ある非線形境界値問題と分岐理論

中　根　静　男*

A non-linear boundary value problem and bifurcation theory

Shizuo NAKANE

A non-linear Dirichlet boundary value problem $\Delta u+\lambda e^{u}=0$ in a simply connected domain in $\boldsymbol{R}^2$ is considered. Weston-Moseley's theory yields a method to construct solutions of the above problem from the roots of a certain equation associated with the domain. An application of Golubitsky-Schaeffer's bifurcation theory clarifies the bifurcation phenomena of those roots as the domain varies, which leads to the bifurcation of solutions of our problem.

§1. 序

Ω を xy 平面 $\boldsymbol{R}^2$ の有界な単連結（即ち，穴があいていない）領域として，非線形 Dirichlet 境界値問題

$$(1)\quad \begin{cases} \Delta u+\lambda e^{u}=0 & \text{in } \Omega \\ u=0 & \text{on } \partial\Omega\ (=\Omega \text{ の境界}) \end{cases}$$

を考える．ここで $\Delta=(\partial/\partial x)^2+(\partial/\partial y)^2$（ラプラシアン），$\lambda>0$ とする．

(1) は，ある領域内に2種類の気体が閉じ込められたときに起こる自動発火（self-ignition）の現象の定常問題のモデルを与えるが，その他にも色々応用が考えられ，以前から研究されてきた．

我々が考える問題は，(1) を λ を固有値とする固有値問題と思って，(1) の解（固有ベクトル）の λ-依存性を調べることにある．例えば Ω が単位円 $D=\{(x,y);\ x^2+y^2<1\}$ のときには (1) が具体的に解ける．このときは，$0<\lambda<2$ ならば (1) の解は丁度2個あり，$\lambda=2$ でこの2つの解が一致してしまい，$\lambda>2$ では解は存在しないことがわかっている．これを図示すると図1のようにな

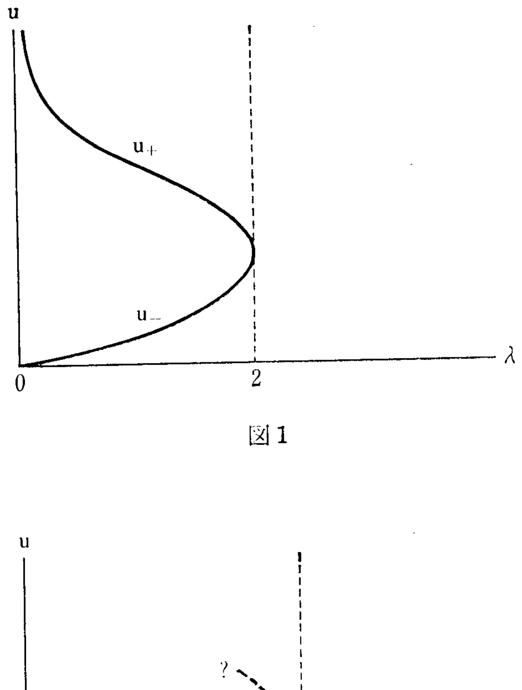

図1

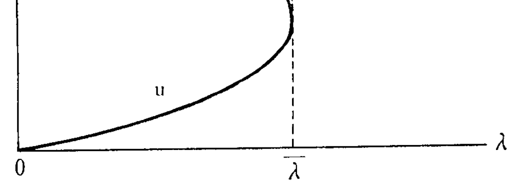

図2

* 講師
昭和 62 年9月 21 日受理

る．しかし，Ω が一般の領域のときには，あまりわかっていない．(0,0) から出発した，図1の u_- に相当する解（最小解という）が，$\lambda=\bar{\lambda}$（Ω に応じて定まる値）まで延びて，$\lambda=\bar{\lambda}$ で図2のように折り返すことは一般論から知られるが，その後の解の行方はほとんどわかっていない．

Weston [6], Moseley [3] は図1の u_+ に相当する解（大きい解）を λ が十分小さいときに構成する方法を与えた．それについて述べる．以下，$z=x+iy$ とおくことにより $\boldsymbol{R}^2$ を複素平面 $\boldsymbol{C}$ と思うことにする．Riemann の写像定理により，ζ 平面の単位円 $D=\{\zeta;|\zeta|<1\}$ を Ω の上に等角に写す写像 $z=f(\zeta)$ が存在する．この $f(\zeta)$ に対し，次の δ に関する方程式を考える．

$$(2)\quad \delta=\frac{1}{2}(1-|\delta|^2)\frac{f''(\delta)}{f'(\delta)}$$

（$\bar{\delta}$ は δ の複素共役）

大雑把な言い方をすれば，(2) の根が (1) の大きい解に対応している．実際，Weston, Moseley は後述の条件を満たす (2) の根から (1) の大きい解を構成する方法を与えている．

従って，(2) の根について調べることが大切になる．Weston, Moseley は (2) が1根しか持たない場合を扱っている．そこで，この小論では，(2) が複数個の根を持つような領域を考える．即ち，領域を変形させることにより (2) の根を分岐させ，それに対応する (1) の解を調べるのである．その際，Golubitsky-Schaeffer [1] の分岐理論は大変役に立つ．

尚，この問題に関しては，鈴木 [4] がよい survey になっている．

この問題を筆者に紹介して下さり，また種々の助言を下さった鈴木貴氏に感謝の意を表したい．

§2.　Gustafsson の例

次節で結果を天下り的に述べるが，最初に結果があったわけではない．すべては次に述べる例に関する考察が出発点になっているのである．従って，この例について説明することは次節の理解を助けるだろう．一見抽象的に見える数学もすべてはこのような具体的なものから出発しているのではあるまいか．

例　(Gustafsson [2])

$$f(\zeta)=\zeta\cdot\frac{1-R^2}{\zeta^2-R^2}=\frac{1-R^2}{2}\left(\frac{1}{\zeta-R}+\frac{1}{\zeta+R}\right)$$

$(R>1)$

この f に対し，(2) は実根しか持たないことはすぐわかる．$\zeta=x$ とおいて (2) を整理すると，

$$x\left(\frac{3R^2-R^4}{3R^2-1}-x^2\right)=0$$

となる．Golubitsky-Schaeffer の分岐理論によると，pitchfork bifurcation（熊手型分岐）の標準形は

$$x(\lambda-x^2)=0$$

であり，上の例は，まさにその標準形と言える．f に対応する Ω を図示すると次のようになる．

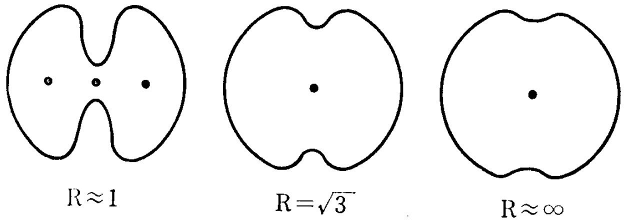

図3

（図中の点は (2) の根を表わしている．）

§3.　結　果

以下，x 軸及び y 軸に関して対称な領域の1-パラメータ族 $\{\Omega_R\}_{R>1}$ を考える．R を動かせば Ω_R が変形して行くのである．各 $R>1$ に対し，前述の Riemann 写像 $f=f_R(\zeta)$ が存在する．（実はこの f_R は Ω_R に対し唯1つとは限らないのだが，どれか1つをとればよい．とり方は本質的でない．）すると f_R は奇関数で実軸上実数値をとることがわかる．従って

$$f(\zeta)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_{2k+1}}{(2k+1)!}\zeta^{2k+1}$$

と Toylor 展開すると，$a_{2k+1}=a_{2k+1}(R)$ は実数値関数になる．$a_{2k+1}(R)$ は R について C^∞-級としておこう．$f''(\zeta)/f'(\zeta)$ も奇関数で実軸上実数値をとる D 上の正則関数なので，

$$\frac{f''(\delta)}{f'(\delta)}=u(x,y,R)+iv(x,y,R).$$

（但し，$\delta=x+iy$）

とおくと，$u(0,y,R)\equiv 0$, $v(x,0,R)\equiv 0$. 又，(2) は，

$$(3)\quad \begin{cases} p=2x\sum_{k=0}^{\infty}(x^2+y^2)^k-u(x,y,R)=0 \\ q=2y\sum_{k=0}^{\infty}(x^2+x^2)^k+v(x,y,R)=0 \end{cases}$$

と同値.

$f''(\zeta)/f'(\zeta)$ が奇関数なので (2) は $\delta=0$ を根にもつ. 以下，この根の分岐を考える. 従って $x=y=0$ の近くで考える. まず，Liapunov-Schmidt reduction を行なう. そのために $(x,y)=(0,0)$ における (3) のヤコビ行列 J を計算すると，

$$J=\begin{bmatrix} 2-u_x(0,R) & -u_y(0,R) \\ v_x(0,R) & 2+v_y(0,R) \end{bmatrix}$$

$u(0,y,R)\equiv 0$, $v(x,0,R)\equiv 0$ より $u_y(0,R)=v_x(0,R)\equiv 0$. また Cauchy-Riemann 関係式より $u_x(0,R)=v_y(0,R)$. そこで，$u_x(0,R_0)=\pm 2$ をみたす R_0 をとる. かかる R_0 が存在しなければ (2) の根は 0 のみである.

今 $u_x(0,R_0)=2$ とする. -2 のときも同様の議論ができる. このとき $\partial q/\partial y(0,R_0)=4\neq 0$ 故，陰関数定理から $q=0$ は y について解ける. しかし，$y=0$ ならば $q=0$ が従うので，結局 $q=0$ から $y=0$ が従う. これを (3) の第 1 式に代入すると，結局 (2) を実軸上で考えることになる. このとき (3) は

$$2xf'(x)-(1-x^2)f''(x)=0$$

に同値になる. この左辺を Taylor 展開すると

$$(2a_1-a_3)x+\left(2a_3-\frac{a_5}{6}\right)x^3+O(x^5)$$

となる. 我々は Golubitsky-Schaeffer の意味での“熊手型分岐”(pitchfork bifurcation) の場合を扱う. Golubitsky-Schaeffer [1, p. 92, Prop. 9.2] より，次を仮定すると pitchfork bifurcation が起こる.

$$(4)\quad c_1(R_0)=2a_1'(R_0)-a_3'(R_0)\neq 0$$

$$(5)\quad c_2(R_0)=2a_3(R_0)-\frac{1}{6}a_5(R_0)\neq 0.$$

ここで，$u_x(0,R_0)=2$ は $2a_1(R_0)-a_3(R_0)=0$ と同値であることに注意する. このとき根の R- 依存性は次の図 4 のようになる.

さて，これで (2) の根の分岐についてはわかった. これが (1) の解を与えるためには Weston-Moseley の 2 つの条件を満たさねばならない. ここではその 1 つについて論じる. それは δ を (2) の根とするとき，

$$(6)\quad |f'(\delta)|^2 -\frac{1}{4}|f'''(\delta)(1-|\delta|^2)^2-6\delta^2 f'(\delta)|^2\neq 0$$

である. 我々は実数の中で考えているので，(6) のかわりに

$$(7)\quad h(x,R)=f'(x) -\frac{1}{2}\{f'''(x)(1-x^2)^2-6x^2f'(x)\}\neq 0$$

でよいことは容易にわかる. (x は (3) の根.) 根 $x=0$ に対しては，

$$h(0,R)=f'(0) -\frac{1}{2}f'''(0)=a_1(R)-\frac{1}{2}a_3(R)$$

だが，$h(0,R_0)=0$ かつ

$$\frac{\partial h}{\partial R}(0,R_0)=a_1'(R_0)-\frac{1}{2}a_4'(R_0)\neq 0$$

((4) より!) 故 $h(0,R)\neq 0$ $(R\neq R_0)$. $x=0$ から分岐した根は，

$$(8)\quad 2a_1-a_3+\left(2a_3-\frac{a_5}{6}\right)x^2+O(x^4)=0$$

を満たす. これを $h(x,R)$ の Taylor 展開に代入すると，

$$h(x,R)=\left(3a_1+\frac{1}{2}a_3-\frac{1}{6}a_5\right)x^2+O(x^4).$$

故に

$$h(x,R_0)=\left(2a_3(R_0)-\frac{1}{6}a_5(R_0)\right)x^2+O(x^4).$$

(5) から，$0<|x|\ll 1$, $|R-R_0|\ll 1$ のとき $h(x,R)\neq 0$ が従う.

$C_1(R_0)C_2(R_0)<0$ のとき　　$C_1(R_0)C_2(R_0)>0$ のとき

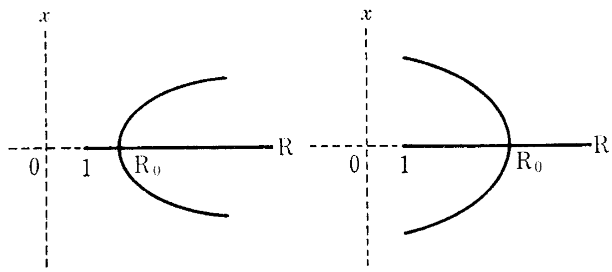

図 4

結局，分岐の直前と直後では条件を満たすことがわかった．もう 1 つの条件は，“pathological case” でないことを示すものであり，具体的に f の係数の言葉で書くこともできるが，繁雑になるので略す．この辺りをもう少し整理することは 1 つの課題である．この pathological case を除けば，(1) の真の解の分岐を示せたことになる．

定理． Ω_R, f_R は前出のものとする．(4), (5) を仮定すると，(2) の根 $\delta=0$ は $R=R_0$ で pitchfork bifurcation を起こす．pathological case を除けば，この分岐は (1) の真の解の分岐に対応する．

References

1) M. Golubitsky and D. Schaeffer: Singularities and groups in bifurcation theory, AMS 51, Springer 1985.
2) B. Gustafsson: On the motion of a vortex in two-dimensional flow of an ideal fluid in simply and multiply connected domains, preprint.
3) J. L. Moseley: Asymptotic solutions for a Dirichlet problem with an exponential nonlinearity, SIAM J. Math. Anal., 14 (1983), 719-735.
4) 鈴木貴：非線形固有値問題 $-\Delta u=\lambda e^u$ について．数学若手の会会報 41 (1987) 49-62.
5) T. Suzuki and K. Nagasaki: On the nonlinear eigenvalue problem $\Delta u+\lambda e^u=0$, preprint.
6) V. H. Weston: On the asymptotic solution of a partial differential equation with an exponential nonlinearity, SIAM J. Math. Anal., 9 (1978), 1030-1053.