Antipolynomial-like mappings の力学系について

中 根 静 男

On the dynamics of antipolynomial-like mappings

Shizuo NAKANE

Abstract: In this note, the theory of antipolynomial-like mappings is investigated as an analogy of that of polynomial-like mappings in order to describe the self-similarity of the tricorn. Since in our case, we cannot expect the analytic dependence on parameters, there exist some differences between polynomial- and antipolynomial-like mappings. For example, we can show that two functions on the boundaries of odd order hyperbolic components of the tricorn are qc-equivalent to each other. This phenomenon never happens for the Mandelbrot set.

1. 序

この小論では Douady-Hubbard [2] によって確立された polynomial-like mappings の理論の anti 版として，antipolynomial-like mappings を考える．この概念を考える第一の動機は tricorn の自己相似性の解明にある．

tricorn は Rippon et al. [1] と Milnor [4] によって独立に研究されてきた．反正則関数族 $f_c(z)=\bar{z}^2+c(c\in \boldsymbol{C})$ の力学系を考える．この族の connectedness locus $T=\{c\in \boldsymbol{C}\;;\lim_{n\to\infty}|f_c{}^n(0)|\neq\infty\}$ を tricorn を呼ぶ．それは2次関数族 $P_c(z)=z^2+c(c\in \boldsymbol{C})$ の connectedness locus である Mandelbrot 集合 M に相当する．tricorn の一部を拡大すると，tricorn だけでなく Mandelbrot 集合も現れる．一方，Milnor は，3次関数族 $f(z)=z^3-3a^2z+b\,(a,\ b\in \boldsymbol{R})$ の connectedness locus の中に，tricorn を見いだした．一般に，ある種のパラメータに非正則に依存する多項式の族の力学系を考えると，必ず tricorn が現れる（中根 [4, 5]）．その の意味で tricorn は普遍的な対象と言える．

平成3年10月3日受理

このように tricorn が現れる，そのからくりを解明しようというのは，自然な問題意識であろう．ちなみに，Milnor もこの問題に言及していて，彼は危点の軌道の振舞いと tricorn や "swallow's tail" や "arch" 等の configuration との関係を明らかにした．但し彼の結果はまだ数値実験の段階に留まっていると思われる．そこで彼の結果を厳密に証明できるように理論の枠組を整備しようというのがこの小論の目的である．

一方，Douady-Hubbard は Mandelbrot 集合が様々な局面に現れるからくりを明らかにするために，polynomial-like mappings の理論を構築した．そこで，彼等に倣って，その anti 版である antipolynomial-like mappings を考えるのである．すると，ある程度までは彼等の議論が適用できる．本質的に異なるところは，パラメータに関する正則性が我々の場合には破れることにある．そのために tricorn に特有の種々の幾何学的な性質が現れる．例えば，局所連結でないこと，（フラクタルでない）滑らかな弧を境界の一部として持つことなどである（Winters [7]）．

2. 準備

定義 1. $f(z)$ が反正則 $\Leftrightarrow f_z=0$, 即ち, f は $\bar{z}$ のみの関数. このとき, f^2 は正則になる. 一般には, n が偶数なら f^n は正則で, n が奇数なら反正則になる. ここで, f^n は f の n 回反復合成を表す.

定義 2. z_0 が f の周期点 $\Leftrightarrow$ ある k に対して $f^k(z_0)=z_0$ を満たす. その様な k の最小のものを z_0 の周期といい, z_0 を k 周期点ともいう. k 周期点 z_0 の周期軌道 $\{z_j=f_j(z_0)\}_{j=0}^{k-1}$ を k サイクルという. f の k 周期点 z_0 の固有値 $\rho=\rho(z_0)$ を, ここでは次で定義する。

$$\rho(z_0)=\begin{cases}\left(\dfrac{\partial}{\partial z}f^k\right)(z_0) & (k \text{ が偶数のとき}) \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}f^k\right)(z_0) & (k \text{ が奇数のとき})\end{cases}$$

命題 1. (Schröder 方程式)

$f(z)=\sum_{j=1}^{\infty}a_j\bar{z}^j$ を, $z=0$ の近くで反正則とする. $|a_1|\neq 0$, 1 ならば, $z=0$ で正則な関数 $\phi(z)=\sum_{i=1}^{\infty}b_iz^i$ で, $b_1\neq 0$ かつ,

$$f\circ\phi(z)=\phi(a_1\bar{z})$$

を満たすものが存在する.

注意 1. $a_1=\dfrac{\partial}{\partial \bar{z}}f|_{z=0}$ は, 等角写像で不変ではない.

系 1. (双曲型周期点の周りでの標準形)

f を反正則, z_0 を f の $(2k+1)$ 周期点で $|\rho(z_0)|\neq 0$, 1 とすると,

$$\phi(0)=z_0,\ \phi'(0)=1,\ f^{2k+1}\circ\phi(z)=\phi(\rho\bar{z})$$

を満たす $z=0$ の近くで正則な関数 ϕ が存在する.

定義 3. z_0 は, $|\rho|>1$ のとき反発的, $|\rho|<1$ のとき吸引的, $|\rho|=1$ のとき中立的という.

注意 2. k を奇数, z_0 を反正則な f の k 周期点とすると, z_0 は正則関数 f^2 の k 周期点であり, $(f^{2k})'(z_0)=|(f^k)'(z_0)|^2$ を満たす ([4]). 従って, f の奇数周期の中立的周期点は全て f^2 の放物型周期点になる.

命題 2. 吸引的サイクルの直接鉢は少なくとも一つ, f の危点を含む.

定義 4. 反多項式関数 f に対し, $K(f)=\{z\in \boldsymbol{C}\ ;\ \lim_{n\to\infty}|f^n(z)|\neq\infty\}$ を f の充塡 Julia 集合, その境界 $J(f)$ を f の Julia 集合という. これらは完全 f 不変である.

命題 3. $K(f)$ が連結 $\Leftrightarrow f$ の全ての危点が $K(f)$ に含まれる.

3. Antipolynomial-like mappings について

定義 5. (U, U', f) が d 次の antipolynomial-like mapping (略して aplm) $\Leftrightarrow U'\subset\subset U$, $f: U'\to U$ は proper な d 次反正則写像.

例 1. $f(z)=z^3-3a^2z+b$, $(a, b\in \boldsymbol{R})$ で, (a, b) がその connectedness locus の周期 6 の baby tricorn の hyperbolic component に属すとき, f は吸引的 6 周期点 z_0 を持つが, z_0 は実は $f^3(z_0)=\overline{z_0}$ を満たすことがわかる. $\boldsymbol{C}-J(f)$ の z_0 を含む成分の閉包の近傍 U' を適当にとると, $\overline{f^3}: U'\to\overline{f^3(U')}$ は 2 次の aplm になる. つまり, z_0 を f の 6 周期点とみなすよりも aplm $\overline{f^3}: z\mapsto\overline{f^3(z)}$ の不動点とみなした方が本質を見失わないというのが aplm を考える動機である. 一般に, 多項式の実 2 パラメータ族 $\{f_{a,b}\}$ が反正則な involution $z\mapsto\bar{z}(z\mapsto-\bar{z})$ と可換ならば, 同様の議論が可能になる.

注意 3. このとき, 全ての $z\in U$ に対し $|f^{-1}(z)|\equiv d$.

aplm f に対し, 充塡 Julia 集合と Julia 集合を次で定義する.

$$K(f)=\bigcap_{n\geq 0}f^{-n}(U'),\ J(f)=\partial K(f).$$

定義 6. $f: U'\to U$, $g: V'\to V$ を d 次 aplms とする. $K(f)$ の近傍から $K(g)$ の近傍の上への同相写像 ϕ で $\phi\circ f=g\circ\phi$ を満たすものがあるとき, f と g は位相同値といい, $f\underset{\text{top}}{\sim}g$ と書く. 更に ϕ が擬等角 (略して qc) 或は正則にとれるとき, 各々 $f\underset{\text{qc}}{\sim}g$, $f\underset{\text{hol}}{\sim}g$ と書く. ϕ が qc で $K(f)$ の内部で正則なとき, $f\underset{\text{hb}}{\sim}g$ と書き, ϕ が $K(f)$ の外部で正則なとき, $f\underset{\text{ext}}{\sim}g$ と書く.

命題 4. 全ての d 次 aplm $f: U'\to U$ に対し, 向きを変える d 次実解析的な expanding map $h_f: S^1\to S^1$ が回転を除いてただ一つ存在する.

証明 $K(f)$ は連結すると，等角写像 $\alpha: U-K(f)\simeq W_+=\{1<|z|<R\}$ がとれる．ここで $\log R=\mathrm{mod}(U-K(f))$ である．$W_+'=\alpha(U'-K(f))$, $h_+=\alpha\circ f\circ\alpha^{-1}: W_+'\to W_+$, $\tau(z)=1/\bar{z}$, $W_-=\tau(W_+)$, $W_-'=\tau(W_+')$. $W=W_+\cup W_-'\cup S^1$ とおくと鏡像原理より，h_+ の反正則な接続 $h: W'\to W$ を得る．$h_f=h|_{S^1}$ とおけばよい．h_f が expanding であることは h の普遍被覆への反正則な接続 $\tilde{h}: \tilde{W}'\to\tilde{W}$ の逆写像 $\tilde{h}^{-1}$ が狭義縮小的であることから従う．(終)

系 2. $K(f)$, $K(g)$ が連結なとき，$f \underset{\mathrm{ext}}{\sim} g \Leftrightarrow h_f \underset{\mathrm{anal}}{\sim} h_g$.

命題 5. d 次 aplm f がある d 次反多項式 P と正則同値：$f \underset{\mathrm{hol}}{\sim} P \Leftrightarrow f \underset{\mathrm{ext}}{\sim} P_0: z\mapsto \bar{z}^d$.

証明 $(\Rightarrow)P$ が d 次反多項式ならば ∞ の近くでは $P \underset{\mathrm{hol}}{\sim} P_0$ であることは容易にわかる．この同値を与える共役写像をP, P_0 で引き戻してゆけば $P \underset{\mathrm{ext}}{\sim} P_0$ を得るので $f \underset{\mathrm{ext}}{\sim} P_0$ が従う．

$(\Leftarrow)f: U'\to U$, $K(f)$ は連結とする．$f \underset{\mathrm{ext}}{\sim} P_0$ とすると，

$\phi: U'-K(f)\simeq V'-K(P_0)$, $\phi\circ f=P_0\circ\phi$

を満たす等角写像 ϕ が存在する．この ϕ を U' の外に C^1-diffeo に延ばす ($\phi(\infty)=\infty$). ここで $g: \boldsymbol{C}\to\boldsymbol{C}: C^1$ を次で定義する．

$$g=\begin{cases} f & \text{on } U', \\ \phi^{-1}\circ P_0\circ\phi & \text{on } \boldsymbol{C}-K(f). \end{cases}$$

更に $\boldsymbol{C}$ 上の measurable な等角構造 σ を

$$\sigma=\begin{cases} \sigma_0 & \text{on } U', \\ \phi^*\sigma_0 & \text{on } \boldsymbol{C}-K(f). \end{cases}$$

(σ_0 は標準的な等角構造)

とおく．measurable Riemann 写像定理より，qc-map $\Phi: \boldsymbol{C}\to\boldsymbol{C}$ で $\Phi^*\sigma_0=\sigma$, $\lim\limits_{z\to\infty}\Phi(z)/z=1$ を満たすものが存在する．ここで，一般に向きは異なるが σ と同じ Riemann 計量を与える等角構造を $\bar{\sigma}$ と書くと，U' 上，$g^*\sigma=f^*\sigma_0=\overline{\sigma_0}=\bar{\sigma}$ で，$\boldsymbol{C}-K(f)$ 上，

$g^*\sigma=\phi^*P_0{}^*\phi^{*-1}\phi^*\sigma_0=\phi^*P_0{}^*\sigma_0=\phi^*\bar{\sigma}_0=\overline{\phi^*\sigma_0}=\bar{\sigma}$ が成り立つので，

$(\Phi\circ g\circ\Phi^{-1})^*\sigma_0=\Phi^{*-1}g^*\Phi^*\sigma_0=\Phi^{*-1}g^*\sigma=\Phi^{*-1}\bar{\sigma}=\overline{\Phi^{*-1}\sigma}=\overline{\sigma_0}$

となる．従って $P=\Phi\circ g\circ\Phi^{-1}$ は反正則になるが，$\Phi(\infty)=\infty$ より，d 次反多項式になることがわかる．U' 上 $f=g=\Phi^{-1}\circ P\circ\Phi$, $\Phi^*\sigma_0=\sigma=\sigma_0$ より Φ は U' 上正則，従って $f \underset{\mathrm{hol}}{\sim} P$ が言えた．(終)

4. Straightening Theorem

命題 6. $f: U'\to U$ を d 次 aplm, $h: S^1\to S^1$ を向きを変える d 次の実解析的な expanding map とすると，$g \underset{\mathrm{hb}}{\sim} f$, $h_g=h$ を満たす d 次 aplm $g: V'\to V$ が存在する．

証明 $U\supset A$ をコンパクトで ∂A が滑らかで $A\simeq\bar{D}=\{|z|\leq 1\}$, $\mathring{A}\supset K(f)$, $A'\equiv f^{-1}(A)\simeq\bar{D}$, $A'\subset\mathring{A}$ を満たすようにとり，$Q_f=A-\mathring{A}'$ とおく．V', V を S^1 の近傍として，h を V' から V への反正則写像に拡張する．$B=\{1<|z|\leq R\}\subset V$ を $B'\equiv h^{-1}(B)\simeq B$, $B'\subset\mathring{B}$ を満たすようにとり，$Q_h=B-B'$ とおく．$\psi_0: \partial A\to\partial B$ を向きを保つ上への C^1-diffeo とすると，diffeo $\psi_1: \partial A'\to\partial B'$ で $\psi_0\circ f=h\circ\psi_1$ を満たすものがとれる．更に diffeo $\psi: Q_f\to Q_h$ を $\psi=\psi_0$ (on ∂A), ψ_1 (on $\partial A'$) にとり，Q_f 上 $\sigma_1=\psi^*\sigma_0$ とおく．$f^{-n}(Q_f-\partial A')$ 上,

$$\sigma^{(0)}=\sigma_1,\quad \sigma^{(n)}=\overline{f^*\sigma^{(n-1)}}\quad (n\geq 1),$$

と帰納的に定義し，A 上,

$$\sigma=\begin{cases} \sigma^{(n)} & \text{on } f^{-n}(Q_f-\partial A'), \\ \sigma_0 & \text{on } K(f), \end{cases}$$

とおく．$\sigma=|dz+ud\bar{z}|$ とすると，f は反正則なので

$$f^*\sigma=|f^*(dz+ud\bar{z})|=|\bar{f}_{\bar{z}}udz+f_{\bar{z}}d\bar{z}|,$$

従って $\overline{f^*\sigma}=|dz+\frac{f_{\bar{z}}}{\bar{f}_{\bar{z}}}\bar{u}d\bar{z}|$ となるので，σ と $\overline{f^*\sigma}$ の dilatation ratio は等しく，σ が積分可能なら $\overline{f^*\sigma}$ も同様となる．さて，

$f^*\sigma_1=f^*\psi^*\sigma_0=(\psi\circ f)^*\sigma_0=(h\circ\psi)^*\sigma_0=\psi^*h^*\sigma_0=\psi^*\overline{\sigma_0}=\overline{\psi^*\sigma_0}$ 故，$\sigma^{(1)}=\overline{f^*\sigma_1}=\psi^*\sigma_0$ となる．そこで ψ を $\partial A'$ の近くで C^1 にとれば$\sigma^{(1)}$, 従って σ は連続になる．measurable Riemann 写像定理より，$\varphi^*\sigma_0=\sigma$ を満たす qc-map $\varphi: \mathring{A}\to D$ が存在する．$g=\varphi\circ f\circ\varphi^{-1}$ とおけば，$g^*\sigma_0=\varphi^{*-1}f^*\varphi^*\sigma_0=\varphi^{*-1}f^*\sigma=\varphi^{*-1}\bar{\sigma}=\overline{\varphi^{*-1}\sigma}=\overline{\sigma_0}$ 故，g は反正則，従って d 次の aplm になる．一方 $\mathring{K}(f)$ 上 $\varphi^*\sigma_0=\sigma=\sigma_0$ なので $\varphi: f \underset{\mathrm{hb}}{\sim} g$ を与える．又，$K(f)$ の外で $\varphi^*\sigma_0=\sigma=\psi^*\sigma_0$ となることから $\psi\circ\varphi^{-1}$ は $A-K(f)$ で正則で $f \underset{\mathrm{ext}}{\sim} g$ を与える．(終)

5. mating の一意性

Q はホモトピータイプが S^1 とし，f，$\alpha : Q \to Q$ を各々，向きを変える d 次及び，向きを保つ 1 次の写像で $\alpha\circ f = f\circ\alpha$ を満たすものとする．更に，それらの Q の普遍被覆への lift を $\tilde{f}$，$\tilde{\alpha}$ とする．本質的には次の例を考えれば良い．

例 2. $Q=S^1=\{e^{2\pi i\theta} ; 0\leq\theta<1\}, f : \theta\mapsto -d\theta$, $\alpha : \theta\mapsto\theta+\alpha$.

このとき，$\alpha\circ f(\theta)=-d\theta+\alpha$，$f\circ\alpha(\theta)=-d(\theta+\alpha)$ より，

$$\alpha\circ f = f\circ\alpha \Leftrightarrow \alpha(d+1)\equiv 0 \pmod 1$$
$$\Leftrightarrow \text{ある } i \text{ があって } \alpha=\frac{i}{d+1}.$$

一方，$\tilde{f} : \theta\mapsto -d\theta$，$\tilde{\alpha} : \theta\mapsto\theta+\alpha$ であるが，$\tau : \theta\mapsto\theta+1$ とおくと，

$$\tilde{f}\circ\tilde{\alpha}(\theta)=-d(\theta+\alpha)=-d\theta+\alpha-i$$
$$=\tau^{-i}\circ\tilde{\alpha}\circ\tilde{f}(\theta),$$
$$\tau^{-i}\circ\tilde{\alpha}\circ(\tau\circ\tilde{f})(\theta)=-i+\alpha+1-d\theta$$
$$=(\tau\circ\tilde{f})\circ\tilde{\alpha}(\theta),$$
$$\tilde{f}\circ(\tau\circ\tilde{\alpha})(\theta)=-d(\theta+\alpha+1)$$
$$=-d\theta-i+\alpha-d$$
$$=\tau^{-i-d-1}\circ(\tau\circ\tilde{\alpha})\circ\tilde{f}(\theta)$$

となるので，$\tilde{f}\circ\tilde{\alpha}=\tau^{-i}\circ\tilde{\alpha}\circ\tilde{f}$ を満たす i は $\tilde{f}$ を $\tau\circ\tilde{f}$ で置き換えても不変だが，$\tilde{\alpha}$ を $\tau\circ\tilde{\alpha}$ で置き換えると $i+d+1$ に変わる．しかし $\mathrm{mod}(d+1)$ では不変なので，$[\alpha, f]\equiv[i]\in \boldsymbol{Z}/(d+1)$ とおくと，これは f, α の lift $\tilde{f}$，$\tilde{\alpha}$ のとりかたに依らないので well defined になる．

さて，$f : Q_1'\to Q_1$，$g : Q_2'\to Q_2$ を向きを変える d 次の写像，$\varphi : Q_1\to Q_2$, $\psi : Q_1'\to Q_2'$ を向きを保つ 1 次の写像で，$g\circ\varphi=\varphi\circ f$，$g\circ\psi=\psi\circ f$ を満たすとする．$\tilde{\varphi}\circ\tilde{f}=\tau^{-i}\circ\tilde{g}\circ\tilde{\varphi}$, $\tilde{\psi}\circ\tilde{f}=\tau^{-j}\circ\tilde{g}\circ\tilde{\psi}$ となるとき，$[\varphi,\psi ; f, g]\equiv[j-i]\in\boldsymbol{Z}/(d+1)$ とおく．次が成り立つ．

命題 7. $f : U'\to U$，$g : V'\to V$ を d 次の aplms で，$K(f)$，$K(g)$ は連結とする．$\varphi : f \underset{\mathrm{hb}}{\sim} g$，$\psi : f \underset{\mathrm{ext}}{\sim} g$ が $[\varphi, \psi ; f, g]=0$ を満たせば

$$\Phi=\begin{cases}\varphi & \text{on } K(f),\\ \psi & \text{on } U'-K(f),\end{cases}$$

は f と g の正則同値を与える．

系 3. P, Q を d 次の反多項式で $K(P), K(Q)$ は連結とすると，

$$P \underset{\mathrm{hb}}{\sim} Q \Rightarrow P \underset{\mathrm{affine}}{\sim} Q.$$

系 4. c_1，$c_2\in T$，$f_{c_1} \underset{\mathrm{hb}}{\sim} f_{c_2} \Rightarrow c_2=\omega c_1$，$(\omega^3=1)$.

6. 2 次の場合の qc-equivalence

今までの所では polynomial-like mappings の時と同様の議論が出来たが，この節では，違いが現れる．Douady-Hubbard の結果は次のようである．

命題 8. $c_0\in\partial M$，$P_{c_1} \underset{\mathrm{qc}}{\sim} P_{c_0} \Rightarrow c_1=c_0$.

残念ながら，この命題の anti 版は成り立たない．

命題 9. n を奇数，z_0 を f_{c_0} の中立的 n 周期点で，$(f_{c_0}^{2n})'(z_0)=1$, $(f_{c_0}^{2n})''(z_0)\neq 0$ を満たすものとする．更に

$$L=\{(c, z) ; f_c^n(z)=z,\ (f_c^{2n})'(z)=1\}$$

は (c_0, z_0) の近傍で実解析的な弧 $\{(c_t, z_t) ; t\in\boldsymbol{R}\}$ になるとすると，

$$c_1\in\pi_c(L),\ |c_1-c_0|\ll 1 \Rightarrow f_{c_1} \underset{\mathrm{qc}}{\sim} f_{c_0}.$$

注意 4. この命題の仮定は大体，c_0 が T の奇数周期の hyperbolic component の境界である deltoid 上，非カスプ点であることを意味する．L 自体はカスプ点を除けば実解析的になっていると思われる．

例 3. $n=1$ のとき，$f_c(z)=z \Rightarrow c=z-\bar{z}^2$, $(f_c^2)'(z)=|f_c'(z)|^2=4|z|^2=1 \Rightarrow |z|=1/2 \Rightarrow z=e^{i\theta}/2$

故, $L=\{z=e^{i\theta}/2, c=e^{i\theta}/2-e^{-2i\theta}/4\}$ は非カスプ点で実解析的になる．

証明 $w=f_{c_t}^2(z)$ をアフィン変換 $z\mapsto z-z_t$ で変換すると，

$f_{c_t}^2 \underset{\mathrm{affine}}{\sim} F_t : z\mapsto\sum_{j=0}^{4}a_j(t)z^j$ となる．ここで $a_j(t)$ は t に関して実解析的で，$z=0$ は F_t の n 周期点で $(F_t^n)'(0)=(f_{c_t}^{2n})'(z_t)=1$ を満たす．$a_j(t)$ を t について複素領域に正則に延ばすと，$\{F_t\}$ はパラメータに関し正則な族で，関数関係不変の原理により，$z=0$ は唯一の persistently non-hyperbolic な周期点である．従って，Mañé-Sad-Sullivan[3] の結果より，$t=0$ の近くで $F_t \underset{\mathrm{qc}}{\sim} F_0$ が成り立つが，特に $t\in\boldsymbol{R}$ としても正しい．f_c に戻せば $c\in\pi_c(L)$ に対し，qc-map h_c で $h_c : f_c^2 \underset{\mathrm{qc}}{\sim} f_{c_0}^2$ を満た

すものがとれる．h_c は f_c^2 の反発的 k 周期点を $f_{c_0}^2$ の反発的周期点に写すが，反発的ならば陰関数定理より，その中で f_c の k 周期点になっているものは局所的に一意なので，MSS の Julia 集合上の共役の構成法より，それは f_{c_0} の k 周期点に写らねばならない．Julia 集合上の共役はやはり MSS の方法で $\bar{\boldsymbol{C}}$ 全体に延ばせるので，結局，$f_c \underset{\mathrm{qc}}{\sim} f_{c_0}$ が従う．(終)

c_0 が T の偶数周期の hyperbolic component の境界にあるときには，命題 8 と同じ結論が出ると思われるが，まだ証明が未完成なので，予想として述べておく．

予想 $c_0 \in \partial T$，f_{c_0} は偶数周期の安定領域を持つとすると，

$$f_{c_1} \underset{\mathrm{qc}}{\sim} f_{c_0} \Rightarrow f_{c_1} \underset{\mathrm{hb}}{\sim} f_{c_0} \Rightarrow c_1 = \omega c_0 \quad (\omega^3 = 1).$$

文　献

[1] W. D. Crowe, R. Hasson, P. J. Rippon & P. E. D. Strain-Clark : On the structure of the Mandelbar set, Nonlinearity, 2 (1989), 541-553.

[2] A. Douady & J. Hubbard : On the dynamics of polynomial-like mappings, Ann. Sci, Ec. Norm. Sup., 18 (1985), 287-343.

[3] R. Mañé, P. Sad & D. Sullivan : On the dynamics of rational maps, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup., 16 (1983), 193-217.

[4] J. Milnor : Remarks on the iterated cubic maps, Preprint.

[5] S. Nakane : Tricorn and bifurcation of attracting odd order cycles, Acad. Rep. Tokyo Inst. Polytech., 13 (1990), 4-9.

[6] 中根：Tricorn の構造について，数学若手の会会報 47 (1991)，91-100.

[7] R. Winters : Bifurcations in families of anti-holomorphic and biquadratic maps, Thesis, Boston Univ.