、係数 a_k を求めることができる。

$$\begin{cases} a_0 + a_1 r_0 + a_2 r_0^2 + a_3 r_0^3 + \dots + a_N r_0^N = z_0 \\ \vdots \\ a_0 + a_1 r_N + a_2 r_N^2 + a_3 r_N^3 + \dots + a_N r_N^N = z_N \end{cases} \quad (4-8)$$

ここで、関数 $\exp(-r^2/\sigma^2)$ について、区間 $[0,1]$ を N 等分して a_k を求める。つまり、 $N+1$ 個の点を $(r_k, z_k) = (\frac{k}{N}, \exp(-(\frac{k}{N})^2/\sigma^2))$ にとり、方程式(4-8)を解く。このようにして求めた近似関数と、元の関数との最大誤差を、 σ に対してプロットした図を Fig. 4-8 に示す。

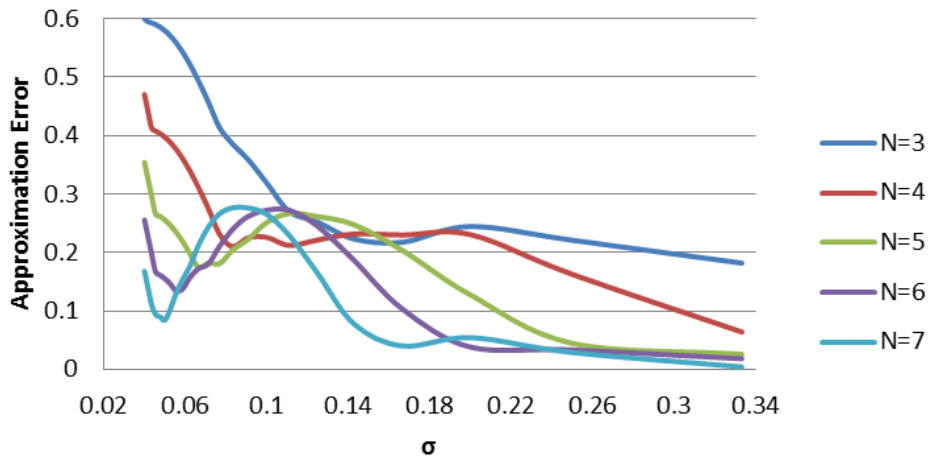


Fig. 4-8 Maximum approximation error vs. sigma

この図から見て取れるように、奇数次非球面の次数を $N=6$ ないし $N=7$ 程度まで取れば、 σ が小さい場合であってもよい近似を与えることが分かる。そこで、例として $N=6$ (6次以下の偶数次・奇数次をすべて用いた奇数次非球面) を取る。Fig. 4-9 に $\sigma=0.2, 0.1, 0.05$ に対して元の関数と近似関数を比較した結果を示す。

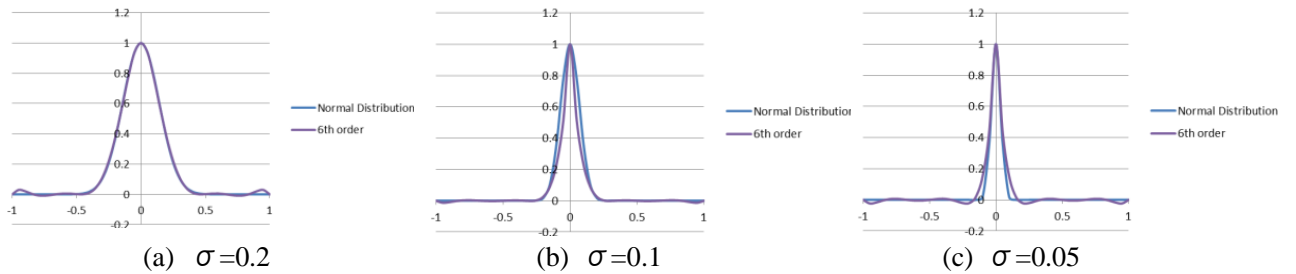


Fig. 4-9 Approximation curves for $\sigma=0.2, 0.1$ and 0.05

このように奇数次非球面を用いることによって、へその数学的モデルである正規分布が十分に表現できることを示すことができた。

4.4. 光学設計による確認

4.4.1. 設計仕様

本章で提案したへその数学的にモデルに基づき、へそにより像質がどのような悪影響を受けるかの議論を行う。この目的のため、Table 4-4 に示す仕様を満たす投射レンズを考える。また、Table 4-5 に設計データを示す[4-19]。このレンズは 9 枚構成であり、両面非球面のプラスチックレンズを 1 枚含む(第二レンズ)。これは、以下の非球面式に含む通常の偶数次非球面である。

$$z = \frac{cr^2}{1 + \sqrt{1 - (1+k)c^2r^2}} + A_2r^2 + A_4r^4 + \dots + A_{12}r^{12}, \quad (4-9)$$

ここで、 c は曲率であり、 k はコーニク係数そして、 r は正規化されていない動径座標である。そして A_n は非球面係数であり、この設計では 12 次まで用いた。設計結果を Fig. 4-10 に示す。

Table 4-4 Design Specifications for Projection Optics

Description	Design Specifications
Magnification	71.9x
Effective F number	2.4
Image Circle	20mm Dia.
Wavelength	Visible (460~630nm)

Table 4-5 Lens Design Data

Surf	Radius	Thickness	Glass	Conic
OBJ	Infinity	0		
1	Infinity	2000		
2	28	3	S-FSL5	
3	14.71695	5		
4	14.06305	3	PMMA	-0.4915
5	6.768793	20.10655		-1.096
6	44.69331	3.789097	S-LAH51	
7	-68.9588	12		
STO	Infinity	15		
9	1000	2	S-NBH51	
10	21.67184	11	S-FPL51	
11	-14.7272	2	S-LAH63	
12	-29.2365	0.1		
13	65.6066	7.5	S-FPL51	
14	-36.5626	1		
15	68.06173	4	S-TIL26	
16	-1000	7.388574		
17	Infinity	25	S-BSL7	
18	Infinity	3		
19	Infinity	1.05	S-FSL5	
20	Infinity	1.012085		
IMA	Infinity			

Aspherical Coefficients:

	Surface 4	Surface 5
A2	0.000000E+00	0.000000E+00
A4	-3.483769E-04	-3.948001E-04
A6	2.620559E-06	4.177955E-06
A8	-1.516800E-08	-2.989014E-08
A10	4.881588E-11	1.045121E-10
A12	-6.235464E-14	-7.943251E-14

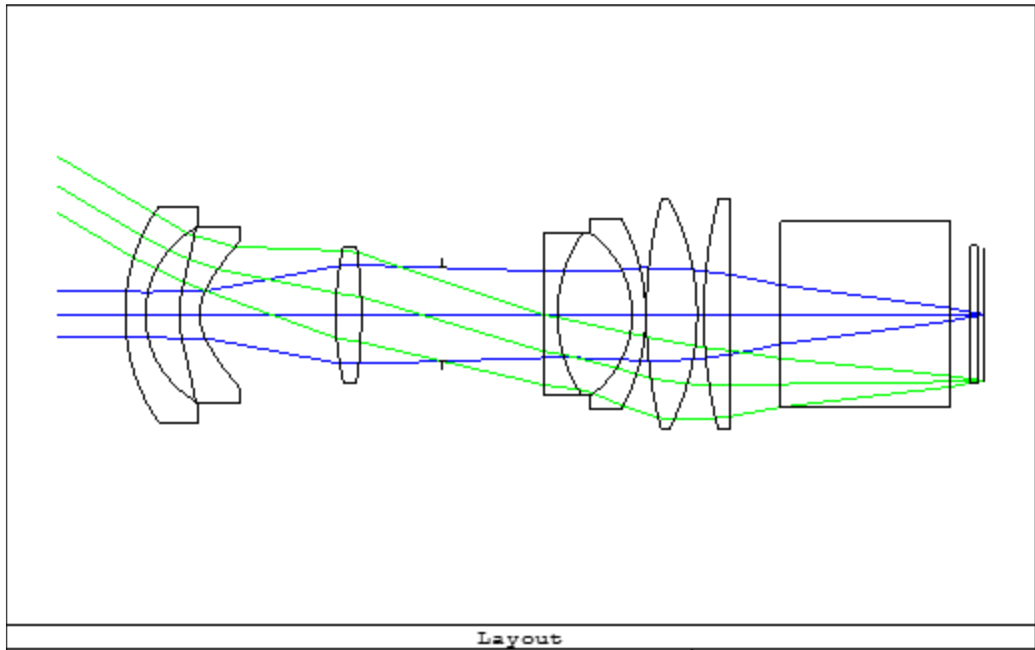


Fig. 4-10 Optical configuration of the lens represented in Table 4-5

ここで、光学性能について議論する。表示素子の画素は 10 μ m であるため、ナイキスト周波数は 50 本/mm である。そこで、Fig. 4-11 に、最大周波数をナイキスト周波数の 2 倍にとった MTF カーブを示す。ここで横軸は空間周波数であり、縦軸は MTF 値である。この結果より、非球面を利用することにより、簡易な構成で優れた結像性能を得ることができる。しかしながら、非球面の製作において、へそが発生した場合、結像性能に大きく悪影響を受けるが、この現象を定量的に議論する必要がある。

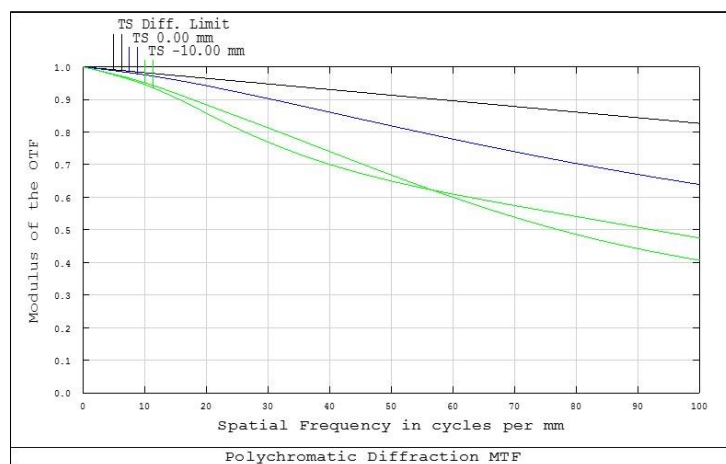


Fig. 4-11 MTF curve for the design described in Table 4-4 (Blue line: on-axis, Green-line: Marginal Tangential and Radial)

4.4.2. 実際のへそ形状に基づく性能劣化のシミュレーション

ここで題材とするレンズは、Polymethyl-methacrylate (PMMA)のブランク材より直接切削によって創成された。Fig. 4-12 に非球面の設計形状を示す。

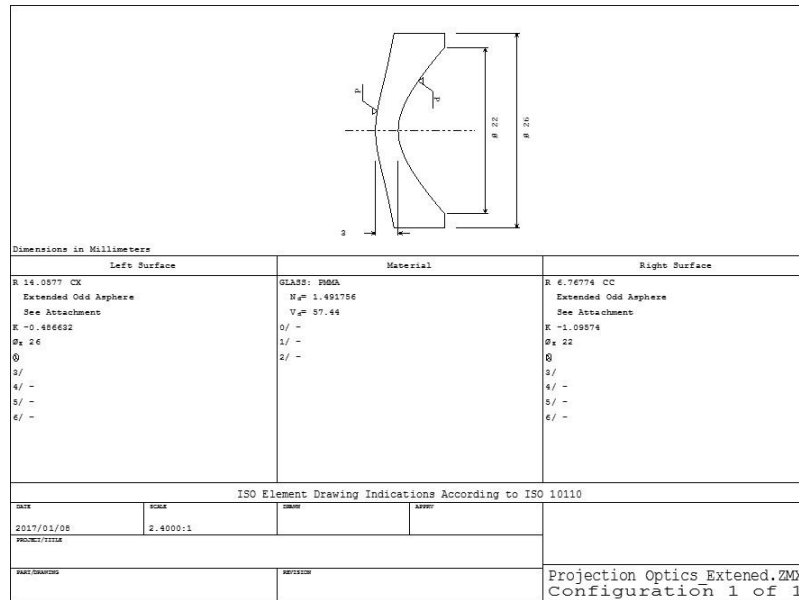


Fig. 4-12 Designed form of the aspherical lens

切削により創成された非球面形状には顕著なへそが見られた。Fig. 4-13 に表面・裏面両方の UA-3P による測定データを示す。また、Fringe Zernike 多項式によって近似できる成分を除き、残ったへそ成分を正規分布(4-1)で近似した結果を Fig. 4-14 に示す。

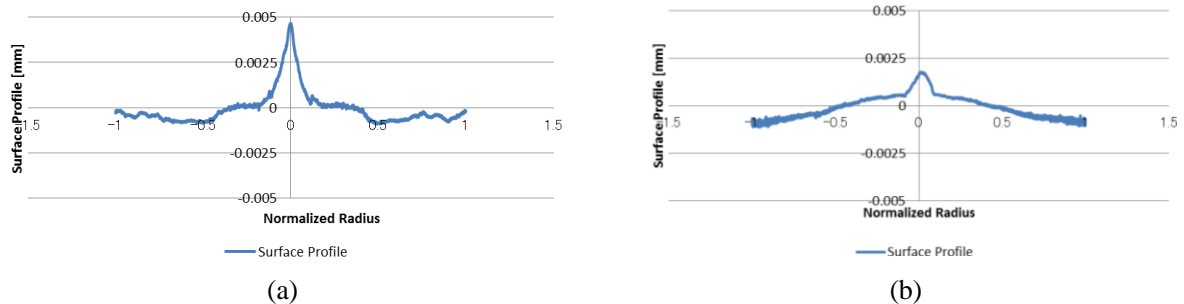


Fig. 4-13 Measured deviation of the turned lens from the designed shape
(a: front surface, b: rear surface)

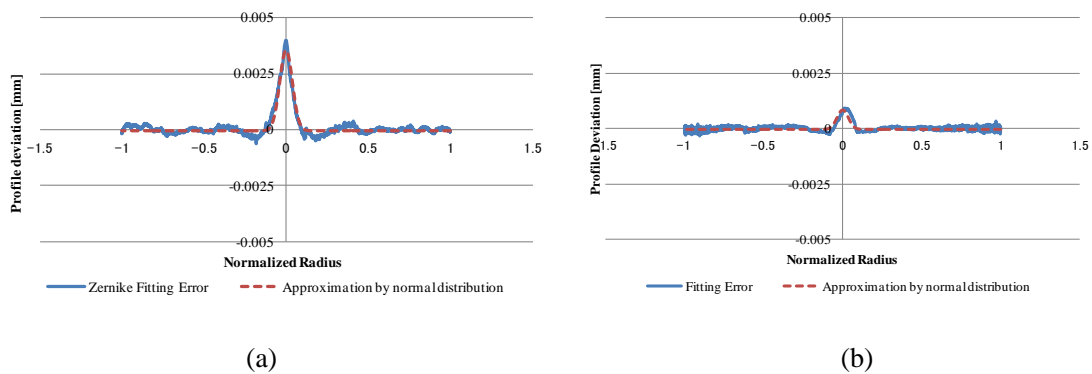


Fig. 4-14 Approximation of center artifacts using by normal distribution function
(a: front surface, b: rear surface)

ここで得られた(4-1)におけるパラメータを Table 4-6 に示す。ここで σ は開口半径を 1 とした時のへその広がり、 A はへその高さに対応する。

Table 4-6 The parameters of actual fabricated lens for Eq. (1)

Parameter	Front Surface	Rear Surface
σ (no dimension)	0.0546	0.0508
A [mm]	0.0036	0.0008

へその高さ A を 1 に正規化し、与えられた σ に対して連立方程式(4-8)を解くことで、高さが 1 のへその奇数次非球面係数を求めることができ。その結果を Table 4-7 に示す。一般の A に対しては、Table 4-7 の正規化された係数に A の値を乗ずることで、非球面係数を求める。このようにして求めた近似多項式と、元の面形状から求めた Zernike 成分を加えたものと、元の面形状との比較を Fig. 4-15 に示す。

Table 4-7 Aspherical Coefficients of Approximation Polynomials

	Front Surface	Rear Surface
a_0	1.000000E+00	1.000000E+00
a_1	-1.469677E+01	-1.469924E+01
a_2	8.117187E+01	8.119338E+01
a_3	-2.204062E+02	-2.204779E+02
a_4	3.148497E+02	3.149646E+02
a_5	-2.266836E+02	-2.267726E+02
a_6	6.476508E+01	6.479178E+01

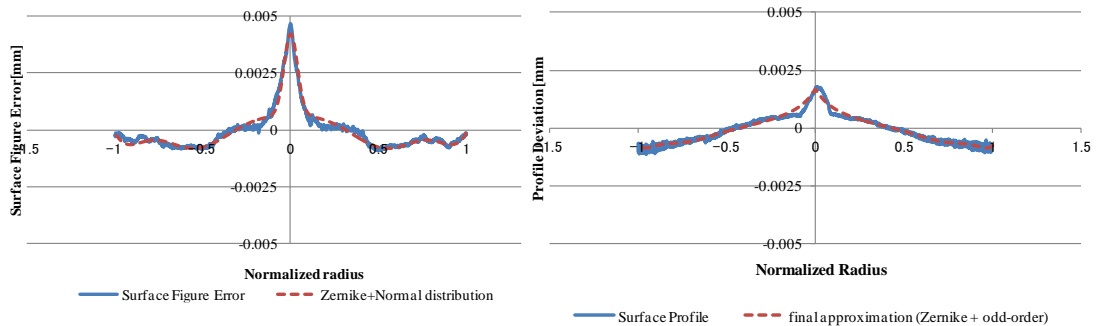


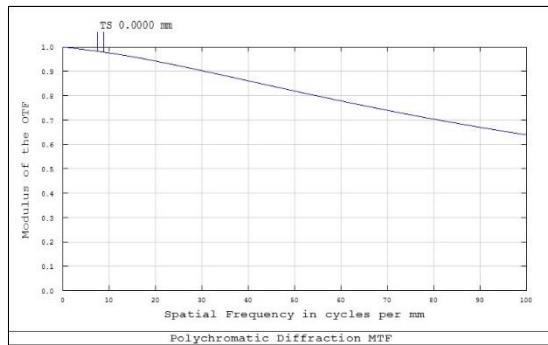
Fig. 4-15 Comparison between actual shapes and approximation using both Zernike polynomials and odd-order surfaces

以上で得られた係数をもとの非球面形状に加えることによって、へそのある非球面形状を模擬することができ、MTF や PSF がどのような影響を受けるかのシミュレーションが可能となる。シミュレーションに用いた面形状の式を(4-10)に示す。

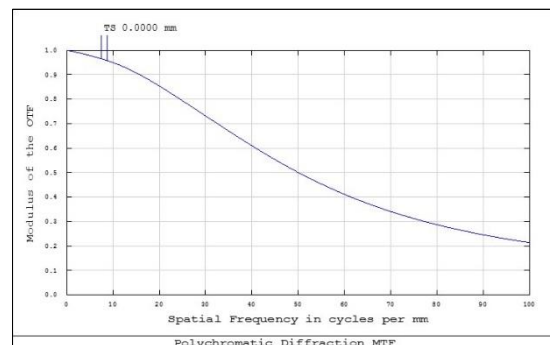
$$\begin{aligned}
 z = & \frac{cr^2}{1 + \sqrt{1 - (1+k)c^2r^2}} \\
 & + \sum_{k=2}^6 A_{2k}r^{2k} \\
 & + \left\{ \sum_{k=1}^6 c_k Q_k(r^2) + \sum_{k=1}^6 a_k r^k \right\}.
 \end{aligned} \tag{4-10}$$

(4-10)において、最初の2項は設計形状を示す。中括弧内の2項が、製造誤差によって付け加わる項である。 $\sum_{k=1}^6 c_k Q_k(r^2)$ は、12次までの回転対称な Zernike 多項式であり、Fringe Zernike の 1,4,9,16,25,36,37 項に相当する。 $\sum_{k=1}^6 a_k r^k$ はへそを奇数次非球面として表現した項である。

Fig. 4-16(a)に MTF の設計値、(b)にへそを加えた場合の MTF を示す。横軸は空間周波数であり、最大周波数をナイキスト周波数の2倍(100本/mm)に取っているため、これらのグラフを比較することで、へそにより結像性能は大きく悪化していることが分かる。



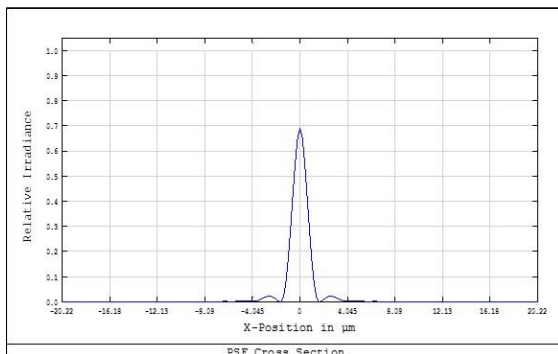
(a)



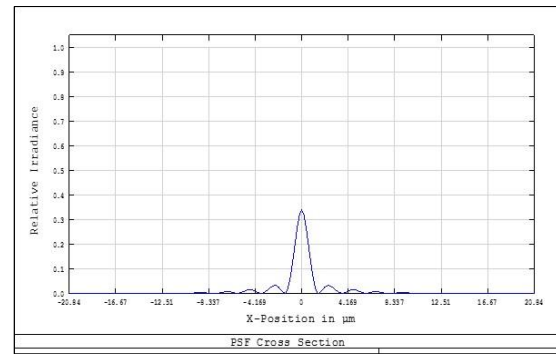
(b)

Fig. 4-16 MTF of axial image (a: designed, b: with center artifact)

次に Fig. 4-17 に設計値とへそを含んだ場合の PSF を示す。シミュレーションの結果では、Strehl 比は 0.71 から 0.46 まで悪化している。さらに設計値の回折像と比較して、中心強度が悪化するのにつれ周辺リングの強度が増加している。



(a)



(b)

Fig. 4-17 PSF of axial image (a: designed, b: with center artifact)

以上の検討により、へその光学性能に及ぼす結果を定量的に評価することが可能になった。

4.5. 第 4 章のまとめ

第 4 章では、奇数次非球面の製造への応用として、へその形状表現を検討した。へそは中心部に局在した回転対称な形状誤差である。通常は、口径の 1 割かそれ未満の広がりしか持たないため、通常面形状の解析に用いられる Fringe Zernike 多項式では正確に表現することができない。そこで、本章ではこれまでにない新しい表現方法を考案した。

まず、中央に局在している形状を表現するため、正規分布関数を面形状のモデルとして用いる。これによって、へその特徴的な形状を表現することができることを見つけた。しかし、

通常の光学設計ソフトウェアでは正規分布関数をそのまま用いることができない。

これを光学設計ソフトウェアで扱うため、多項式非球面を用いた表現を試みる。まず、最も一般的な偶数次非球面で表現することの検討を行った。一般的に関数形状を多項式表現するには、Taylor 展開による方法と、Zernike 多項式で展開を行い、項を並べ替えることで偶数次非球面形状を得る方法がある。前者では、そのまま偶数次多項式が得られるが、よく知られるように、正規分布関数を Taylor 展開した関数は、どのような有限個の項をとっても発散してしまい、元の関数形状を表すことができない。後者については、正規分布関数の Zernike 展開件数を直接計算することで、理論的な検討を行った結果、Fringe Zernike 多項式の範囲では十分に良い近似を与えないことを示すことができた。

そこで、奇数次非球面による正規分布関数の近似を検討した。これには回転対称性から $[0,1]$ の区間で考えればよいが、この点 N 等分することで、 $N+1$ 次の一般次数の多項式（これには当然偶数次も奇数次も含まれるので、光学的には奇数次非球面ということが出来る）によって関数を近似できることが分かる。その結果、現実的な広がりへのそに対しては、6 次ないし 7 次までの奇数次非球面で十分な近似を与えることが分かった。

最後に実際の光学設計において、へその与える影響を確認した。へそは従来より、軸上像のみに特異な影響を与えることが認識されていたが、定量的な評価はほとんどなされていなかったといってよい。本章の検討により、へその形状を正規分布で表現できることがわかり、更にそれを奇数次非球面で近似できることが示された。へそを正規分布関数で表現することは、高さと半値幅という二つのパラメーターで表現できるので、図面表記が簡明になり、設計評価や現場での評価が簡明に行えるようになった。奇数次非球面でへそを表現することで、へその光学性能への影響を定量的に評価できるようになった。それゆえ、本章の検討は光学設計・製造に大きな貢献をするといつてよいであろう。

参考文献：

- [4-1] Katie Schwertz, “An Introduction to the Optics Manufacturing Process,” OptoMechanics (OPTI 521) Report (May, 2008).
- [4-2] Olaf Schmelzer and Roman Feldkamp, “Precision machining of optical surfaces with subaperture correction technologies MRF and IBF,” Proc. SPIE 9633, Optifab 2015, 96330E (October 11, 2015); doi:10.1117/12.2196871
- [4-3] Donald Golini et al. “Magnetorheological finishing (MRF) in commercial precision optics manufacturing,” Proc. SPIE 3782, SPIE Conference on Optical Manufacturing and Testing III (1998)
- [4-4] Richard L . Rhorer and Chris J . Evans, Handbook of Optics, Chapter 14. “FABRICATION OF OPTICS BY DIAMOND TURNING,”
- [4-5] Michael J. Dent, “Production aspects of single point diamond turning,” Proc. SPIE

508. Production Aspects of Single Point Machined Optics (1984)

[4-6] Philip M. Parr-Burman and Paul Shore, "Diamond Turning of Silicon Optics," Proc. SPIE 2775, Specification, Production, and Testing of Optical Components and Systems, 575 (August 19, 1996); doi:10.1117/12.246793

[4-7] K. Myler and D.A. Page, "Factors Governing Surface Form Accuracy in Diamond Machined Components," Proc. SPIE 915 Recent Developments in Infrared Components and Subsystems (1988)

[4-8] Peter R. Hall et al., "Recent achievements in closing the loop in interferometric tool-setting

on a Pneumo-Precision MSG325 diamond turning lathe," Proc. SPIE 2576, International Conference on Optical Fabrication and Testing, (2 August 1995); doi: 10.1117/12.215585

[4-9] Daniel C. Harris, "History of magnetorheological finishing" Proc. SPIE 8016, Window and Dome Technologies and Materials XII, 80160N (21 May 2011); doi: 10.1117/12.882557

[4-10] Nittoh Kogaku K.K., Through the Lens We Capture the Future, http://www.eliteoptics100.com/content/images/Nittoh%20Introduction_FINAL.pdf (final access: May 12, 2017)

[4-11] Daniel Malacara et al., Optical Shop Testing third edition, Wiley-Interscience, A John Wiley & Sons, Inc., Publication (2007), Chap. 13

[4-12] F.Zernike, "Beugungstheorie des schneidenverfahrens und seiner verbesserten form, der phasenkontrastmethode," Physica (1934).

[4-13] M.Born and E.Wolf, Principles of Optics, Second (Revised) Edition. Cambridge University Press, Cambridge, UK(1999)

[4-14] R.J.Noll, "Zernike polynomials and atmospheric turbulence," J. Opt. Soc. Am., Vol. 66, No. 3, (March 1976)

[4-15] Zygo Corporation, MetroPro Reference Guide OMP-0347K, pp. 10-28 to 10-30

[4-16] Chris J. Evans, "P_{Vr}—a robust amplitude parameter for optical surface specification," Opt. Eng. 48(4), 043605 (April 27, 2009). doi:10.1117/1.3119307

[4-17] Masato Shibuya et al., "Classification of undulated wavefront aberration in projection optics by considering its physical effects," Opt. Eng. 46(5), 053001 (May 10, 2007). doi:10.1117/1.2734995

[4-18] John Filherber, "LARGE OPTICS: Mid-spatial-frequency errors: the hidden culprit of poor optical performance," Laser Focus World, 8 Aug, 2013.

[4-19] T. Tanabe, Japan Patent Application 2010-113193

5. 全体のまとめ

本研究において、奇数次非球面の Zernike 展開公式、奇数次非球面の収差特性、そして製造への応用といった、奇数次非球面の数学的基礎と光学設計・開発への応用についての全般的な研究を行った。

まず、第 2 章において、これまで明らかではなかった奇数次非球面の Zernike 展開を具体的に導出した。奇数次非球面は動径座標の奇数次を含む非球面であるが、本質的には回転対称な形状である。

従来検討では、簡便な奇数次非球面の Zernike 展開公式が導出されておらず、収束性を定量的に評価することが困難だった。新たに導出した展開係数はガンマ関数によって表されており、ガンマ関数にかかわる種々の公式が使用可能である。偶数次非球面の場合、ガンマ関数は単純な階乗となり、有限個の項数しか現れない。しかし、奇数次非球面の場合、無限個の項が現れるが、ガンマ関数は階乗によって表現することができる。その結果、各項を不等式によって評価できるようになり、収束性の具体的な議論が可能となった。この結果に従い項数に対する展開公式の誤差の評価を行うことで、有限な項数で十分に一樣収束することが示された。さらに、Zernike の微分公式を用いることによって、奇数次非球面の Zernike 展開公式では微分の近似になっていることを証明した。すなわち奇数次非球面は有限個の Zernike 多項式で近似できることを意味する。さらに、その順番を並べ替えることによって、偶数次非球面によって近似できる。以上の意味では、奇数次非球面は偶数次非球面と等価（完全に表せる）といっていよう。

ここでの検討を、実際の Schmidt surface の光学設計に適用し、有効性を検討した。Schmidt surface は、Schmidt camera の補正板に奇数次非球面を適用した設計である。まず、奇数次非球面を用いた光学設計により、十分に補正した光学系を得た。そして、第 2 章で導出した展開公式により、ここで得た奇数次非球面を 20 次までの偶数次非球面で表現し、光学設計評価プログラムで光学系の透過波面収差が完全に再現することが確認された。第 2 章の検討により、奇数次非球面は偶数次非球面で完全に表現されることが証明された。

次に、第 3 章において奇数次非球面の収差特性について検討を行った。第 2 章の検討により、奇数次非球面は偶数次非球面で表される可能性を明らかにしたが、その結果は収差特性まで踏み込んだものではなかった。また、奇数次非球面は数学的には偶数次非球面で近似されうるが、必要となる項数は実用的なものとは限らない。その場合、奇数次非球面は本質的に設計で有効であると予想される。第 3 章の検討では、奇数次非球面に入射する（ある物点からの）斜光束に対して波面収差の導出を行った。一般に非球面に入射する光束の波面収差は、一般の光線と主光線との間の光路長差によって与えられる。ここでは、ベース球面に対する非球面量を一般の関数で表すことにより、波面収差は非球面量の Taylor 展開で表されることを導出した。さらにこれを奇数次非球面に適用することにより、具体的に収差係数

を求めることができた。

4次非球面においては、収差論で知られているように（瞳座標のべき乗で分類した）収差係数そのものが Seidel 収差に対応することが知られている。この第3章で述べた方法によっても、従来の収差論と同様に、Seidel 収差との対応が確認できる。この方法を奇数次非球面に適用すると、瞳座標に関して Seidel 収差と同じ次数の低次収差であっても、全く異なる収差特性を得た。例えば、3次非球面の球面収差に相当する波面収差を計算し、従来の収差に分類しなおすと、Seidel 球面収差だけでなく、高次球面収差や高次アス、Tetrafoil が生じることが分かる。このことから、奇数次非球面を設計に利用することにより、高次収差が効率的に補正できると予想した。

以上の推論を実際の光学設計によって確認した。ここで題材とする光学系は EUVL 投影光学系である。従来の偶数次非球面による設計では、最先端露光装置で要求される Strehl 比 0.999 の達成が困難であった。そこで、奇数次非球面を導入した設計を行い、収差補正を試みた。球面収差は開口径の偶数次多項式なので、軸上光束の収差補正に奇数次非球面を使うことは逆効果であると考えられる。また、奇数次非球面の高次導関数は、原点において定義できないので、この観点からも軸上光束の収差補正には適していない。そこで、軸外光束のみが通過する面に奇数次非球面を用いて最適化を行った。その結果、従来の偶数次設計で達成が困難だった Strehl 比 0.999 を達成することができた。偶数次設計と奇数次設計双方の透過波面収差を Zernike 展開し、どの収差を低減できたのかを調べた。従来の偶数次設計では、高次アス、Tetrafoil 等の非対称収差が支配的であったが、奇数次非球面を導入することにより、これらの収差が大幅に低減された。以上の結果は奇数次非球面の収差係数から理論的に予想される結果と一致した。

奇数次非球面の偶数次非球面展開を調べたところ、EUVL 投影光学系では Schmidt surface とは様相が全く異なることが分かった。展開公式を 30 次(これは光学設計ソフト codeV で扱える最大の偶数次非球面次数である)まで取ることにより、奇数次設計の一応の近似形状が得られる。しかしながら、この展開形状をもととの設計に適用すると、EUVL 投影光学系では透過波面収差は全く再現しない。奇数次非球面が高次収差を持つという理論的検討から予測されることではあるが、このように、奇数次非球面は偶数次で理論的には近似可能であるが、実用的には近似可能でない場合があることが確認された。

この第3章では奇数次非球面の特徴的な収差特性を導き高次収差補正の可能性を理論的に示した。次に設計への有効性を実際の光学設計で確認し、さらに展開公式を用いても実用的な項数の偶数次非球面で十分に表すことができないことを示した。それゆえ、奇数次非球面は偶数次非球面にない収差補正自由度があり、設計に有効であると考えられる。

第4章では奇数次非球面の製造面への応用を検討した。奇数次非球面の偶数次展開は、数学的には可能だが、第3章で議論したように、要求精度によっては、必ずしも十分な近似を与えらるゝとは限らない。つまり、奇数次非球面は偶数次非球面にない面形状表現の上での自由度があると考えられる。

第4章で取り上げた題材は「レンズのへそ」である。近年一般化してきた点加工方式（超精密切削やMRF等が含まれる）では、球面や非球面を精密に仕上げることが可能である一方、へそ(center artifact)と呼ばれる特徴的な形状誤差がしばしば発生する。へそは、回転対称な形状誤差であり、口径の中心部に局在しているが、比較的大きな振幅を持ち、中央に局在しているという点で、従来の面くせとは異なる。

へその光学性能に及ぼす影響は極めて大きい。例えば広角レンズの前群にしばしば使われる非球面にへそがある場合、一つ一つの画角に対する光束は狭く、特に軸上光束のみ大きな影響を受ける。その結果、軸上の回折像には特異な回折リングが生じるが、軸外画角への影響は僅少である。

この第4章では、このような性質を持つへそについて、奇数次非球面を用いた解析方法を提案した。へそは中心部に局在した形状を持つため、まずこれを正規分布関数で表現することを試みたところ、へその形状を近似できることが分かった。

一方、通常の光学設計ソフトウェアにおいては、正規分布関数をそのまま用いることはできないため、何らかの多項式形状で表す必要がある。本検討では、まず、正規分布関数のZernike展開の理論式を求めた。Zernike多項式は完全であるので、理論的には連続関数である正規分布関数を一様に（さらには傾きまで含めて）近似することができる。しかし、実際に意味があると考えられるFringe Zernikeの37項(12次の球面収差に対応する)まで用いても、例えば $\sigma=0.1$ のように幅の狭い正規分布関数はFringe Zernikeで表現することはできないことが、実際の展開公式によって証明することができた。

そこで、奇数次非球面による正規分布関数の近似を検討した。一般のN次式について、N個の点を通るような係数を求めるには、点を通るための条件を係数についての一次連立方程式として解けばよい。このようにして、正規分布関数、ひいてはへそ形状を一般次非球面で近似することができることが分かった。

さらに、この数学的モデルによるへそ形状の表現を実際の光学系評価に適用した。実際に測定された面形状を一般次非球面により表現し、MTF並びにPSFを計算した。へその光学性能に及ぼす影響を定量的に見積もることが可能となり、ここで提案した手法は光学設計・製造に大きく貢献できると考える。

本論文で述べた、奇数次非球面の数学的基礎の解明と光学設計・開発への応用についての一連の研究により、これまで深く知られていなかった奇数次非球面の様々な性質を明らかにすることができた。さらに奇数次非球面を実際に光学設計・製造に役立てるための具体的な手法を得ることができ、今後の非球面開発に貢献できると考えている。

6. 謝辞

本論文をまとめるにあたり、終始懇切なるご指導・鞭撻を賜りました東京工芸大学大学院工学研究科 渋谷真人教授に心より感謝申し上げます。本論文の審査過程において、数々の御助言と御指導を賜りました、東京大学生産技術研究所 志村努教授、東京工芸大学大学院工学研究科 中楯末三教授、同陳軍教授、同久米裕一郎教授に心より厚くお礼を申し上げます。本研究における数学的側面については、前原和寿先生に具体的かつ有益な御助言を頂きましたことを御礼申し上げます。

また本研究遂行の機会を頂いた昭和オプトロニクス株式会社 飯田徹取締役役に深く感謝致します。研究を進めるにあたっては、昭和オプトロニクス株式会社技術部 水藤哲部長、長尾克彦部長代理、伯東株式会社電子機器事業部 仲野部長、石葉グループ長、株式会社トプコン技術本部 藤野課長、同雑賀課長、同高田シニアエキスパートには大変お世話になりました。心より御礼申し上げます。

7. 発表論文

学術論文

- 1) T. Tanabe et al., “Convergence and differentiation of Zernike expansion: application for an analysis of odd-order surfaces,” *Opt. Eng.* 55(3), 035101 (2016).
- 2) T. Tanabe and M. Shibuya “Aberration Properties of Odd-order surfaces,” *Opt. Eng.* 55(12) 125107 (2016).
- 3) T. Tanabe et al., “Practical method for evaluating optical image defects caused by center artifacts,” *Opt. Eng.* 56(8), 085103 (2017).

国内学会

- 1) 光学シンポジウム 2016, “奇数次非球面のツエルニケ多項式による展開の収束性と奇数次非球面の有効性”
- 2) 光学シンポジウム 2017, “奇数次非球面が持つ収差特性の理論的解析と設計での確認”