

2 次の Blaschke 関数の力学系について

中 根 静 男

On the dynamics of Blaschke's functions of degree two

Shizuo NAKANE

Abstract: The dynamics of a family of Blaschke's functions of degree two is considered. The structure of the Julia sets of these functions having doubly superattractive cycles is explained by virtue of the technics of quasiconformal surgery. The structure of the bifurcation diagram of this family in the parameter space is also considered.

§1 序

この小論では、 $f_c(z) = z \frac{z+c}{1+\bar{c}z}$ という形の 2 次の Blaschke 関数族の力学系について考察する。この関数族は、単位円周 $|z|=1$ をその中に写すという特徴を持っている。

この関数族の力学系に関しては、字數 [1] による詳細な研究がある。この小論も、字數の結果に示唆される所が大きい。

ここで述べる結果は 2 つある。ひとつは、上記の Blaschke 関数族の中で、周期 2 の doubly superattractive cycle をもつものから、surgery の手法により、周期の大きい doubly superattractive cycle をもつ関数を構成し、その Julia 集合の構造を調べることである。もうひとつは、上記の関数族のパラメータ空間における分岐図の構造を調べることである。

尚、この小論を書くに当たり、東洋大学工学部の藤本佳久氏には色々御教示頂いた。ここで感謝したい。

§2 準備

$\bar{C} = C \cup \{\infty\}$ を Riemann 球面、 $D = \{z \in D :$

$|z| < 1\}$ $\partial D = \{z \in D : |z| = 1\}$ とする。

有理関数 f に対し、その n 回合成関数を f^n とかく。つまり、 $f^n(z) = \underbrace{(f \circ f \circ \cdots \circ f)}_{n \text{ 回}}(z)$ である。

$z_0 \in \bar{C}$ に対し、 z_0 を初項とし、漸化式 $z_{n+1} = f(z_n)$ で定義される数列 $\{z_n\}$ を z_0 の f による軌道という。 $z_n = f^n(z_0)$ であることは容易にわかる。関数 f が与えられたときに、各点 z_0 の軌道の様子を調べるのが複素力学系の理論の主な目標である。その際に重要となる周期点について、次に定義する。

ある n があって $f^n(z_0) = z_0$ を満たす点 z_0 を f の周期点という。周期点 z_0 に対し、 $f^n(z_0) = z_0$ を満たす最小の n を z_0 の周期といい、 z_0 を f の n 周期点ともいう。特に $n=1$ のとき、 z_0 を不動点という。 n 周期点 z_0 に対し数列 $\{z_0, f(z_0), \dots, f^{n-1}(z_0)\}$ を n サイクルという。 n 周期点 z_0 の固有値 $\rho = \rho(z_0)$ を $\rho = (f^n)'(z_0)$ とおく。これは z_0 を含むサイクルに固有のものであるので、サイクルの固有値といってもよい。 $|\rho| < 1$, $|\rho| = 1$, $|\rho| > 1$ のとき、そのサイクル (又は n 周期点) は、各々 attractive, neutral, repulsive という。attractive なサイクルは、その近くの点を引き付けるという

意味で、「引力」を持ち, repulsive なサイクルは近くの点を遠ざけるという意味で「斥力」を持つといえる. attractive な n 周期点 z_0 の引力圏に当たるものを attractive basin といい, $A(z_0)$ と書く. つまり,

$$A(z_0) = \{z \in \bar{C} : \lim_{k \rightarrow \infty} f^{nk}(z) = z_0\}$$

となる.

関数 f に対し, $f'(z)=0$ を満たす点 z を f の特異点という. n サイクル $\{z_0, f(z_0), \dots, f^{n-1}(z_0)\}$ の固有値 ρ は, 合成関数の微分則より, $\rho = \prod_{k=0}^{n-1} f'(f^k(z_0))$ となるので, $\rho=0$ ならば n サイクルは f の特異点を含む. 固有値が 0 となるような n サイクルを superattractive という. 特に, 特異点を 2 個含む n サイクルを doubly superattractive という.

有理関数 f に対し

$F_f = \{z \in \bar{C} : z \text{ の近くで関数族 } \{f^n\}_{n \leq 1} \text{ が正規族になる}\}$

を f の Fatou 集合といい, $J_f = \bar{C} - F_f$ を f の Julia 集合という. Julia 集合には, f の repulsive な周期点の全体の閉包という特徴付けもある.

例 $f(z) = z^2$ とする. $f^n(z) = z^{2^n}$. 0 と ∞ は f の superattractive な不動点. $A(0) = \{z \in \bar{C} : |z| < 1\}$, $A(\infty) = \{z \in \bar{C} : |z| > 1\}$ そして, $J_f = \{z \in \bar{C} : |z| = 1\}$ となる.

§ 3. 2 次の Blaschke 関数とその力学系

以下, 考える関数は, $f_c(z) = z \frac{z+c}{1+\bar{c}z}$ ($c \in C$) という形の 2 次の Blaschke 関数族とする. この関数族は“mirror” symmetric, つまり単位円周 $|z|=1$ に関する反転に関して不変という著しい性質をもつ. $\phi(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ とおくと, この性質は, $f_c(z) = \phi \circ f_{\bar{c}} \circ \phi(z)$ という形で表現される.

f_c の不動点は $f_c(z) = z$ を解くと, $z=0, \frac{1-c}{1-\bar{c}}$ として ∞ となる. それらの固有値は $c, \frac{c+\bar{c}-2}{c\bar{c}-1}$, \bar{c} となる. 故に $|c| < 1$ のときは 0 と ∞ が attractive になる. このとき, $J_{f_c} = \{z \in \bar{C} : |z| = 1\}$ となることは容易にわかる. また, 宇数によると, $|c+1| > 2$ ならば $\frac{c+\bar{c}-2}{c\bar{c}-1}$ が attractive になり, J_{f_c} は Cantor 集合になる.

そこで, 以下では, $|c| \geq 1$ かつ $|c+1| \leq 2$ で考える.

Lemma 1. f_c の attractive な k サイクルは単位円周に含まれる.

証明 $f'_c(z) = \frac{\bar{c}z^2 + 2z + c}{(1 + \bar{c}z)^2}$ より, f_c の特異点は $c_{\pm} = \frac{-1 \pm \sqrt{|c|^2 - 1}i}{\bar{c}}$ ($|c| \geq 1$ に注意する). よって

$|c_{\pm}| = 1$ となる. attractive なサイクルは少なくとも 1 つ特異点を引きつけるが, f_c は mirror symmetric 故, 単位円周 $|z|=1$ を不変に保つので, 特異点 c_{\pm} の軌道は $|z|=1$ 上にある. 故に attractive な k サイクルも $|z|=1$ になくなくてはならない.

Proposition 2. f_c の attractive な k サイクルの固有値は実数.

証明 $\{z_0, z_1, \dots, z_{k-1}\}$ を attractive な k サイクルとする. Lemma 1 より $|z_j| = 1$. そこで $z_j = e^{i\theta_j}$ とおく.

$$\begin{aligned} \rho &= \prod_{j=1}^{k-1} f'_c(z_j) = \prod_{j=0}^{k-1} \frac{\bar{c}e^{2i\theta_j} + c}{(1 + \bar{c}e^{i\theta_j})^2} \\ &= \prod_{j=0}^{k-1} \frac{e^{i\theta_j}(\bar{c}e^{i\theta_j} + 2 + ce^{-i\theta_j})(1 + ce^{-i\theta_j})}{(1 + \bar{c}e^{i\theta_j})[1 + \bar{c}e^{i\theta_j}]^2} \\ &= \prod_{j=0}^{k-1} \frac{c + e^{i\theta_j}}{1 + \bar{c}e^{i\theta_j}} \frac{2\{1 + \operatorname{Re}(ce^{-i\theta_j})\}}{|1 + \bar{c}e^{i\theta_j}|^2}. \end{aligned}$$

今, $f_c(z_j) = z_{j+1}$ より, $\frac{e^{i\theta_j} + c}{1 + \bar{c}e^{i\theta_j}} = e^{i(\theta_{j+1} - \theta_j)}$. 故に

$$\begin{aligned} \rho &= \prod_{j=0}^{k-1} e^{i(\theta_{j+1} - \theta_j)} \cdot \frac{2\{1 + \operatorname{Re}(ce^{-i\theta_j})\}}{|1 + \bar{c}e^{i\theta_j}|^2} \\ &= \prod_{j=0}^{k-1} \frac{2\{1 + \operatorname{Re}(ce^{-i\theta_j})\}}{|1 + \bar{c}e^{i\theta_j}|^2} \end{aligned}$$

これは明らかに実数である. ここで $\theta_k = \theta_0$ に注意する.

Remark 3. attractive でないサイクルについてはよくわからない. 単位円周上にあるものについては勿論正しい.

Remark 4. Prop. 2 より, $-1 < \varepsilon < 1$ なる ε に対し, パラメータ空間内の locus $A_{\varepsilon}^k = \{c \in C : f_c \text{ のある } k \text{ サイクルの固有値} = \varepsilon\}$ は, generic には実 1 次元曲線になる. これは Mandelbrot 集合等における場合とは著しく異なる状況だが, それは f_c がパラメータ c に関し正則でないことに起因すると思われる.

さて, 関数族 f_c のパラメータ空間の分岐図に

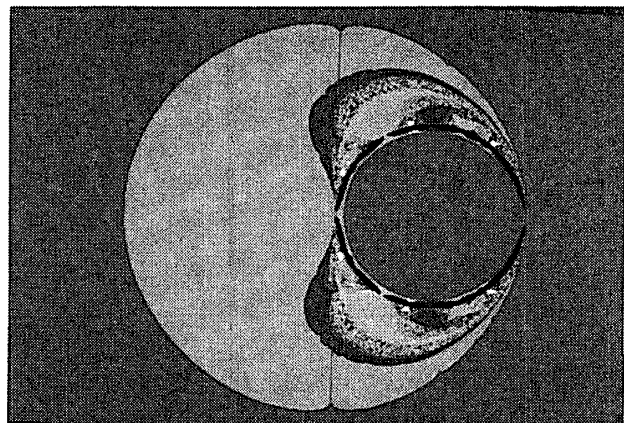


写真 1

について考察する. 写真 1 がそれをコンピュータに描かせたものであり, 写真 2 は, その 1 部の拡大図である. これらの図は, c 空間の各点 c において, f_c の特異点 c_{\pm} の軌道を計算し, それが近づいてゆくサイクルの周期に応じて, 点 c に色を付けたものである. 一番外の大きな円が $|c+1|=2$ であり, 中にある青い円が $|c|=1$ である. 参考までに書くと, 青, 赤, 紫, 緑, 水, 黄, 白の順に周期 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 となっている.

これらの図を見ると, 各周期に対するパラメータ空間の領域が次第に細くなって単位円周 $|c|=1$ に近づいているように見えるが, $|c|=1$ のどこに近づいているのだろうか. この問題を考えてみる. そのためには f_c が superattractive なサイクルをもつような c の locus を調べればよいと思われる. その locus は, $f_c^k(c_{\pm})=c_{\pm}$ で表わされる. $c=re^{ia}$ と極座標で表わし, $r \downarrow 1$ のときの locus の漸近的な振舞を調べる.

$r=1+\varepsilon$ とおくと

$$c_{\pm} = \frac{-1 \pm \sqrt{(1+\varepsilon)^2 - 1}i}{(1+\varepsilon)e^{-ia}}$$

$$= (-1 \pm \sqrt{2\varepsilon}i + O(\varepsilon))e^{ia},$$

$$\begin{aligned} f_c(z) &= z \frac{z + re^{ia}}{1 + re^{-ia}z} = e^{ia}z \frac{1 + \frac{\varepsilon e^{ia}}{z + e^{ia}}}{1 + \frac{\varepsilon z}{z + e^{ia}}} \\ &= e^{ia}z \left(1 - \varepsilon \frac{z - e^{ia}}{z + e^{ia}} + O(\varepsilon^2) \right). \end{aligned}$$

従って

$$f_c(c_{\pm}) = e^{2ia}(-1 \pm \sqrt{2\varepsilon}i + O(\varepsilon))$$

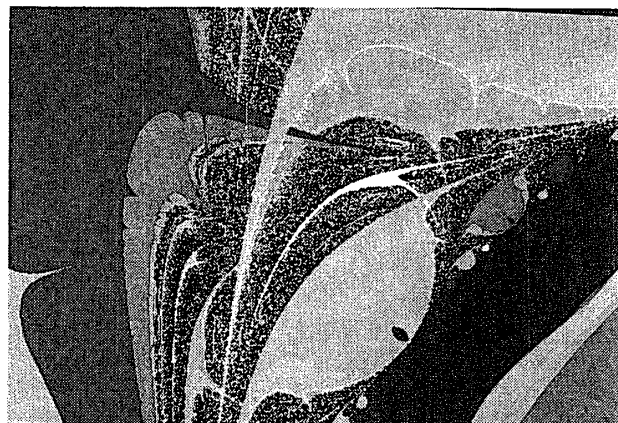


写真 2

$$\times \left(1 - \varepsilon \frac{-2 \pm \sqrt{2\varepsilon}i}{\pm \sqrt{2\varepsilon}i} + O(\varepsilon^2) \right)$$

$$= -e^{2ia}\{(1 \mp \sqrt{2\varepsilon}i)^2 + O(\varepsilon)\}$$

$$= e^{2ia}(-1 \pm 2\sqrt{2\varepsilon}i + O(\varepsilon)).$$

これをくり返すと,

$$f_c^k(c_{\pm}) = e^{(k+1)ia}(-1 \pm 2\sqrt{2\varepsilon}i + O(\varepsilon))$$

故に, $f_c(c_{\pm})=c_{\pm}$ は次に帰着される.

$$e^{(k+1)ia}(-1 \pm 2\sqrt{2\varepsilon}i + O(\varepsilon))$$

$$= e^{ia}(-1 \pm \sqrt{2\varepsilon}i + O(\varepsilon)).$$

これより

$$\begin{aligned} e^{ika} &= \frac{-1 \pm \sqrt{2\varepsilon}i + O(\varepsilon)}{-1 \pm 2\sqrt{2\varepsilon}i + O(\varepsilon)} \\ &= \frac{1 \mp \sqrt{2\varepsilon}i + O(\varepsilon)}{1 \mp 2\sqrt{2\varepsilon}i + O(\varepsilon)} \\ &= (1 \mp \sqrt{2\varepsilon}i)(1 \pm 2\sqrt{2\varepsilon}i) + O(\varepsilon) \\ &= 1 \pm \sqrt{2\varepsilon}i + O(\varepsilon). \end{aligned}$$

故に,

$$\begin{aligned} ika &= \log(1 \pm \sqrt{2\varepsilon}i + O(\varepsilon)) \\ &= 2\pi j \pm \sqrt{2\varepsilon}i + O(\varepsilon) \quad (j \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

よって,

$$\alpha = \frac{2\pi j}{k} \pm \frac{1}{k}\sqrt{2\varepsilon} + O(\varepsilon).$$

以上まとめると,

Proposition 5. f_c が superattractive な k サイクルをもつような c の locus: $f_c^k(c_{\pm})=c_{\pm}$ で, $c=re^{ia}$ において $r \rightarrow 1$ としたとき

$$\alpha = \frac{2\pi j}{k} \pm \frac{1}{k}\sqrt{2(r-1)} + O(r-1) \quad (j \in \mathbb{Z})$$

となるものがある.

Remark 6. 上の locus は $c=e^{2\pi ji/k}$ で単位円

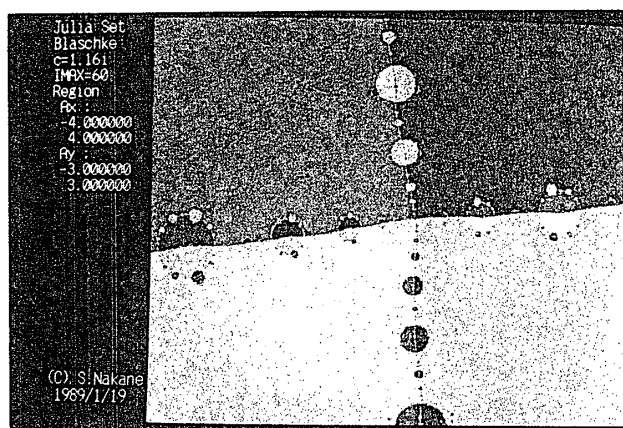


写真 3

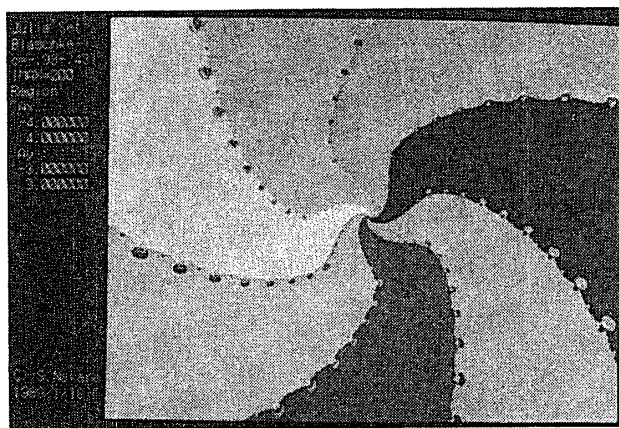


写真 4

周 $|c|=1$ に接する。字敷 [1] には $k=2$ のときの locus を具体的に計算して図示してある。 $k \geq 3$ のときも同様の図が描けると思われる。

Remark 7. 写真 1 及び 2 を見ると, super attractive な k サイクルに対応する locus が必ずしも $c=e^{2\pi i j/k}$ ($j \in \mathbf{Z}$) に近づかないことがわかる。これらの locus についても調べる必要があると思われる。

§ 4. ある Julia 集合の構造

ここでは字敷 [1] にならって, doubly super-attractive な 2 サイクルをもつ Blaschke 関数から, surgery の手法により, doubly super-attractive な k サイクル ($k \geq 4$) をもつ Blaschke 関数を構成する。参考までに $k=4$ 及び 7 のときの Julia 集合の例を写真 3 及び 4 に示す。これらもコンピュータで描いたものである。

まず, doubly superattractive な 2 サイクルを

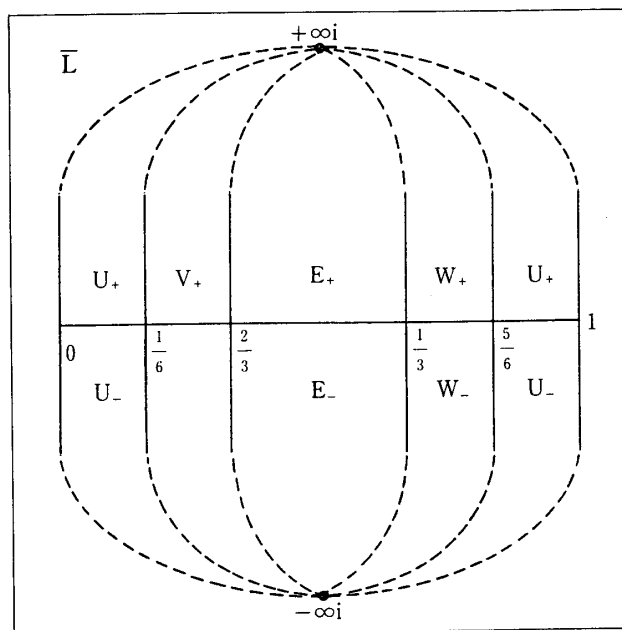


図 1

持つ f_{-2} から出発する。その 2 サイクルは $b_{\pm} = c_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ である。 $h(z) = \frac{z-b_+}{1-\bar{z}/b_-}$ とおくと $g(\zeta) = h \circ f_{-2} \circ h^{-1}(\zeta) = \frac{1}{\zeta^2}$ となる。 h は f_{-2} の 2 サイクル $\{b_{\pm}\}$ を $\{0, \infty\}$ に写し, f_{-2} の Julia 集合 $R \cup \{\infty\}$ を単位円周 $\{|\zeta|=1\}$ に写す。

$L = C/Z$ とし, $G: L \rightarrow \bar{C}$ を $G(\zeta) = h^{-1}(e^{2\pi i \zeta})$ と定義する。 $\tilde{f}: L \rightarrow L$, $\tilde{f}(\zeta) = -2\zeta$ とおくと, $f_{-2} \circ G = G \circ \tilde{f}$ が成り立つ。 \tilde{f} の不動点は $\zeta = \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0$ で, これらは f_{-2} の不動点 $0, \infty, 1$ に各々対応する。 \tilde{f} の Julia 集合は $\{\zeta \in L; I_m \zeta = 0\}$ である。 $\{\zeta \in L; \operatorname{Re} \zeta = 0 \text{ 又は } \frac{1}{2}\}$ は \tilde{f} で不変で, それは G により単位円周に写される。 f_{-2} の mirror symmetry は L 上 $\zeta \rightarrow -\bar{\zeta}$ に関する mirror symmetry に遺伝する。 $\bar{L} = L \cup \{\pm \infty i\}$ とおき,

$$E_{\nu} = \{\zeta \in L; \frac{1}{3} \leq \operatorname{Re} \zeta \leq \frac{2}{3}, \nu I_m \zeta \geq 0\} \cup \{\nu \infty i\}$$

$$U_{\nu} = \{\zeta \in L; -\frac{1}{6} \leq \operatorname{Re} \zeta \leq \frac{1}{6}, \nu I_m \zeta \geq 0\} \cup \{\nu \infty i\}$$

$$V_{\nu} = \{\zeta \in L; \frac{1}{6} \leq \operatorname{Re} \zeta \leq \frac{1}{3}, \nu I_m \zeta \geq 0\} \cup \{\nu \infty i\} \quad (\nu = \pm 1)$$

$$W_{\nu} = \{\zeta \in L; \frac{2}{3} \leq \operatorname{Re} \zeta \leq \frac{5}{6}, \nu I_m \zeta \geq 0\} \cup \{\nu \infty i\}$$

$$E = E_+ \cup E_-, U = U_+ \cup U_-, V = V_+ \cup V_-, W = W_+ \cup W_- \text{ とおく。} \tilde{f}(E_{\nu}) = \tilde{f}(U_{\nu}) = U_{-\nu} \cup V_{-\nu} \cup$$

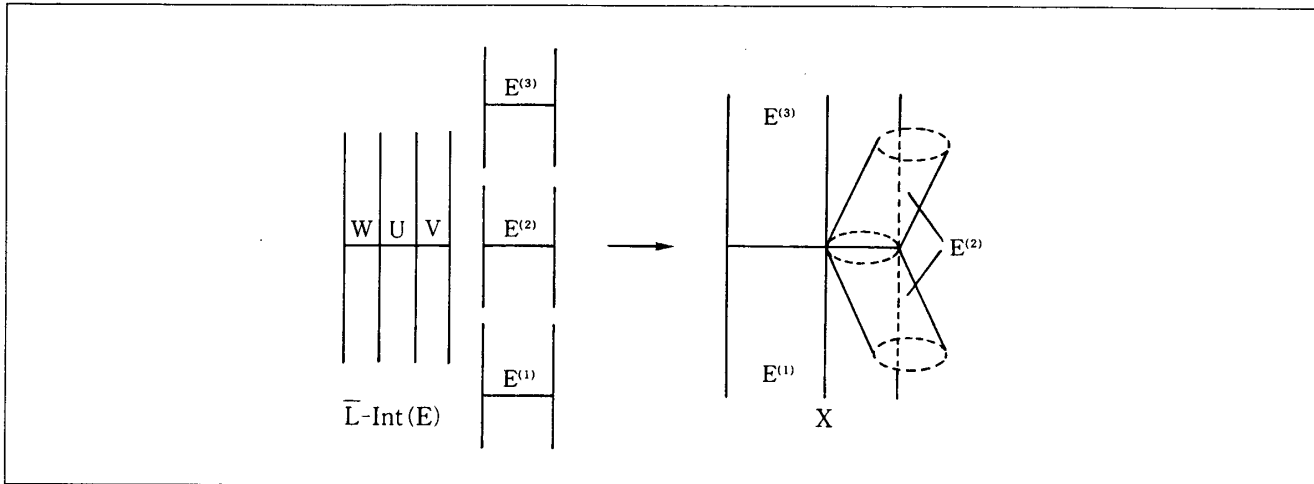


図 2

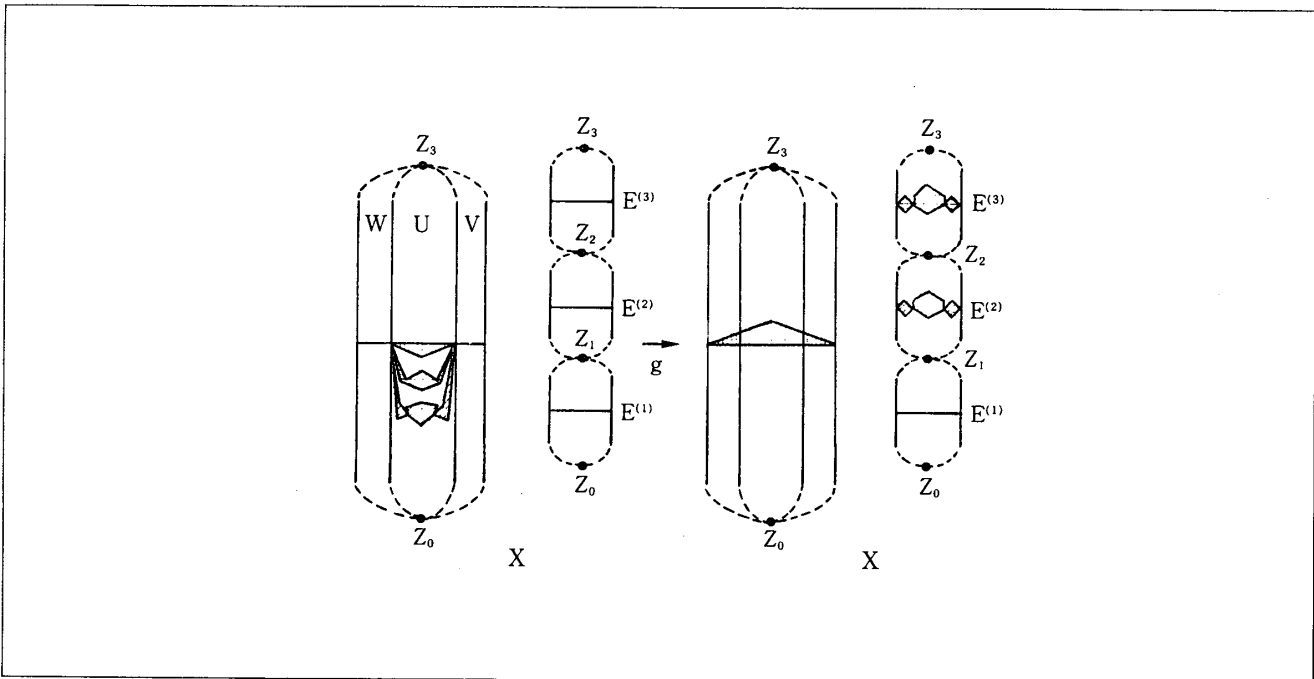


図 3

$W_-, \tilde{f}(V_-) = \tilde{f}(W_-) = E_-$ となる。図 1 参照。

まず Riemann 面 X を構成し、次に quasi-regular mapping $g: X \rightarrow X$ を構成する。それにより、とりあえず $k=4$ の場合、つまり doubly superattractive な 4 サイクルを持つような Blaschke 関数が quasiconformal surgery の理論によって構成される。更にその Julia 集合の構造も明らかになる。ここでは簡単のため $k=4$ の場合に限ったが、他の k の場合も同様に扱うことができる。

まず X をつくる。 E のコピーを 3 つ、 $E^{(1)}, E^{(2)}, E^{(3)}$ をつくり、図 2 のようにして \bar{L} から X を構

成する。

X は $(\bar{L} - \text{Int}(E)) \cup E^{(1)} \cup E^{(2)} \cup E^{(3)}$ の各成分を境界でうまくはり合わせたものである。

g は、 $g(W) = g(V) = E^{(1)}$, $g(E^{(1)}) = E^{(2)}$, $g(E^{(2)}) = E^{(3)}$, $g(E^{(3)}) = W \cup U \cup V$, $g(U_-) = W_+ \cup U_+ \cup V_+ \cup E^{(3)} \cup E^{(2)}$, $g(U_+) = W_- \cup U_- \cup V_-$ となるように構成する。 U_- 上の g の振舞が複雑だが重要だが、それは図 3 のようにとる。このとり方から、 g の次数は 2 で g が mirror symmetry をもつこともわかる。更に g が quasi-regular になることもわかるので、surgery の理論(宋倉[2]を見よ)により、quasiconformal mapping

ϕ があって, $F = \phi \circ g \circ \phi^{-1}$ が有理関数になる. mirror symmetry が保たれるために F が 2 次の Blaschke 関数であることがわかる. $x_i = \phi(z_i)$ ($i=0, 1, 2, 3$) とおくと, $\{x_0, x_1, x_2, x_3\}$ が F の 4 サイクルで, x_0 と x_3 が F の特異点になるので, これが doubly superattractive な 4 サイクルになる. これで F が求める関数であることがわかった.

さて, \tilde{f} の Julia 集合が $\{\zeta \in L : I_m \zeta = 0\}$ であったことと, Julia 集合は F^{-1} 不変であることから, F の Julia 集合の self similar lattice 構造が明らかになる.

\tilde{f} の不動点 $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$ に対応する F の不動点は $0, \infty$ なので, 線分 $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ は 0 と ∞ を結ぶ曲線に対応する. 図 3 からわかるように, F^{-1} を施すことにより, 新たな lattice の構造が入り, これがどんどんくり返されてゆくのである. これにより, F の Julia 集合に self similar lattice 構造が入ることがわかる. この様子は図 4 を参照するとよくわかる.

写真 3 を見ると, 実際に F の Julia 集合にこの self-similar lattice 構造が入っていることが確かめられる. 但し, 写真 3 で表わされた関数が上

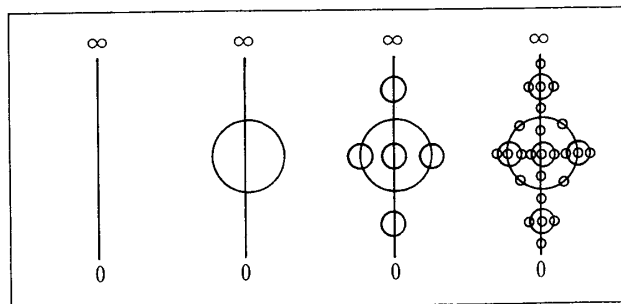


図 4

で構成した F と本当に一致しているかどうかは未だ確かめられてはいない. それを明らかにするためには, Blaschke 関数の doubly superattractive なサイクルの軌道と, それを実現する関数との対応関係を詳しく調べる必要がある.

文 献

- 1) S. Ushiki: A surgery on Blaschke's functions. Japan. J. Appl. Math.
- 2) M. Shishikura: On the quasiconformal surgery of rational functions. Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 4^e Sér., 20 (1987), 1-29.
- 3) P. Blanchard: Complex analytic dynamics on the Riemann sphere. Bull. Amer. Math. Soc., 11 (1984), 85-141.