

直観と論理---21 世紀型数学教育を考える

植野 義明*

Intuitive Thinking and Logical Thinking---Mathematics Education in the 21st Century

Yoshiaki Ueno*

In the 21st century, people will relate to mathematics more on the day-to-day basis, and the objective of mathematics education will have to change. In this article, we discuss the value of mathematics at school as a social activity. Although mathematics has been taught as a basis of logical thinking, it is not the only subject which train people to think logically. Mathematical logic in the wider sense will be a valuable culture for the coming society, if it is used along with other means of reasoning.

はじめに

2020 年前後の実施を目論む学習指導要領の骨子案が文科省から発表され、変容する 21 世紀の数学教育、盛り込むべき学習内容、社会の変化に対応する学力観についてさまざまな言説が飛び交っている。アメリカでは、今後高度化するコンピューター（人工知能）の実用化に伴って、これまでの社会にあった職業の大半が近い将来にコンピューターによって代替されるだろうという警鐘がマスコミを中心として鳴らされている。一方、日本ではこのところアクティヴ・ラーニングという旗印を掲げる授業方法改革運動が小中高だけでなく大学も巻き込んで席卷しつつある。将来、確実に到来する社会の変容期を職業人として生きるだろう児童、生徒、学生は、いま必要な数学として、何を学ばばよいのだろうか。

これまでの日本の数学教育

算数と数学

なぜ日本では小学校の数学のことを「算数」というのだろうか。

我が国の近代数学教育は 1972（明治 5）年の学制発布から始まった。このころ、小学校は尋常小学校と呼ばれ、そこには算術という教科があった。算術は英語で arithmetic と言い、計算術の意味である。明治時代の小学校算術の目的は、一般庶民の教育にあった。そこでは計算術が主に教えられ、準エリートやエリートのための教育を行う機関である旧制中学校や高等女学校との間には明らかに棲み分けがあったといっておくべきだろう。算術という教科は 1940 年度まで続いた⁸⁾。

1941 年度から、尋常小学校は国民学校と名称を変え、そのときから算術という教科の名称はなくなったのである。代わりに、低学年の教科書の名前は「かずのほん」になり、

中・高学年では「初等算数科」と呼ばれるようになった。戦後は「算数」に統一され、現在に至っている。

海外の状況をみると、アメリカでは小学校でも中学校以上でも Mathematics（あるいは略して Math）という名前が使われているし、中国では小学校でも中学校以上でも「数学」という名前が使われている。他の国でも、それぞれの国語で数学を意味することばが小学校でも中学校以上でも共通して使われている。

日本で「算数」という造語が作られたのは、「数学」と呼ぶには内容が初等的すぎるという遠慮、あるいは謙遜の気持ちで働いたからであるという説が最も有力である。

歴史的経緯はともかく、現在の世界で小学校と中学校以上とで数学を表す教科名が異なっている国は日本だけである。そのせいかわからないが、日本では「算数」と「数学」はまったく別のものとする人の割合が多い。例えば、「算数なら理解できるが、数学になるとからつきわからなくなる」という意見を述べる人や、「日常生活で必要になるのは算数の範囲だけでしょう」という意見を述べる人もよく見かける。

算数と数学で教える内容は、本来連続しているはずであるが、カリキュラムを見ると、断絶が強調されているように見える場面も多い。

例えば、指導要領の改訂の時期になると、小学校算数の中でやや複雑な内容は中学校に移動しようという案が出てくることがあるが、「算数の内容は独自の世界を形成しているのであるから、小学校で完結させたい」という小学校側からの意見が出て実現しないことが多い。実際は、例えば現行のカリキュラムでは中学校 1 年生で教えることになっている三角形の合同条件に対し、小学校で学習する三角形の決定条件はスパイラル方式といってその準備学習の関係になっている。中学校の教員はそのことを知っていなければならないし、小学校の教員についても同様のことがいえるだろう。

* 東京工芸大学工学部基礎教育研究センター 准教授
2016 年 9 月 27 日 受理

数学の論理と国語の論理

論理的思考力はどの学問分野でも、また日常生活のどの場面でも重要であり、児童が興味をもったときにいつでも教えられるのがよい。小学校では、論理的思考力はディベートなどで論理的に話す訓練の中で身に着けるべきであると考えられており、教科としては国語の中での教育課題となっている。

一方、数学の教員からは、国語で教えられている論理は正しい論理ではないのではないかという漠然としたイメージが語られることがある。確かに、国語の授業では、論理的に考えることよりも論理的に話す訓練の方が重視される傾向がある。事実と意見をはっきりと区別して話すことも大切だが、数学の教員から見るとそれだけで論理的思考ができていると考えるには何か足りないように思われる。

ある中学校の数学の教員が、生徒が「だから」と「ならば」のことばの使い分けができていないことに気づき、小学校の教員に両者の違いはどこで教えているのか尋ねたことがあった。小学校の教員の答は、「だから」と「ならば」の違いを国語で意識して教えたことはないし、自分にもこれらの違いはわからないということであった。教科国語では母語としての日本語を教えているので、だいたいの意味が分かってお互いに通じれば良いというスタンスで教えているように思われる。つまり、話し合いに支障がなければことばの意味は理解しているとみなしている。

一方、数学的な思考を前に進める道具として論理は非常に重要である。歴史的に見ても、ブールは論理学の規則を代数化しようとした。論理学の規則と代数における交換法則、結合法則、分配法則の間に対応付けが可能となるようにブール代数の体系を打ち建てた。ブール代数は全体集合を決めたときの部分集合が満たす構造と同じものである。論理の基礎になるのは「または」「かつ」「～でない」などの機能を持ったことばで、これらは論理語または論理演算子と呼ばれている。それらの用語がある一定の規則を満たす。それらの規則を公理という。こうして、論理学は公理を基礎とする体系によって記述され、論理学は数学になるのである。

このような考え方を認めると、「または」「かつ」「～でない」「ならば」といった接続詞は個々の項を表す単語とは別格の重要性をもつことになる。「だから」と「ならば」の違いが理解されていないという件の教員の憂慮は、彼にとって重要性を有するものであったのである。

現行の指導要領では、高等学校の数学Ⅰの中に「集合と論理」という単元がある。ここで、集合と集合から和集合を作るような集合演算を学ぶ。内容的には小学校入学前の幼児でも直観的に理解していることであるが、数学的な記号とともに整理された形で学ぶのである。

数学者の中には、高校の「集合と論理」で学ぶ論理が唯一の論理であり、それだけを知っていれば研究にも困らないと思っている人が多い。例外は数学の中でも基礎論とい

う分野を専攻している数学者である。

現在、次期指導要領の議論との絡みで、小学校でプログラミングを教える（教科としてではなく遊びながら慣れさせる）という案が浮上している。もしプログラミングを教えるのであれば、そこで「アンド」「オア」「ノット」「イフ」という論理語を教えることになるかもしれない。プログラミングをすることはコンピューターの仕組みを知り、うまく使いこなす基礎として重要である。

テクノロジーの利用

教室で子どもたちにテクノロジーを使って数学を教育することは世界のいろいろな国で行われている。それが成功するためには条件があると思われるが、少なくとも私が見たフランスの職業希望者用の高校ではうまく機能していたと思われる。

テクノロジーを使うには機器を準備する学校や教員の手間がかかる。機械であるから、維持・管理もしなければならぬ。第一にテクノロジーを使う動機が生徒の中になければならない。

フランスの職業希望者用の高校では、授業でテクノロジーを使う理由として、現在ではケーキ屋でもクリーニング屋でも、エクセルなどのソフトを使わない職場はないということだった。生徒たちは常に職場実習でそのことを体験している。

日本では *Mathematica* やグラフ電卓などを使った教育がアメリカから入ってきて数十年になるが、根付いていないはまだに言えない状況である。例えば、高校の数学のカリキュラムにプログラミングの単元が入り、「統計」「いろいろな曲線」「整数の性質」などの単元で教科書にコンピューターのプログラムが載っていたこともあるが、現行の教科書からは消えてしまった。

なぜ日本ではテクノロジーを使った教育が根付かなかった（少なくとも、現在までのところ根付いているとはいえない）のだろうか。理由はいろいろ言われているが、高校の数学の教員がコンピューターを嫌っていることが大きな要因であると思われる。

コンピューターを使う授業は準備が大変であるというイメージがあり、また、画面に美しい図形が表示されると生徒は感動するが後に残らない。コンピューターでは計算結果の表示の美しさに捉われてしまい、生徒に何か力がついたという実感が無い。数学というものは、筆算で苦労して計算して自分の力で解答に辿り着くことによって理解が深まるのであるという根強い数学観がある。それに対して、コンピューターが出す答には、表示の美しさに目を奪われる結果、どこかで騙されるのではないかという猜疑心がある。それならば、わざわざ準備に時間をかけてコンピューターを使うよりも、チョークと黒板で授業をした方がよい。

その一方で、GeoGebra などの図形ソフトは一部の教員の間で使われている。

統計で使われる「箱ひげ図」は GeoGebra で簡単に描け

る。最近、箱ひげ図がエクセルの最新版で簡単に描けるようになったということであるが、まだ使い勝手はよくないようである。また、四分位点の定義が何通りもあり、設定が面倒である。

コア・オプション方式

これは、日本のカリキュラムの特徴になってしまうが、コア・オプション方式が始まってから 20 年ほどになり、そこから抜け出せない。

例えば、現行の高等学校の「数学 B」の教科書には、「数列」「ベクトル」「確率分布と統計的な推測」という 3 つの章がある。ところが、この科目の時間数は 2 時間であるので 2 つの単元を選択して学ぶことで「数学 B」を履修したことになる。これは「数学 B」がオプション科目の流れを汲んでいるからである。

大学を受験する生徒がクラスにいることを考慮すると、「数列」「ベクトル」を外せない。統計は医学部などを除く多くの大学では入試の範囲から外されている。一方、「確率分布と統計的な推測」を教えないと、確率・統計分野は高校 1 年生の「数学 I」で学ぶ「データの分析」(記述統計)と「数学 A」で学ぶ「場合の数と確率」だけになってしまう。特に、確率分布を学ばなければ、現代の公理化された確率論を理解できないだろう。

「数学 A」もオプション科目で、その章立ては「場合の数と確率」「整数の性質」「図形の性質」である。このうち、「図形の性質」は入試に課さない大学が多いので、受験校では教えないことになる。そうすると、例えば、三角形の五心のうち、中学校で習う重心しか知らないで高等学校を卒業してしまう可能性も生まれる。

このように、オプション科目の単元の配置は高校の現場にとって悩みの種である。

また、コア・オプション方式には別の次元の問題もあり、「数学 A」と「数学 B」はオプション科目だからもともと履修しなくてもよいという雰囲気もある。

それに対して、「数学 I」「数学 II」「数学 III」は一応話が繋がっていることになっている。

コア・オプション方式の弊害は、オプション科目を取っていない、あるいはその中のどれかの単元を習っていない生徒がクラスの中にあることにある。そのような生徒が少数でもいれば、高校数学の全体としての流れが阻害され、授業は単元ごとに独立して行わざるを得ない。つまり、単元間の繋がりを意識した授業展開をしようとしてもできない事態が起こり得る。その結果、数学は細切れの互いに無関係な「単元」という単位の寄せ集めになってしまう。

現在では、単元間の繋がりを意識しない高校数学を習った生徒が大学生になり、教育実習にまで行く時代が到来している。そのような教育実習生は問題を見ても解くことができず、「これは何の単元の問題ですか」と聞いてくるということである。そのような世代の教育実習生は、どの単元の問題かがわかって初めて解答の方針が立つということである。

これからの日本の数学教育

コンピューターは人間の友だちなのか？

これから人工知能の実用化がますます進み、今後 10 年以内に大半の職業はコンピューターに奪われてしまうという未来予測結果がアメリカで発表され、日本でもそのような予測を前提とした議論が展開されつつある。

しかし、人工知能が人間の代替を務められるとは考えられない。

コンピューターは確かに大量のデータベースから必要な情報を瞬時に引き出すことは得意なので、医師に代わって症状から病名の候補を選びだしたり、辞書を引いて翻訳の手伝いをしたりすることはできる。しかし、それらは判断材料を示すだけで、実際の判断は人間の経験と勘に頼らなければならないだろう。

翻訳について言えば、非常に狭い専門的、あるいは技術的な分野の翻訳はコンピューターでもできるが、分野を狭く制限できない雑談などの日常的な会話を翻訳することは人間の翻訳者でなければとても無理である。たとえ外国語でなくても、日常会話では、コンピューターには意味を解釈できないことが起こる。このことは、人間は日常の会話の中でしばしば伝えようと意図することと反対のことを言うてしまうことからわかる。

人間同士の日常の会話では、「あの人は黒いものを白いと言う」などと言うことがあるが、その人の周囲にいる人たちは「本当は黒い」ということを理解している。人間は母語で話しているときでさえ、右と左などの対立概念を表すことばを間違えて逆を言うてしまうことがあるが、話者と聞き手の関係が上司と部下であったり、患者とその介護者であったりする場合には、間違いを瞬時に判断して正しく応答したり行動したりする。これらのことは人間にとっては自然に、いとも簡単にできるが、コンピューターには絶対に無理である。コンピューターは言われたことばを文法的に正しく解釈することしかできず、文法に反して本当に意図されている意味を斟酌することは極端に不得意である⁹⁾。

例えば、あるとき私が勤めている大学で教員たちに、「明日の教授総会は 13 時 20 分から始まります。なお、教授総会の前に学生アンケートの結果の説明会が催されます」というメールが一斉配信されたことがあった。この場合、アンケートの結果の説明会は何時にスタートするのであろうか。教授総会と同時にスタートはあり得ないとすれば、13 時 20 分よりある程度前でなければならない。結果は、私以外のすべての教員は 13 時 20 分ギリギリかほんの少しだけ遅れて会議室に集まったということであった。

このエピソードが示していることは、私たちはコンピューターに完全に仕事場から締め出されることはないということだけでなく、それ以上のことを意味している。

現在のコンピューターは、チューリングテストに合格するには程遠く、人間に成りすますことはできないが、それ

でも私たちの社会活動の補助としてこれからますます参画してくることは確かである。コンピューターの論理を理解し、コンピューターゆえに起こす間違いを未然に防ぐことは人間に課せられる役割になる。

それ以上に重要なことは、私たちは数学的な論理を教えることによって、コンピューターのような思考しかできない人間を育てようとしているのかという問題である。

前節で述べた、数学教員が考える論理と国語教員が考える論理の違いを思い出してほしい。どちらが人間にとって有用な論理なのだろうか。そして、どちらの論理を先に教え、どちらの論理を後に教えるべきかという問題も教育では考えなければならない。

直観と論理、そして記憶

人間が思考するとき、脳のいろいろな機能を援用している。このことは数学的な思考についても言える。

例えば、日本人が筆算で掛け算を行うときは脳のどこかに九九の表があり、それを参照している。足し算についても九九の表にあたるものがあると考えられ、算数ではその表に名前をつけて呼ばないだけである。また、大きな数の計算をするときは、予め直観的に答はいくらぐらいになるかを予想している。それをせずに筆算だけで計算すると、位取りを間違えても気付かないことになる。おおよその数の「見積もり」の能力は動物にもあることが確かめられている。

このように、数学的な思考についても、人間は論理だけで結論に到達しているわけではなく、また、そうするように訓練することには意味がない（言い換えれば、進化論的な利点がない）。

このことは、児童、生徒だけでなく、専門的な数学者についても言える。私は数学について英語で書かれたある本の一部の和訳を数学者に依頼したことがあるが、彼が送ってきた「和訳」は英文から日本語に訳したのではなく、彼の記憶の中にある昔習った日本語の教科書の中で同じ内容に対応する部分の文章であった（内容は $\sqrt{2}$ が無理数であることの証明や平行線の公理のような初等的な数学だった）。このように、数学者でさえ、自分が習った教科書や読んだ本の記述に無意識のうちに影響されてしまうこと、そして、最初に数学を習ったときの感動は生涯にわたって消えることがないことがわかる。

直観や記憶の使用を嫌う一部の数学者に対しては、それらは人類が数百万年にわたる進化によって身に着けてきた能力であり、生物の進化の過程そのものが遠大な一種の計算なのであったと説明することができる。すなわち、直観は変異と淘汰という計算手法による計算の結果であると言える。このように認識を変えれば、数学の問題で直観を使うことに対してわずかながらも抵抗感が和らぐであろう。

このように動物の直観は数学の論理に比べて非常に複雑な働きをするが、それが生成される機構は単純である。環境が変化すれば、身に着けるべき直観も変化する。デジ

タル・デバイドとか、デジタル・ネイティブということばがひと頃流行り、いまはそんなに耳にしなくなったが、それはデジタル・ネイティブの世代が着実に増えて、珍しいものではなくなりつつある兆候である。これらの新しい世代の人たちはコンピューターを身近に感じ、古い世代の人たちよりもコンピューターが「何をしがっているのか」を肌で感じ取る直観を獲得できる素地がある。

計算はコンピューターに任せるべきなのか？

おそらく、そのような世代の人たちは、コンピューターは何が得意なのかを直観的に理解し、大きな桁数の計算や大量のデータの検索など、コンピューターに任せるべき仕事があることを認めることができるだろう。彼らは彼らを教える教師以上にそのことを肌で理解し、より自然に、必要な場面でコンピューターを使い始めるだろうと思われる。

前に触れた、日本の教室にコンピューターが入ってこない2つ目の理由は、コンピューターを使った新しい教育の裏に、「教育用コンピューター」という将来性のある新規産業の圧力が見え隠れしていることに教師が敏感に反応しているからである。コンピューターの美しい画面以上に、スーツ姿の営業マンに騙されないように警戒心が働いているのである。生徒も、肩肘の張った「新しい教育」としてではなく、将来の自分の仕事場となる場所でごく自然にコンピューターが使われていることを知れば、いろいろな教科で抵抗感なくコンピューターを使うようになるだろう。

直観は間違えるのか？

ある種の確率論の問題では、直観に頼ると間違える問題のパターンがあることが知られている。そのような問題をどう扱うべきかについては意見が分かれるところである。

もし、生徒の成績を向上させることが教育の目的であるとすれば、そのような問題は特に注意して出題しないようにし、もしそのような問題に出くわしてしまったら、直観ではなく論理的な計算によって答を導くように指導すべきだろう。

一方、生徒に深く学ばせることが教育の目的であると考えられるなら、まず直観的に答を出し、次に計算で答を出して比較するという授業が考えられる。

実際には、生徒は直観的に考えられる問題は直観で考えようとする。それが人間にとって自然だからである。その答は、たとえ数学的な観点からは間違っているとしても、別の意味の合理性、進化合理性を備えている。動物の日々の生存競争の中ではたとえ間違っているとしても速く答を出すことが重要である場面が少なくない。

一方で、判断を誤れば重大な損害が想定されるような意思決定、例えば、極端な例では、政治家が決断を下すような国家の命運を決する重要課題については、数学的に推論したり、コンピューターでシミュレーション実験を行ったたり、それぞれの分野の専門家の判断を参考にしたりする方がよい場合もある。この場合の直観的思考と論理的思考の

関係は非常に微妙であり、決定的な結論は存在しないように思われる。

日本近代政治史を専門とする加藤陽子は、近著の中で、人間の直観は将来の出来事に対する確率論的思考に不向きであるという、経済学、ゲーム理論ではよく知られている事実を戦前の日本の政治史に当て嵌めて論じている。歴史研究への経済学の応用はこれまでになかった。

また、イスラエルの数学者ツヴィ・アートシュタインは、近著の中でイスラエルにおけるパレスチナ問題に触れている。イスラエルはヨルダン川西岸、ガザ地区などを占領したまま和平交渉は全く進展していない（第3次中東戦争）。数学的な解答は、イスラエルが占領地をパレスチナに返還することなのだが、イスラエル政府がその決断を下げない理由もまた、加藤陽子が戦前の日本の政治について展開している分析と同型である¹⁾³⁾。

付記 本編を著すにあたり、数学教育学会の皆さまに大変お世話になりました。感謝いたします。

参考文献

- 1) Zvi Artstein, *Mathematics and the Real World---The Remarkable Role of Evolution in the Making of Mathematics*, Prometheus Books, 2015. chap. VI The mathematics of Human Behavior, pp. 258-262.
- 2) 石川一郎『2020年の大学入試問題』講談社現代新書, 2016.
- 3) 加藤陽子『戦争まで---歴史を決めた交渉と日本の失敗』朝日出版社, 2016. 第2章 選択することの困難さを自覚する, pp. 160-170.
- 4) 加藤陽子『それでも、日本人は「戦争」を選んだ』朝日出版, 2016.
- 5) 榊原知美（編著）『算数・理科を学ぶ子どもの発達心理学 ---文化・認知・学習』ミネルヴァ書房, 2014.
- 6) 小泉英明（編著）『脳科学と学習・教育』明石書店,
- 7) 町田彰一郎「日本の数学教育の源流を探る」創英社／三省堂書店, 2016.
- 8) 守屋誠司（編著）『教科力シリーズ 小学校算数』玉川大学出版部, 2015, pp.9-12
- 9) 新井紀子『コンピューターが仕事を奪う』日本経済新聞出版社, 2010.