

# Tricorn と attracting odd order cycles の分岐

中 根 静 男

## Tricorn and bifurcation of attracting odd order cycles

Shizuo NAKANE

Abstract: A family of antiholomorphic maps:  $f_c(z) = \bar{z}^2 + c$  ( $c \in \mathbf{C}$ ) is considered. The connectedness locus for this family is called "tricorn" or "Mandelbar set". Computer experiment suggests that attracting odd order cycles for this family bifurcate along piecewise smooth curves with three cusps, which are called "deltoids". This phenomenon never appears for analytic families of polynomials. In this note, a sufficient condition for saddle-node bifurcation of such cycles along deltoids is given. This condition seems to be necessary.

### § 1. 序

この小論では、関数族

$$f_c(z) = \bar{z}^2 + c \quad (c \in \mathbf{C})$$

の力学系を考える。この関数族は、2 次関数の族  $P_c(z) = z^2 + c$  ( $c \in \mathbf{C}$ ) のアナロジーとして、あるいは 3 次関数族  $Q_{a,b}(z) = z^3 - 3az + b$  ( $a, b \in \mathbf{C}$ ) の中の部分族の研究として、近年、色々な人々によって調べられている。Milnor [5], Rippon et al. [1], Winters [8] を見よ。

我々の主たる研究対象は、この関数族の connectedness locus:

$$\mathfrak{F} = \{c \in \mathbf{C} ; \lim_{n \rightarrow \infty} |f_c^n(0)| < \infty\}$$

である。ここで  $f_c^n(z)$  は  $f_c$  の  $n$  回合成を意味する。 $\mathfrak{F}$  は "tricorn" または "Mandelbar 集合" と呼ばれる。これは、2 次関数族  $\{P_c\}$  の connectedness locus である Mandelbrot 集合に相当するものである。図 1 及び図 2 に Mandelbrot 集合と tricorn を各々示す。

tricorn は、Mandelbrot 集合と類似の性質(例

えば自己相似性)を持つ一方、著しく異なる性質も持つ。例えば、Mandelbrot 集合は局所連結であると予想されているが、tricorn は計算機実験から局所連結でないことが推測され、実際に示されたそうである (Lavaurs [3] を見よ)。また、Mandelbrot 集合の境界は、至るところ微分不可能な曲線から成るのに対し、tricorn の境界には滑らかな部分があることが、Winters [8] によって示された。

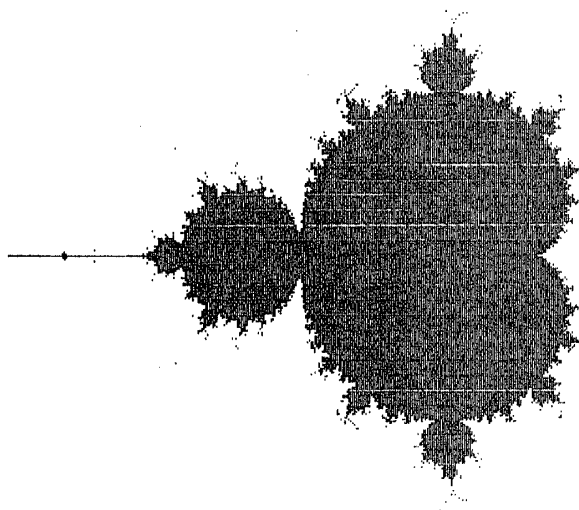


図 1 Mandelbrot 集合

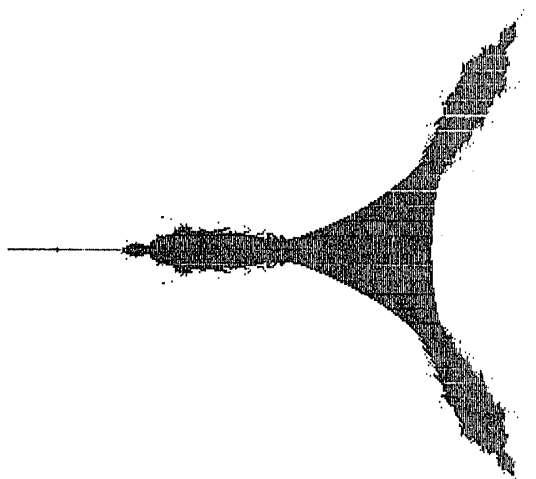


図 2 tricorn

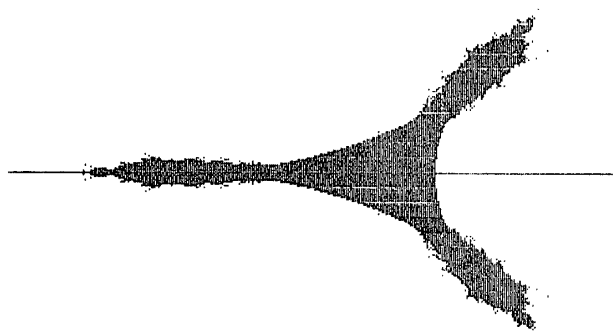


図 3 tricorn の 1 部分の拡大図

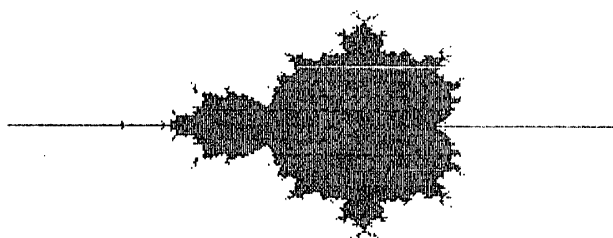


図 4 tricorn の別の部分の拡大図

tricorn の 1 部分を拡大すると、図 3 のように、再び tricorn が現われる。この意味で tricorn は自己相似性を持つ。更に、ある部分を拡大すると、図 4 のように、Mandelbrot 集合も現われる。これは非常に興味深い現象である。Mandelbrot 集合の自己相似性については Douady-Hubbard [2] の中で tuning の理論として解明された。ここでは、Mane-Sad-Sullivan [4] の理論が用いられているが、その際に、パラメータの複素解析性が本質的であった。しかるに、tricorn の場合は  $f_c$  が antiholomorphic であるために、この性質を

持たないので、MSS の理論が適用できないのである。にもかかわらず、tricorn が自己相似性を持ったり、非解析的なパラメータを持つ関数族において Mandelbrot 集合が現われるということは、パラメータの解析性が本質的でないことを意味する。従って、非解析的なパラメータをもつ関数族に対して MSS の理論や DH の理論を拡張することは重要な問題であろう。

さて、以下では、tricorn に現われる滑らかな曲線について考察する。

## § 2. Attracting odd order cycles について

$f_c$  の周期点とは、ある自然数  $n$  があって、

$$(1) \quad f_c^n(z) = z$$

を満たす点  $z$  のことである。(1) をみたす最小の  $n$  を  $z$  の周期といい、 $z$  を  $n$  周期点ともいう。 $f_c$  は antiholomorphic だが、

$$f_c^2(z) = (\bar{z}^2 + c)^2 + c = (z^2 + \bar{c})^2 + c$$

故、 $f_c^2$  は  $z$  の正則関数になる。以下、帰納的に、 $f_c^n$  は  $n$  が偶数のとき正則(つまり、 $z$  しか現われない)で、 $n$  が奇数のとき antiholomorphic (つまり、 $\bar{z}$  のみの関数)になることが示される。

さて、正則関数  $f(z)$  の  $n$  周期点  $z_0$  に対し、 $z_j = f^j(z_0)$  ( $j \geq 0$ ) とおくと、 $z_n = z_0$  となる。数列  $\{z_0, z_1, \dots, z_{n-1}\}$  を  $n$ -cycle という。 $z_0$  の固有値  $\rho$  を  $\rho = (f^n)'(z_0)$  と定義する。合成関数の微分則より、 $\rho = \prod_{j=0}^{n-1} f'(z_j)$  となるので、これは  $n$ -cycle  $\{z_j\}$  の固有値というべきものでもある。 $|\rho| < 1$  ( $> 1$  又は  $= 1$ ) のとき、 $z_0$  あるいは  $n$ -cycle は attracting (repelling 又は indifferent) と呼ぶ。

我々の場合、 $f_c$  が antiholomorphic 故、 $n$  が奇数のときは、上のように固有値を定義することはできない。そこで、 $f_c$  の代わりに  $Q_c = f_c^2$  を考える。 $n$  が奇数のとき、 $f_c$  の  $n$  周期点  $z_0$  は  $Q_c$  の  $n$  周期点である。そこで  $z_0$  の  $Q_c$  の  $n$  周期点としての固有値を  $\rho$  とおくと、 $\rho = (Q_c^n)'(z_0)$  となる。このとき、次を得る。

**補題 1.**  $\rho = 4^n |z_0 z_1 z_2 \cdots z_{n-1}|^2$ . 特に  $\rho$  は非負実数。

(証明)  $Q_c(z) = f_c^2(z) = (z^2 + \bar{c})^2 + c$  より、

$$Q_c'(z) = 4z(z^2 + \bar{c}) = 4z\overline{f_c(z)}$$

となるので

$$\begin{aligned}\rho &= \prod_{j=0}^{n-1} Q_c'(z_j) \\ &= \prod_{j=0}^{n-1} 4z_j \overline{f_c(z_j)} \\ &= \prod_{j=0}^{n-1} 4z_j \overline{z_{j+1}} \\ &= 4^n |z_0 z_1 z_2 \cdots z_{n-1}|^2\end{aligned}$$

**注意 1.** Winters は上の  $\rho$  の正の平方根  $\sqrt{\rho}$  を  $z_0$  の固有値としている。

固有値が常に実数になるという現象は多項式の analytic family の場合には考えられないことで、ここに tricorn の Mandelbrot 集合との相違点がある。Ushiki [7] の Blaschke 関数族の場合にも attracting cycle の固有値は実数になるが、このときは “swallow's tail” が現われる。この辺の状況を Milnor は critical points の軌道の振舞によって説明した。彼によると、tricorn と swallow's tail は同じ物の別の断面である。

さて、 $F(\bar{z}, c, \bar{c}) = f_c^n(z)$  とおく。以下、 $n$  は常に奇数とする。 $f_c$  の  $n$  周期点は

$$(2) \quad F(\bar{z}, c, \bar{c}) = z$$

を満たす。これより、 $c$  を  $z$  の関数とみなせるが、(2) とその共役から、 $c, \bar{c}$  を  $z, \bar{z}$  の関数ともみなせる。ここで  $z, \bar{z}$  を実変数とみなすと、写像  $\Phi: \mathbf{R}^2_{(z, \bar{z})} \rightarrow \mathbf{R}^2_{(c, \bar{c})}$  が定義される。都合が悪い点もあるだろうが、そういう点を除けば、 $\Phi$  は局所的には実解析的になる。そこで、 $\Phi$  の特異点を調べてみる。

**補題 2.**  $\Phi$  のヤコビアン  $J(\Phi)$  は

$$J(\Phi) = \frac{1 - |F_{\bar{z}}|^2}{\Delta} = \frac{1 - (Q_c^n)'(z)}{\Delta}$$

但し、 $\Delta = |F_c|^2 - |F_{\bar{c}}|^2$ 。

(証明) (2) の両辺を  $z$  及び  $\bar{z}$  で偏微分すると、

$$F_c c_z + F_{\bar{c}} \bar{c}_z = 1$$

$$F_c c_{\bar{z}} + F_{\bar{c}} \bar{c}_{\bar{z}} = -F_{\bar{z}}$$

これを  $c_z, \bar{c}_z$  について解くと、

$$c_z = \frac{F_c + F_{\bar{c}} \overline{F_{\bar{z}}}}{\Delta}, \quad \bar{c}_z = -\frac{\overline{F_{\bar{c}}} + F_c \overline{F_{\bar{z}}}}{\Delta}$$

となる。従って、

$$J(\Phi) = \left| \frac{c_z}{\bar{c}_z} \frac{c_{\bar{z}}}{\bar{c}_{\bar{z}}} \right| = |c_z|^2 - |\bar{c}_z|^2 = \frac{1 - |F_{\bar{z}}|^2}{\Delta}$$

また、 $n = 2k + 1$  とおくと、帰納的に

$$F_{\bar{z}} = 2^n \bar{z}_0 \prod_{j=1}^k \bar{z}_{2j} \bar{z}_{2j-1}$$

が示されるので、 $|F_{\bar{z}}|^2 = (Q_c^n)'(z)$  となる。

ここで分母の  $\Delta = 0$  となる点が気になるが、おそらく  $\Delta = 0$  となる点は無視できると思われるので、以下においては、 $\Delta \neq 0$  と仮定する。

以下  $\Sigma = \{(z, \bar{z}, c, \bar{c}) ; F(\bar{z}, c, \bar{c}) = z\}$  上で考える。

**命題 1.**

$$\Sigma^1 = \{(z, \bar{z}) ; |F_{\bar{z}}| = 1\}$$

$$\Sigma^{1,1} = \{(z, \bar{z}) \in \Sigma^1 ; \operatorname{Re}(F_{\bar{z}}^{\frac{3}{2}} \overline{F_{\bar{z}\bar{z}}}) = 0\}$$

とおくと、 $\Sigma^1 - \Sigma^{1,1}$  は  $\Phi$  の fold points の集合であり、

$$\{(z, \bar{z}) \in \Sigma^{1,1} ; 3|F_{\bar{z}\bar{z}}|^2 + 2\operatorname{Re}(\overline{F_{\bar{z}\bar{z}\bar{z}}} F_{\bar{z}}^2) \neq 0,$$

$$\operatorname{Im}[F_{\bar{z}}^{\frac{1}{2}} \{2(\overline{F_{\bar{z}c}} \overline{F_{\bar{c}}} - \overline{F_{\bar{z}\bar{c}}} F_c) F_{\bar{z}} + 2(\overline{F_{\bar{z}c}} F_c - \overline{F_{\bar{z}\bar{c}}} F_{\bar{c}}) - \Delta F_{\bar{z}} \overline{F_{\bar{z}\bar{z}}}\}] \neq 0\}$$

は  $\Phi$  の cusp points の集合になる。

**系 1.**  $f_c$  の attracting  $n$ -cycle はパラメータ空間内の曲線  $\Phi(\Sigma^1 - \Sigma^{1,1})$  上、saddle-node 分岐する。この曲線上、 $2n$ -cycle も saddle-node 分岐して、上の  $n$ -cycle と連続的につながる。

(命題の証明)  $\bar{c}_{\bar{z}}$  と  $\bar{c}_z$  は同時に 0 になることはないので  $\bar{c}_{\bar{z}} \neq 0$  としてよい。 $c^\omega$  写像

$$h: \mathbf{R}^2_{(z, \bar{z})} \rightarrow \mathbf{R}^2_{(z, u)}$$

$$h: \begin{cases} z = z \\ u = \bar{c}(z, \bar{z}) \end{cases}$$

と定義する。 $J(h) = \bar{c}_{\bar{z}} \neq 0$  より逆写像  $h^{-1}$  が定義される。

$$h^{-1}: \begin{cases} z = z \\ \bar{z} = \bar{z}(z, u) \end{cases}$$

とおくと、 $u \equiv \bar{c}(z, \bar{z}(z, u))$ 。これから

$$\bar{z}_z = -\frac{\bar{c}_z}{\bar{c}_{\bar{z}}}, \quad \bar{z}_u = \frac{1}{\bar{c}_{\bar{z}}}$$

が従う。このとき、

$$\tilde{\Phi} = \Phi \circ h^{-1}: \begin{cases} c = c(z, \bar{z}(z, u)) \\ \bar{c} = u \end{cases}$$

によって  $\tilde{\Phi}$  を定義する。Morin [6] による特異点の特徴付けを適用する。

$$J(\tilde{\Phi}) = \frac{J(\Phi)}{J(h)} = \frac{1 - |F_{\bar{z}}|^2}{\Delta \bar{c}_{\bar{z}}}$$

である.  $\Sigma^1 = \{(z, \bar{z}); |F_{\bar{z}}|^2 = 1\}$  とおく.  $\Sigma^1$  上  $\frac{\partial^2 C}{\partial z^2}$  を考える.

$$\frac{\partial^2 C}{\partial z^2} = -\frac{F_{\bar{z}} \overline{F_{\bar{z} \bar{z}}} + \overline{F_{\bar{z}}} F_{\bar{z} \bar{z}} \bar{z}_z}{\Delta \bar{c}_{\bar{z}}} + 0(1 - |F_{\bar{z}}|^2).$$

$\Sigma^1$  上,

$$\begin{aligned} \bar{z}_z &= -\frac{\bar{c}_z}{\bar{c}_{\bar{z}}} = -\frac{\overline{F_{\bar{z}}} + F_{\bar{z}} \overline{F_{\bar{z}}}}{F_{\bar{z}} + \overline{F_{\bar{z}}} F_{\bar{z}}} \\ &= \frac{1}{F_{\bar{z}}} + 0(1 - |F_{\bar{z}}|^2) \end{aligned}$$

故,

$$\frac{\partial^2 C}{\partial z^2} = -\frac{F_{\bar{z} \bar{z}} + F_{\bar{z}}^3 \overline{F_{\bar{z} \bar{z}}}}{\Delta \bar{c}_{\bar{z}} F_{\bar{z}}^2} + 0(1 - |F_{\bar{z}}|^2).$$

従って,  $\Sigma^{1,1} = \{(z, \bar{z}) \in \Sigma^1; \operatorname{Re}(F_{\bar{z}}^{\frac{3}{2}} \overline{F_{\bar{z} \bar{z}}}) = 0\}$  とおくと,  $\Sigma^1 - \Sigma^{1,1}$  は  $\tilde{\Phi}$ , 従って  $\Phi$  の fold points の集合となる.

次に  $\Sigma^{1,1}$  上,  $\frac{\partial^3 C}{\partial z^3}$  と  $\frac{\partial^2 C}{\partial u \partial z}$  を考える.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 C}{\partial z^3} &= -\frac{3|F_{\bar{z} \bar{z}}|^2 + 2\operatorname{Re}(F_{\bar{z} \bar{z}} \overline{F_{\bar{z} \bar{z}}})}{\Delta \bar{c}_{\bar{z}} F_{\bar{z}}^3}, \\ \frac{\partial^2 C}{\partial u \partial z} &= -\frac{F_{\bar{z}}^{\frac{1}{2}}}{\Delta^2 \bar{c}_{\bar{z}}^2} (2i \operatorname{Im}[F_{\bar{z}}^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \{(\overline{F_{\bar{z} c}} F_{\bar{c}} - \overline{F_{\bar{z} \bar{c}}} F_{\bar{c}}) F_{\bar{z}} \\ &\quad + \overline{F_{\bar{z} c}} F_{\bar{c}} - \overline{F_{\bar{z} \bar{c}}} F_{\bar{c}}\}] - \Delta \overline{F_{\bar{z} \bar{z}}} F_{\bar{z}}^{\frac{3}{2}}), \end{aligned}$$

より命題を得る.

例  $n=1$  とする.  $F = \bar{z}^2 + c$  故,

$$\Phi : \begin{cases} c = z - \bar{z}^2 \\ \bar{c} = \bar{z} - z^2. \end{cases}$$

$$\Sigma^1 : |F_{\bar{z}}| = |2\bar{z}| = 1, \text{ つまり } |z| = \frac{1}{2},$$

$$\Sigma^{1,1} : F_{\bar{z} \bar{z}} + F_{\bar{z}}^3 \overline{F_{\bar{z} \bar{z}}} = 2(1 + 8\bar{z}^3) = 0$$

$$\text{より } z = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} e^{\pm \frac{\pi}{3} i}.$$

となり  $\Sigma^{1,1}$  の点はすべて cusp point になる.  $\Phi(\Sigma^1)$  は main deltoid に対応する. この場合は Rippon [1] で具体的に調べられている. 上の系は, 彼らの結果を, 高い周期の場合に拡張しようとしたものである.

**注意 2.** main deltoid の 3 つの cusp 点には, attracting 2-cycles が存在する領域  $D_2$  が付着

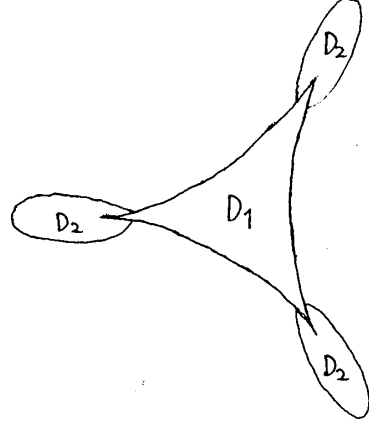


図 5 main deltoid

している. 図 5 を見よ. Rippon 達は, cusp 点の近くで, 実際にこれを確かめた. 高い周期のときも同様の事実が示せるはずである.

**注意 3.** Winters は main deltoid の 1 部分には, どんな hyperbolic components も付着していない部分があることを示した. 計算機実験は, 高周期の場合も同様の事実が成り立つことを示唆している. Winters 自身も予想として述べている.

### §3 Involution で不変な多項式族

Milnor [5] は, 3 次関数の族  $f_{a,b}(z) = z^3 - 3az + bi$  ( $a, b \in \mathbf{R}$ ) の connectedness locus の中に tricorn を発見した. この関数族の特徴は, involution  $z \rightarrow -\bar{z}$  に関して不変ということである. つまり,

$$f_{a,b}(-\bar{z}) = -\overline{f_{a,b}(z)}$$

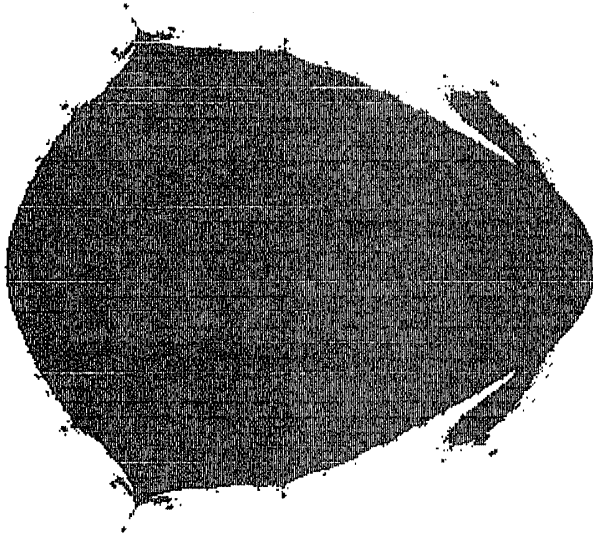
をみtas. そこで involution  $z \rightarrow \bar{z}$  または,  $z \rightarrow -\bar{z}$  で不変な多項式の実 2 パラメータ族を考えれば tricorn が現われることが予想される. 実際, それは正しいことが確認される. 図 6, 7 参照.

今,  $f_c(z)$  を,  $(c, \bar{c})$  をパラメータにもつ多項式の族で, involution  $z \rightarrow \bar{z}$  または  $z \rightarrow -\bar{z}$  で不変なものとする. どちらでも同じことなので,  $z \rightarrow \bar{z}$  で不変とする. つまり,  $f_c(\bar{z}) = \overline{f_c(z)}$  をみtas とする.  $f_c$  の  $2k$  周期点の中で,

$$(3) \quad f_c^k(z_0) = \bar{z}_0$$

をみtas ものを考える.  $z_j = f_c^j(z_0)$  ( $j \geq 0$ ) とおくと,  $z_k = \bar{z}_0$  故,

$$z_{k+j} = f_c^j(z_k) = f_c^j(\bar{z}_0) = \overline{f_c^j(z_0)} = \bar{z}_j.$$

図 6  $f_3(z)$  の connectedness locus

特に  $z_{2k} = \overline{z_k} = \overline{z_0} = z_0$  となり,  $z_0$  は  $2k$  周期点になる.

補題 3. この  $z_0$  の固有値  $\rho$  は

$$\rho = (f_c^{2k})'(z_0) = \prod_{j=0}^{k-1} |f_c'(z_j)|^2.$$

さて,  $F(z, c, \bar{c}) = f_c^k(z)$  とおくと, (3) は

$$F(z, c, \bar{c}) = \bar{z}$$

となり, これより,  $c, \bar{c}$  は  $z, \bar{z}$  の関数とみなせば, 局所的に  $c^\omega$  な写像  $\Phi: \mathbf{R}^2_{(z, \bar{z})} \rightarrow \mathbf{R}^2_{(c, \bar{c})}$  が定義される.

$$\text{補題 4. } J(\Phi) = \frac{|F_z|^2 - 1}{\Delta} = \frac{(f_c^{2k})'(z) - 1}{\Delta}$$

但し,  $\Delta = |F_c|^2 - |F_{\bar{c}}|^2$ .

以下  $\Delta \neq 0$  と仮定する.

命題 2.  $\Sigma^1 = \{(z, \bar{z}); |F_z|^2 = 1\}$ ,

$$\Sigma^{1,1} = \{(z, \bar{z}) \in \Sigma^1; \operatorname{Re}(F_{zz}^{\frac{3}{2}} \overline{F_{zz}}) = 0\}.$$

とおくと,  $\Sigma^1 - \Sigma^{1,1}$  は  $\Phi$  の fold points の集合であり,

$$\{(z, \bar{z}) \in \Sigma^{1,1}; 3|F_{zz}|^2 + 2\operatorname{Re}(\overline{F_{zzz}} F_z^2) \neq 0,$$

$$\operatorname{Im}[\overline{F_z^{\frac{1}{2}}} \{2(F_{zc} F_{\bar{c}} - F_{z\bar{c}} F_c) \overline{F_z} + 2(F_{zc} \overline{F_c} - F_{z\bar{c}} \overline{F_{\bar{c}}}) - \Delta F_{zz} \overline{F_z}\}] \neq 0\}$$

は  $\Phi$  の cusp points の集合である.

系 2. (3) を満たす  $f_c$  の  $2k$ -cycle はパラメータ空間内の曲線  $\Phi(\Sigma^1 - \Sigma^{1,1})$  上, saddle-node 分岐する. この曲線上で, (3) を満たさない  $2k$ -cycle も saddle-node 分岐して, 上の  $2k$ -cycle とつながる.



図 7 図 6 の 1 部分の拡大図

注意 4. Milnor [5] は 3 次関数族の dynamics を研究し, tricorn が現われる場合の dynamics のプロトタイプが, biquadratic map  $z \rightarrow (z^2 + \bar{c})^2 + c$  であることを見抜いた. この map は, 前節の  $Q_c = f_c^2$  と一致していることに注意する. 本節で述べた involution 不変な多項式族に対しても Milnor の指摘は正しい. 但し, 実際にそれを証明するためには, 2 次関数族の場合の tuning の理論に対応する, surgery の理論が必要である. そして, ここでも, パラメータの非解析性が問題を難しくしている.

例  $f_1(z) = z^3 - 3az + b$

$$f_2(z) = z^3 - 3az + bi$$

$$f_3(z) = z^4 - \frac{8}{3} az^3 + 2(a^2 + b^2)z^2$$

$$f_4(z) = z^4 - \frac{4}{3} bz^2 + 2a^2 z^2 - 4a^2 bz + \frac{1}{3} b^4$$

$$+ 2a^2 b^2 + b$$

但し,  $a, b \in \mathbf{R}$ .  $f_2$  以外は  $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$  をみたす. 例えば,  $f_3$  の connectedness locus と, その拡大図を図 6, 7 に示す. 確かに tricorn の姿を見ることができる.

## 文 献

- [ 1 ] W. D. Crowe, R. Hasson, P. J. Rippon, P. E. D. Strain-Clark : On the structure of the Mandelbar set, *Nonlinearity*, 2 (1989) , 541-553.
- [ 2 ] A. Douady & J. H. Hubbard : On the dynamics of polynomial-like mappings, *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.*, 18 (1985) , 287-343.
- [ 3 ] P. Lavaurs : Le lieu de connexité des polynômes du troisième degré n'est pas localement connexe, in preparation.
- [ 4 ] R. Mane, P. Sad & D. Sullivan : On the dynamics of rational maps, *Ann. Sci. Ec. Norm. Sup.*, 16 (1983) , 193-217.
- [ 5 ] J. Milnor : Remarks on iterated cubic maps, Preprint.
- [ 6 ] B. Morin : Formes canoniques de singularités d'une application différentiable, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 260 (1965) , 5662-5665.
- [ 7 ] S. Ushiki : A surgery on Blaschke's function, *Japan J. Appl. Math.*, 5 (1988) , 407-429.
- [ 8 ] R. Winters : Bifurcations in families of anti-holomorphic and biquadratic maps, Thesis, Boston Univ.