

# 数学教育における CAI

## —フラクタル幾何学入門—

中 根 静 男

### CAI in mathematical education

Shizuo NAKANE

In mathematical education, it is important to present many concepts as concretely as possible. The graphic function of micro-computers helps us visualize them. In this note, we shall state our experience at Tokyo Institute of Polytechnics to teach fractal geometry by using micro-computers in the course of differential and integral calculus.

#### 1. 序

この小論は、筆者の本学における微分積分学 I 及び II の教育実践の報告である。近年、CAI が盛んに叫ばれているが、筆者の考える CAI、特に数学教育における CAI とは、パソコンのグラフィック機能を利用することにより、一見して抽象的な数学の諸概念を視覚化することにある。この意味で最も成功したと言えるのは Taylor 展開であろう。教科書に載っている Taylor 展開の解説を読んだだけで、その意味を理解するのは容易ではない。そのつかみどころのない概念をコンピュータはいともたやすく映像化してくれるのである。実際に、ある学生に見せたところ、「3ヶ月間、考えてわからなかったのが、3分でわかった。」と感動した程である。

一方、近年、高性能パソコンの普及により、数学の研究においてもパソコンを利用する機会が増えつつある。とりわけ、フラクタル幾何学（正確には複素力学系の理論という）は、手計算による研究が、1920年代に行き着く所まで行った後、しばらく沈滞していたが、1980年代に入って、パソ

コンの普及により、新たな問題意識が生まれ、爆発的に進展しつつある。

さて、筆者は、この理論を勉強する内に、その中の比較的初等的な部分が、大学1年生にも理解可能であり、しかも、それが微分積分の応用の一例にもなることに気がついた。もちろん、理解可能というのは、予備知識が要らないという意味であり、実際に理解するのは容易ではない。というより、ほとんど誰も理解していないと言った方が正しいであろう。しかし、そこは美しいコンピュータグラフィックスで乗り切ることになろう。こうして筆者の「フラクタル」教育は始まったのである。

筆者は、この教育を62年度より行なってきた。写真工学科1年の工業基礎数学演習、建築学科1年の微分積分学 I、電子工学科2年の微分積分学 II の前期の講義の大半がその解説に費される。すると、教科書に載っているような、オーソドックスな微分積分学を教える時間がかなり圧迫されるわけであるが、筆者はそれでいいと思っている。「広く浅く」よりは「狭くてもよいから深く」教えたのである。フラクタルはそれ自身としても面白いし、色々な分野への応用もあるので、将来

Newton 流の微分積分学と並んで、大学(あるいは高校)の数学教育のカリキュラムに入ってくるだろうし、又、入れるべきだと筆者は考える。それに、何よりも学生がそれを望んでいるのだから。

## 2. 複素力学系について

この節では講義の数学的中味を紹介する。 $f(z)$  を複素変数  $z$  の多項式、 $f^n(z) = f \circ f \circ \dots \circ f(z)$  を  $f$  の  $n$  回反復合成とする( $f^0(z) = z$  とする)。各点  $z_0$  に対し、数列  $z_n = f^n(z_0)$  ( $n \geq 0$ ) を  $z_0$  の軌道という。言い換えると、 $z_0$  の軌道とは、 $z_0$  を初項とし、漸化式  $z_n = f(z_{n-1})$  ( $n \geq 1$ ) で定義される数列のことである。複素力学系の理論とは、 $n \rightarrow \infty$  としたときの軌道の性質を調べることだといえよう。

例 1.  $f(z) = z^2$  とすると  $f^n(z) = z^{2^n}$ 。次は易しい。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(z_0) = \begin{cases} \infty & (|z_0| > 1) \\ 0 & (|z_0| < 1) \end{cases}$$

$|z_0| = 1$  のとき、軌道は単位円周  $|z| = 1$  上を chaotic に回り続ける。

この例がほとんどすべてを尽くしているといつてよい。つまり、軌道は、ある点に収束するか、chaotic な運動をするかに大別される。ここで極限である  $0$  と  $\infty$  は何かを説明しよう。

定義. ある  $k$  があって  $f^k(z_0) = z_0$  を満たす  $z_0$  を  $f$  の周期点という。この式を満たす最小の  $k$  を  $z_0$  の周期といい、 $z_0$  は  $f$  の  $k$  周期点ともいう。 $f$  の  $k$  周期点  $z_0$  の固有値  $\rho = \rho(z_0)$  を  $\rho = (f^k)'(z_0)$  で定義する。更に、

$|\rho| < 1$  のとき  $z_0$  を誘惑的 (attracting)

$|\rho| = 1$  のとき  $z_0$  を無関心的 (indifferent)

$|\rho| > 1$  のとき  $z_0$  を反発的 (repelling)

という。「誘惑的」とは筆者の命名であり、正確には「吸引的」と呼ばれる。

例 1 では、 $0, \infty$  とともに 1 周期点 (不動点) で、 $\rho = 0$  となる ( $\infty$  の場合、座標変換して考えることに注意) ので、誘惑的 (この場合は特に超誘惑的

という) である。つまり、誘惑的周期点は近くの点を魅きつける魅力を持ち、反発的周期点は逆に遠ざける性質を持つ。

多項式  $f$  に対して、 $\infty$  は常に超誘惑的不動点となることがわかるので、その軌道が  $\infty$  に近づかない  $z_0$  の全体を考えることには意味がある。

定義.  $K_f = \{z_0 \in \mathbb{C} ; \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(z_0) \neq \infty\}$  を  $f$  の filled-in Julia 集合といい、その境界  $J_f$  を Julia 集合という。

関数  $f$  に対し、 $f'(z) = 0$  を満たす点  $z$  を  $f$  の特異点という。関数の力学系を調べる時、特異点の軌道が最も大切で、これさえわかれば、すべてがわかるといってよいことに注意する。

さて、実際には、1 つの関数を考えるよりも、パラメータを入れた、関数の族を考える方が応用上重要である。その中で、2 次関数全体の族は、理論上も応用上も重要であるだけでなく扱い易いのでよく研究されている。すべての 2 次関数は、1 次変換により、力学系の意味で、 $P_c(z) = z^2 + c$  に同値であることがわかるので、2 次関数全体を考えるには、1 パラメータ族  $\{P_c\}$  を考えればよい。 $P_c$  の特異点は ( $\infty$  以外は)  $0$  だけなので、 $0$  の軌道を調べればよい。

定義.  $M = \{c \in \mathbb{C} ; \lim_{n \rightarrow \infty} P_c^n(0) \neq \infty\}$  を Mandelbrot 集合という。

これらの集合は、その 1 部分を拡大していくと元と同じ物が現われるという意味で自己相似性を持つ。自己相似性を持つものをフラクタルと呼ぶ。最近、雑誌や単行本等でコンピュータグラフィックスとして描かれているのはこれらの集合である。

Mandelbrot 集合は図 1 のように、心臓形(カーディオイド)に付着する大小様々な円達の集まりである。実は Mandelbrot 集合の各円には深い意味がある。各円には周期がひとつ対応していて、 $c$  をその円の中から持ってくると  $P_c(z)$  はその周期の誘惑的周期点を持つ。各円の周上、偏角が有

理数であるような点からは小さな円が芽をふき、これが無限にくり返される。c が 1 つの円から小さな円に移ると、誘惑的周期点が分岐して、より大きい周期の誘惑的周期点になる。

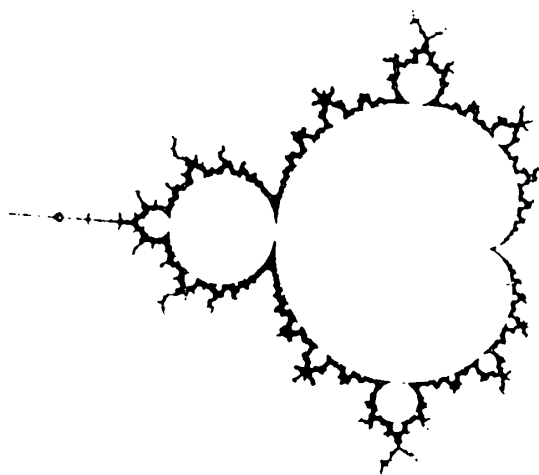


図 1 Mandelbrot 集合  
([8]より抜粋)

一方、円周上、偏角が無理数である点（例外を除いて）を  $c$  が通過すると、 $c$  は Mandelbrot 集合の外に出てしまう。このとき誘惑的周期点は消滅する。すると、それまで、その誘惑的周期点に引かれていた特異点 0 は、残ったもう 1 つの誘惑的不動点である  $\infty$  に引かれるようになる。c が丁度、円周上に来たとき、0 の軌道は閉曲線に近づく。この閉曲線によって囲まれる領域を Siegel disk という。

実は 2 次関数の場合、有限の特異点が 0 だけなので、0 の軌道から定義した Mandelbrot 集合は 2 次関数の力学系をすべて分類してしまう。この意味で、Mandelbrot 集合は、元素を分類したメンデレーエフの周期表に相当するものといえる。

最後に、複素力学系の例として、数値解折でも重要な Newton 法について述べる。Newton 法とは、方程式  $g(z)=0$  の根の近似法である。この  $g(z)$  に対し、 $f(z)=z-\frac{g(z)}{g'(z)}$  とおき、初項  $z_0$  を適当にとると、数列  $z_n=f^n(z_0)$  は  $g(z)=0$  のある根に収束する。従って数列  $z_n$  が  $g(z)=0$  の根を近似するのである。この近似は精度が非常に良い上に、再帰性を持つ数列によって定義されるので計算機に乗り易い。しかし、 $g(z)=0$  のどの根に近づくか

は初項  $z_0$  に非常にデリケートに依存する。

Newton 法を複素力学系の立場から眺めると、 $g(z)=0$  の根が  $f$  の超誘惑的不動点になっていることが容易にわかる。まさにこのおかげで  $g(z)=0$  の根は「引力」を持つのである（Newton にとっては、誘惑的周期点への収束も万有引力の為せる業なのであろう）。各根は各々引力圏を持ち、初項のある根の引力圏からとると数列はその根に収束する。各引力圏は filled-in Julia 集合の内部に相当し、各引力のつり合う所が Julia 集合にあたる。

### 3. 授業内容

フラクタル幾何学の要点は前節に述べた通りだが、授業はこの順に行なうわけではない。以下に授業内容を順を追って述べる。

#### (1) Newton 法

まず、 $g(z)=z^2-2$ 、 $z_0=1$  として  $z_n$  を計算させる。すると、 $\sqrt{2}$  の近似値が手計算で得られる。次に 3 次関数の 3 根の引力圏をパソコンで調べさせた。そのリストがリスト 1 である。

#### (2) 周期点・固有値の計算

色々な関数を取りあげ、それらの周期点・固有値を計算させ、Mandelbrot 集合を理論的に描かせる。ここで、合成関数や種々の微分法則等に習熟させる。

#### (3) Mandelbrot 集合の作図（パソコン実習）

#### (4) 831 教室における力学系の追跡

2 次関数  $P_c(z)=z^2+c$  で  $c$  を適当に与えて filled-in Julia 集合上初項を与えて、その軌道をパソコンに追跡させる。学生はスクリーン上に誘惑的周期点を実際に見ることができる。

#### (5) 誘惑的周期点と Siegel disk を見る（パソコン実習）

今度は学生にパソコンを操作させる。パラメータ  $c$  を色々とることにより、色々な周期の周期点が見つかる。Siegel disk を見つけるには小数点以下 6 桁以上の精度を要求されるので、試行錯誤を繰り返すことになる。丁度、巨大迷路をさまようようなものである。リスト 2 参照。

#### (6) Newton の幻影解（[6] 参照）

ある 3 次関数の 1 パラメータ族の Newton 法

を考える。ある特異点がどの根にも近づかないようなパラメータの集合を描かせると、再び Mandelbrot 集合が現われる。このとき、特異点は「第 4 の根」に近づくとみなすことができる。この第 4 の根を Newton の幻影解と呼ぶ。Newton の幻影解の正体は何か？これはかなり難しい問題である。

パソコン実習は(1), (3), (5)にあるが、この通りに行なったのは電子 2 年と写真 1 年のクラスで、建築 1 年の授業では(5)のみを自由参加で行なった。733 号室の収容能力の為だが、3～4 割の学生が参加した。

```

10 'newton 3
20 CONSOLE , , 0, 1
30 SCREEN 3, 0:CLS 3
40 EP=.0001#
45 INPUT "クカン ノ ヒタ`リハシ=", XL#: INPUT "ハハ`=", LL#
50 FOR I=0 TO 400
60 N=0
70 A#=XL#+LL#*I/400
80 X#=A#
90 IF ABS(X#-1#)<EP THEN LINE(I+200,200)-(I+200,250),2:GOTO 180
100 IF ABS(X#)<EP THEN LINE(I+200,200)-(I+200,250),5:GOTO 180
110 IF ABS(X#+1#)<EP THEN LINE(I+200,200)-(I+200,250),6:GOTO 180
120 IF N=20 THEN 180
130 Y#=(2*X#*X#*X#)/(3*X#*X#-1)
140 PRINT"x=";X#
150 X#=Y#
160 N=N+1
170 GOTO 90
180 NEXT I
190 LOCATE 23,11:PRINT XL#:LOCATE 72,11:PRINT XL#+LL#

```

リスト 1 Newton 法

```

10 'Siegel disk of  $z^2+c$ 
20 INPUT"Re c =",CX: INPUT"Im c =",CY
30 RX=639:RY=199
40 XS=-2:XE=2:YS=-2:YE=2
50 XD=RX/(XE-XS):YD=RY/(YE-YS):CONSOLE 0,25,0,1:CLS 3
60 ZX=0:ZY=0
70 N=0
80 ZZX=ZX*ZX-ZY*ZY+CX
90 ZZY=2*ZX*ZY+CY
100 PSET(INT((ZZX-XS)*XD),INT((YE-ZZY)*YD)),(N MOD 7)+1
110 ZX=ZZX:ZY=ZZY
120 N=N+1
130 GOTO 80
140 END

```

リスト 2 Siegel disk

#### 4. 学生の声

前期末に、電子2年と建築1年の学生に講義の感想を提出させた。我々は学生の声にもっと耳を傾けるべきであり、実際にそれらの中には重要な指摘も多いので、ここに紹介する。

##### (1) 電子2年

●数学は、ただ四則演算や微分積分をして答を求めるだけではないことを知ったような気がする。この講義を聴いて数学に対する考えが変わった。授業の内容は難しいと思ったが、授業の中にパソコン実習や 831 教室での先生の作ったマンデルブロ集合など、目で見える授業があったことがよかったと思う。又、先生のマンデルブロ集合の絵が印象に残ったので、私も家で東芝のラップトップパソコンを親から借りてマンデルブロ集合を書いてみたりしました。でもあれは色がないので、色の出るパソコンがほしいと思った。

●講義は楽しかったのだが、いざあとになってみると、どんなことを勉強したのかよくわからず、テスト対策の取り組みにくい講義のような気がする。といっても講義はテストのためにやっているのでもなく、テストでいい点がとれればいいというわけでもないと思われるかもしれないけれど、今の現状では、どうしてもその人がまじめに講義をうけているかどうかはテストの点で決められている気がする。なるべくならテストなんかしてほしくない。

●前期の授業において、自分の全然知らなかった世界をのぞいたような気がした。マンデルブロ集合とか Newton 法とかジュリア集合とか、今まで耳にしたことのない言葉ばかりだった。実際、授業をうけても1年の時の微積とは全然違っているし、どうしてこうなるのかわからない所もかなりあった。自分の発想のなさとか頭がかたいこととかを自覚した感じがする。でもパソコンを使っての授業は良かった。プログラムを打ちこんで RUN させたときにきれいな絵が出てくると満足できた。プログラムの内容は、何もパソコンのこ

とが分からない私にとっては難しかったが……。

●普通の数学に関しての授業というのは、何となく堅苦しくてあまり授業を受ける気がなくなってしまう。これは授業の形態が小中高校とほとんど同じように、黒板に書いてある字をひたすら書き写すような作業ばかりだからである。しかし、この微分積分IIの授業では、コンピュータを導入して、なかなか難しい問題のプログラムを作成し、解かせたりした。今までにない方法であり、つまらない授業が、楽しいというか、何といったらいいかわからないが、とにかく授業を受ける気になった。

##### (2) 建築1年

●この微分積分Iの講義に出て、“大学らしい講義”だと思った。やりたい人だけやるといった感じがそういうふうに思えた。大学でやる数学というのは、はっきり答が出るのではなく、すごく抽象的だと聞いたことがあったので、ある程度そういうものだと思っていたが、この講義はそれほど抽象的ではなく、意外と計算ばかりだったので、安心した面とがっかりした所があった。でも先生の講義というのはスライドを多く使ってやるので、〈目で見て〉理解するのですごくいいと思う。でも一番印象に残っているのは、コンピュータで「誘惑的周期点と Siegel disk」を見たことで、ものすごく面白かった。プログラムをインプットして絵が出てきたときは“オー”という感じだった。これからも、もっといろんなビデオを見せたり、特にコンピュータをいじくる機会を増やしてほしい。

●高校時代の微分積分の授業は、ただテストのために公式を覚えさせられ、毎回毎回、計算問題をしかたなくやり、1つも面白くありませんでした。又、この大学での授業もそのようなものばかりです。ただ単位をとるために授業に出ているものが多いです。しかし、この授業は違っていました。自分が少しは数学が好きなのもあるかもしれませんが、計算の量も少なく、違った面から数学とい

うものを見ることができました。又、数学の時間にコンピュータを使えるとは思っていませんでした。実をいうと、使用したのは初めてでした。何か、うれしくなったりしました。高校時代に、このような、テストから離れた授業をしてもらえば、まだまだ数学が好きになっていたかもしれません。(線形数学もこのようにやってくれたらなあ)

●前期の講義は主に微分についてである。しかしながら、高校や受験でやってきた内容とはいくらか感触の違ったものであった。大学の授業がそれまでのものとは違うといえばそれは当然で、より進んだ内容が出てくるのは当たり前である。しかし、大学における数学と高校までのそれとの違いは、その教科書にあるのではなく、各教員の個性によるところが大きいのだ。この講義の特徴は、何といってもパソコンとそれに連動したモニターを用いて、教科書をさらに発展させた新しい分野との関連づけを紹介していることであろう。その新しい分野というのはフラクタル幾何学のことである。

以前、Newton という科学雑誌にこのフラクタ

ル幾何学についての記事が掲載されていたのを私は憶えている。まさか大学1年の一般教養でこのような話が聞けるとは思ってもみなかった。はっきり言うと、この数学的意味については、ほとんど理解できないでいる。それでも、簡単な数式から表わされるその図形のどこを拡大しても同じ図形が現われるという事柄は十分に興味をひき、またコンピュータ画像の色彩と模様の美しさは感動モノであった。パソコンやテレビモニターを使ったゲームの類に全く縁のなかった私にとっては、なおさらであったかもしれない。

#### 参考文献

- [1] 山口昌哉「カオスとフラクタル」講談社
- [2] 宇敷重広「フラクタルの世界」日本評論社
- [3] 宇敷重広「フラクタルの美」スプリングー
- [4] 洲上季代絵「フラクタル CG コレクション」サイエンス社
- [5] 中根静男「数学教育とフラクタル」数学若手の会会報 42 号
- [6] 「Newton」1986 年 10 月号
- [7] 現代化学 1988 年 1 月号
- [8] R. Devaney, L. Goldberg and J. Hubbard, A dynamical approximation to the exponential map by polynomials, preprint.