様式第２-１号

論　文　要　旨（課程博士）

（ 和 文 ）　東京工芸大学

学籍番号	1586001	氏　名	田邉　貴大
論文題目	奇数次非球面の数学的基礎の解明と光学設計・開発への応用についての研究		

（２０００字程度）

従来、非球面とは偶数次非球面のことを指していたが、近年、非球面創成技術と光学設計技術の発達により、従来とは異なる非球面表現や複雑な形状の自由曲面と呼ばれる光学面を用いた光学系が一般化している。その中で奇数次非球面は動径座標の奇数次を含む非球面であるため、偶数次非球面の自然な一般化になって分かりやすいが、その理論的基礎や有効性の議論は十分にはなされていない。本研究では、奇数次非球面の数学的基礎を確立するとともに、その収差特性を明らかにし、光学設計・製造への有効性を示すことを主眼としている。

従来研究では、奇数次非球面が偶数次の冪級数で Taylor 展開できないので、奇数次非球面は光学設計に有効であるとされていた[1][2]。この証明は、奇数次非球面を形式的に偶数次で Taylor 展開し、その微分を比較すると矛盾が生じることを用いている。したがって、奇数次非球面は偶数次で Taylor 展開できないだけでなく、偶数次の冪級数で傾きも表現できないことになる。光線追跡では、面形状だけでなく傾きも重要であるため、奇数次非球面には、偶数次非球面にはない光学的特性、換言すれば有効性があると考えられていた。

しかし、ここでの考察は Zernike 多項式の完全性[3]と一見矛盾する。Zernike 多項式は、単位円上で定義された直交多項式系であり、完全であるという性質を持っている。これは、任意の L2 関数が Zernike 多項式の一次結合で表現できることを意味する。奇数次非球面は回転対称な連続関数であるため、明らかに L2 関数であり、したがって回転対称な Zernike 多項式（偶数次非球面）の一次結合で表すことができる。無限和で考えて級数展開の形に並べ替えると係数は収束せず、Taylor 展開不可能なことと一致する。しかし、そのうちの有限和で十分収束したならば、並べ替えることで、奇数次非球面形状は偶数次非球面で表現できることになる。さらに Zernike 多項式の有限和で傾きも十分に近似できるならば、奇数次非球面は偶数次非球面で傾きも含めて表現できることになる。

本論文の２章では、以上二つの一見矛盾する推論に対して、数学的に明確な証明を与える。ここでは、奇数次非球面と Zernike 多項式の内積を直接計算することにより、奇数次非球面の Zernike 展開の明確な式を初めて導出した。結果的には、展開係数はガンマ関数で表現可能であり、この結果により奇数次非球面の Zernike 展開は一様収束であることが導かれる。一様収束とは、考えている範囲内（ここでは[0,1]）での近似誤差の最大値が 0 に近づくということで、非常に強い収束であることが言える。さらに微分の Zernike 展開を計算することにより、この展開は微分(傾き)の近似にもなっており、さらに特殊な場合を除き一様収束することを示した。

以上の検討により、奇数次非球面は回転対称な Zernike 多項式の有限和により、傾きも含めて「理論的には」完全に近似できることが分かった。回転対称な Zernike 多項式が偶数次多項式に他ならないため、奇数次非球面は偶数次非球面で表現できるということになる。この内容は、Taylor 展開不可能という先行研究と矛盾はしない。なぜならここで得られる偶数次展開は打ち切る有限次数により、係数が毎回変動し、決して収束しないため、Taylor 展開ではないからである。２章の最後で、ここで検討した近似式が妥当であることを Schmidt Surface[4]の光学設計を用いて実証した。

ここまでの議論では、奇数次非球面は偶数次で表現可能ということであり、奇数次非球面の有効性を積極的に謳うものではない。特に偶数次の有限和といっても実用的な項数とは限らず、奇数次が実用上有効である可能性がある。

様式第２-１号

学籍番号	1586001	氏　　名	田邉　貴大

論文要旨（２０００字）その２

３章では、奇数次非球面の収差特性を明らかにし、その積極的な有効性を実証することを試みた。非球面による付加的な波面収差は、非球面によって生じる一般光線の光路長差と主光線の光路長差との差によって生じる。このことを用い、一般非球面の収差係数を関数の高次導関数と関連付けて導出した。この結果を４次非球面に適用すると Seidel 収差の再現が確認でき、従来の収差論の拡張になっていることが分かる。さらに、奇数次非球面にこの式を適用すると、奇数次非球面の収差係数は Seidel に対応する低次の収差であっても、高次アスや Tetrafoil といった高次収差成分を含むことが導出でき、それゆえ奇数次非球面は収差補正に有効であることが推論できる。

Extreme Ultraviolet Lithography (EUVL)投影光学系を偶数次非球面で設計したときの残存収差を見ると、高次アスや Tetrafoil が支配的であり、上記推論によると奇数次非球面が有効であると予想される。実際に奇数次非球面を利用してこれらの収差が補正可能であることを示した。

さらに、これらの奇数次が実用的な項数の偶数次非球面で近似できるかを確認した。EUVL のような極端に波長が短く、残存収差の小さい光学系では、「実用的な項数(例えば 30 次)」では透過波面収差が再現しないことが分かった。このように奇数次非球面が高次収差を補正する上で実用上有効であることが理論的にまた実設計で示された。

４章では、奇数次非球面の製造面への応用を探求する。近年、超精密切削や磁性流体研磨等の点加工方式の一般化により、高精度面の創成が可能になったが、それに伴い、へそ(Center artifact)の問題が顕在化している。へそとはレンズ中央部に鋭く局在する回転対称な形状誤差であり、従来のくせとは異なり、高い空間周波数を持っているため Zernike 多項式で表現することが困難である。

正規分布関数が釣鐘状の形状を持っていることから、直感的にへそ形状の表現に利用できると考えられ、十分近似できることを数値的にも確認した。しかし、一般の光学設計ソフトでは、正規分布関数を扱うことができないため、それを多項式面として取り扱うことを検討した。

正規分布関数の Zernike 展開を実際に計算すると、その収束性はあまり良くないことが示される。そこで、奇数次非球面を用いて正規分布関数を表現することを試み、実際に１次から６次ないし７次までの多項式を用いることにより、十分に良い近似を得ることを示した。この結果を用いて、実際に製作したへその形状誤差を含む非球面の形状を表現し、MTF や PSF の劣化の試算を行った。ここで提案した数学的モデルにより、へそを体系的に表現することが可能となり、これまで十分に解析されてこなかったへその影響を定量的に解析することが可能となった。

以上のように、奇数次非球面の基本的な性質と有効性が理論的に明らかになり、さらに実際の設計製造に適用して確認された。本研究は、奇数次非球面を用いる光学設計・開発に対し、理論的支柱を与えるものである。さらに奇数次非球面だけでなく非球面全般に渡る研究・開発に大きく貢献すると考える。

参考文献

[1] 谷川他, “奇数次非球面の有効性,” *光学* 36(11) 646–660 (2007)
[2] M. Shibuya et al., "Theoretical investigation of the meaning of odd-order aspherical surface and numerical confirmation of effectiveness in rotational-symmetric but off-axis optics," *Opt. Eng.* 49(7), 073003 (2010)
[3] Born & Wolf, *Principles of Optics*, Second (Revised) Edition. Cambridge University Press, Cambridge, United Kingdom (1999).
[4] ISO-10110.-12, "Optics and photonics — Preparation of drawings for optical elements and systems —Part 12: Aspheric surfaces,"