

正方形角柱の風直角方向振動のモデル化

田村 幸雄*

A mathematical model for the transverse oscillations of square cylinder

Yukio TAMURA

A mathematical model for the transverse oscillation of square cylinder is proposed. The model is made by combining the nonlinear wake-oscillator for the vortex excitation with the quasi-steady perturbational force. The interaction between the galloping oscillation and the vortex-excited oscillation can be described by this model. The unsteady force acting on square cylinder can be also simulated by this model.

記号	U	: 換算流速 $=2\pi V/\omega_0 d$	
A_k	: 空気力係数 C_{FY} を多項式近似した場合の係数 ($k=1, 3, 5\cdots$)	V	: 流速
C_D	: 静止正方形角柱の抗力係数	V_c	: ギャロピングの限界流速 $=2\eta/nB_1$
C_{FY}	: 静止正方形角柱の y 方向の空気力係数	V_v	: 渦励振の共振流速 $=\omega_0 d/S^*$ ($\nu=1$ に相当)
C_{L0}	: 静止正方形角柱の揚力係数振幅	$W(z)$: 流速の軸方向分布形 ($W(Z_r)=1$)
d	: 正方形角柱断面の辺長	Z	: 無次元軸方向座標 $=z/L$
f	: マグナス効果に関連する定数	Z_r	: 基準位置の無次元軸方向座標
h	: 非線形振動子の幅	z	: 軸方向座標
h^*	: 非線形振動子の無次元幅 $=h/d$	Y	: 正方形角柱の無次元変位 $=y/d$
L	: 正方形角柱の長さ	Y_0	: 正方形角柱の無次元変位振幅
l	: 非線形振動子の長さの $1/2$	Y_r	: 基準位置における無次元変位
l^*	: 非線形振動子の無次元長さの $1/2=l/d$	y	: 正方形角柱の変位
l_t	: 非線形振動子の回転中心から質量中心までの長さ	α	: 非線形振動子の回転角変位
M	: 正方形角柱の質量	α_r	: 基準位置における振動子の回転角変位
m^*	: 正方形角柱の加速度と振動子の回転モーメントに関する定数	ζ	: 非線形振動子の減衰に関する定数
n	: 正方形角柱の質量比 $=\rho d^2 L/2M$	η_i	: 正方形角柱の i 次減衰定数 (2次元では η)
S	: ストローハル数	ν	: 無次元流速 $=V/V_v=SU$
S^*	$=2\pi S$	ν_r	: 基準位置における無次元流速
t	: 時刻変数	π	: 円周率
		ρ	: 流体密度
		τ_i	: 無次元時刻変数 $=\omega_i t$ (2次元では τ)
		$\psi_i(Z)$: 正方形角柱の i 次固有振動モード形

* 東京工芸大学工学部建築学科, 助教授, 工博
昭和 61 年 9 月 24 日受理

$$(\psi_i(Z_r)=1)$$

- ϕ : 正方形角柱の変位と空気力の位相差
 ω_i : 正方形角柱の i 次固有振動数
 ω_0 : 2次元正方形角柱の固有振動数

1. はじめに

Parkinson and Wawzonek [1] の正方形角柱の風洞実験によれば、ギャロピングの限界流速 V_c が渦励振の共振流速 V_r と同じ位の場合は、渦励振の共振流速 V_r 付近から振動が急激に立ち上がり、そのままギャロピングの upper branch につながっていく振動が発生する。ギャロピングの限界流速 V_c が渦励振の共振流速 V_r の 1.5 倍程度に離れていても、渦励振の共振流速 V_r 付近から立ち上がった振動が、そのままギャロピングの upper branch につながる振動に移行し、ギャロピングの準定常理論では起きるはずのない流速領域で、大きなギャロピングが観測される。ギャロピングの限界流速 V_c が渦励振の共振流速 V_r の 2 倍程度まで離れると、渦励振とギャロピングが明瞭に分離して現れ、準定常理論によるギャロピングの予測が可能となる。つまり、ギャロピングの限界流速 V_c と渦励振の共振流速 V_r が近い場合には、渦励振にギャロピングが引き込まれて、ギャロピングの単独の理論では予想できない大きな振動がギャロピングの限界流速 V_c 以下で発生し、準定常理論による予測を困難にしているのである。そして、通常の塔状構造物の場合、 $V_c=1.5 V_r$ 程度と考えられ [1]、ギャロピングの準定常理論による限界風速が設計風速を越えているのでギャロピングが発生しないと、設計者が重大なミスを犯すことも考えられる。本報告はこの点に着目して、 V_r-V_c 間での正方形角柱の風直角方向振動を簡単に予測する方法を模索するため、その数学的モデル化を試みたものである。

角柱の振動を非定常空気力の側面から考えるとき、その振動がギャロピングであるか渦励振であるかはもはや問題ではない。空気力は無次元振幅 Y_0 と換算流速 U の関数として既に分かっており、これを元にして、振動のリミットサイクルが

計算される。 Y_0-U 座標上のあらゆる点における非定常空気力が分かれば応答を追跡できるとする考えである。さて一方、角柱の振動を振動現象の側面からみると、低流速域でカルマン渦に起因する渦励振が、高流速域で負減衰効果によるギャロピングが生じるとの認識ができる。この扱え方は多分に便宜的であるが、この様に考えるとき正方形角柱の振動現象を冒頭に述べたように認識することは可能であろう。

本論文では、準定常的な空気力で記述できていないのは、渦放出にともなう非定常空気力であり、これを加えることによって近似的に角柱に作用する励振力が表されると仮定する。低流速では渦放出に伴う空気力が、高流速では準定常的な空気力が振動に対して支配的になっているのである。そして、この渦放出に伴う非定常な空気力は非線形振動子でモデル化する。我々が最も興味を持っているのは、この様なモデルをした場合、前述の複雑な性状が表現できるかどうか、特に渦励振のリミットサイクルにギャロピングのリミットサイクルが引き込まれる現象が表現できるかどうかである。

2. 正方形角柱の風直角方向振動のモデル化

田村 [2] は 2 次元円柱の渦励振に関して、後流に非線形振動子を想定し、そのモデル化を行っている。更に田村・天野 [3] はこれを 3 次元円柱に拡張し、その渦励振のモデル化を行っている。正方形角柱においても渦放出に伴う励振力を同様の非線形振動子で表現できるものとする。そこで、このモデルを正方形角柱に拡張することを考える。円柱の場合と異なるのは、静止角柱の C_{L0} , C_D , S 等の空力的定数の値のみならず、振動子の回転中心、振動子のディメンジョン h^* , l^* およびマグナス効果に関連する定数 f である。角柱の場合流れが前縁で剝離することから、Fig.1 に示すとおり回転中心を風上面の中心に設定した方がよい。このとき振動子の質量中心までの長さは $l_t=(1+l^*)d$ となる。これらのパラメータの間には次のような関係式が与えられている [2]。

$$\zeta=f/(2\sqrt{2}\pi^2l^*),$$

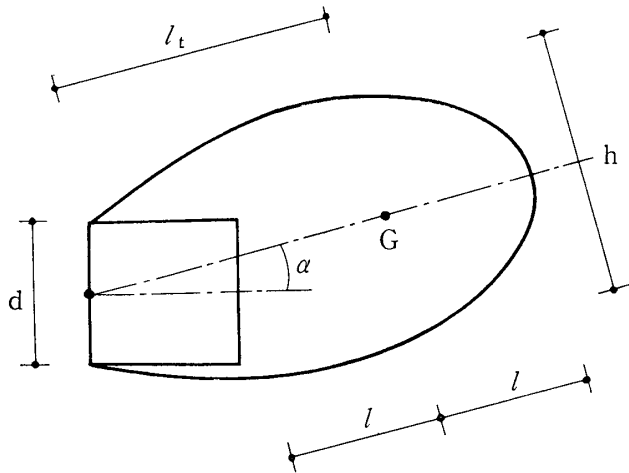


Fig.1 振動子

$$m^* = d/l_t = 1/(1+l^*), \quad (1)$$

$$S = (d/2)/\sqrt{(\pi l_t h)} \\ = (1/2)/\sqrt{\{\pi(1+l^*)h^*\}}$$

従って、空力的定数 C_{L0} , C_D , S が分かっている場合、モデル化に必要な他のパラメータは h^* と l^* の何れか一つと、定数 f である。

Parkinson and Brooks [4] は 2次元物体のギャロピングに関して、準定常理論によるモデル化を行った。更に、Novak [5] はこれを 3次元物体に拡張し、そのギャロピング振動をモデル化した。

このギャロピングの準定常理論と上記の渦放出に伴う非線形振動子モデルを合成した数学的モデルを考える。角柱は断面が軸方向に変化しない連続体、つまり 3次元角柱とする。Navak [5] や田村・天野 [3] に準じて、 i 次振動モードで風直角方向にのみ調和振動しているものとし、角柱の軸方向各点で気流の 2次元性が成り立っており、空気力に関する諸定数は軸方向に変化しないものとする。

角柱の無次元変位 Y は、下式で表す。

$$Y = Y_r \cdot \psi_i(Z) \quad (2a)$$

非線形振動子の回転角変位も同様に

$$\alpha = \alpha_r \cdot \psi_i(Z) \quad (2b)$$

と表せるものとする。無次元流速 ν は角柱の軸方向に変化するものとし、

$$\nu = \nu_r \cdot W(Z) \quad (2c)$$

とする。このとき、基準位置 Z_r での変位 Y_r が

次式で与えられる。

$$\ddot{Y}_r + [2\eta_i + \{e_1 n (f - A_1) \nu_r / S^*\} - (e_2 n A_3 S^* / \nu_r) \dot{Y}_r^2 \\ - (e_3 n A_5 S^{*3} / \nu_r^3) \dot{Y}_r^4 - \dots] \dot{Y}_r + Y_r \\ = - (e_4 f n \nu_r^2 / S^{*2}) \alpha_r \quad (3a)$$

$$\ddot{\alpha}_r - 2\zeta \nu_r \{e_1 - e_5 (4f^2 / C_{L0}^2) \alpha_r^2\} \dot{\alpha}_r + e_4 \nu_r^2 \alpha_r \\ = -m^* \ddot{Y}_r - e_1 \nu_r S^* \dot{Y}_r \quad (3b)$$

ただし、

$$e_1 = \int \{\psi_i(Z)^2 W(Z)\} dZ / \int \psi_i(Z)^2 dZ,$$

$$e_2 = \int \{\psi_i(Z)^4 / W(Z)\} dZ / \int \psi_i(Z)^2 dZ,$$

$$e_3 = \int \{\psi_i(Z)^6 / W(Z)^3\} dZ / \int \psi_i(Z)^2 dZ,$$

$$e_4 = \int \{\psi_i(Z)^2 W(Z)^2 dZ\} / \int \psi_i(Z)^2 dZ,$$

$$e_5 = \int \{\psi_i(Z)^4 W(Z) dZ\} / \int \psi_i(Z)^2 dZ, \quad (4)$$

であり、積分は角柱の軸方向全長に亘って行うものとする。ここで、微分 (\cdot) は無次元時刻変数 τ_i による。なお、抗力係数 C_D は係数 A_1 の中に含まれ陽には現れない。なお、2次元角柱の場合は $\psi_i(Z_r) = 1$, $W(Z_r) = 1$ であるから、係数 $e_1 \sim e_5$ は全て 1 となる。

3. 2次元正方形角柱の非定常空気力

3.1 本モデルによる非定常空気力の算出

2次元角柱を強制振動させて振動時に働く非定常空気力を吟味することは、Otsuki, Washizu, Tomizawa and Ohya [6], 伊藤・宮田・森光 [7], 山田・宮田 [8] 等で数多く行われている。これら強制振動法による非定常空気力と本モデルによる非定常空気力を比較するために、上記のモデルから空気力を算定する。

2次元角柱における揚力係数は $e_1 \sim e_5$ を 1 と置いて、(3a) 式より次のように表される。なお、考えている角柱は 2次元であるから、基準位置を示す添え字 r や振動モードを表す添え字 i は省く。

$$C_L = -\{(f - A_1) S^* \dot{Y} / \nu - A_3 (S^* \dot{Y} / \nu)^3 \\ - A_5 (S^* \dot{Y} / \nu)^5 - \dots + f \alpha\} \quad (5)$$

ここで、強制加振されている角柱の無次元変位 Y を次のように置く。

$$Y = Y_0 \cos \tau \quad (6)$$

これを(5)式に代入して、揚力係数 C_L を変位同相成分 C_{LR} および速度同相成分 C_{LI} に分解する。(5)式の右辺の α は(3b)式の右辺に(6)式を代入したときの定常解として得られる。ここでは簡単化のため、(5)式の準定常的な空気力係数は \dot{Y} の7次の項までとって解析する。細かい演算は省略するが、非定常空気力の近似的な定常解が次の通り得られる。

$$C_{LR} = -f\alpha_0 \cos \beta \quad (7a)$$

$$C_{LI} = (A_1 - f)S^*Y_0/\nu + (3A_3/4)(S^*Y_0/\nu)^3 + (5A_5/8)(S^*Y_0/\nu)^5 + (35A_7/64)(S^*Y_0/\nu)^7 - f\alpha_0 \sin \beta \quad (7b)$$

ただし、 α_0 は次の(8)式の根として表され、 β は(9)式で表される。

$$\{(\nu^2 - 1)^2 + 4\zeta^2\nu^2(1 - f^2\alpha_0^2/C_{L0}^2)\}\alpha_0^2 = Y_0^2(m^{*2} + \nu^2S^{*2}) \quad (8)$$

$$\beta = \tan^{-1}[\{2\zeta\nu m^*(1 - f^2\alpha_0^2/C_{L0}^2) - \nu S^*(\nu^2 - 1)\} / \{2\zeta\nu^2 S^*(1 - f^2\alpha_0^2/C_{L0}^2) + m^*(\nu^2 - 1)\}] \quad (9)$$

(8)式は α_0 の2乗に関して3次式であるから、簡単に根が得られ、 α_0^2 の正の実根を(9)式に代入すれば β が得られる。この α_0 および β を(7a)(7b)式に代入すれば非定常空気力 C_{LR} , C_{LI} が得られる。

これらが得られれば空気力係数の振幅 $|C_L|$ と、非定常空気力と角柱変位の位相差 ϕ は、次の(10)(11)式で表される。

$$|C_L| = \sqrt{(C_{LR}^2 + C_{LI}^2)} \quad (10)$$

$$\phi = \tan^{-1}(C_{LI}/C_{LR}) \quad (11)$$

なお、ここで断わっておかなければならないのは、静的空気力係数 C_{FR} は以上のように多項式近似をしているが、準定常理論そのものは多項式近似が必要条件ではなく、迎角に応じた静的空気力さえ与えてやれば良い。多項式近似した理由は近似的にはあるが解析的な定常解を吟味することができるということによる。

3.2 非定常空気力の実験値との比較

本モデルの非定常空気力を3.1の方法で計算するに当たって、必要なパラメータの値を決定しなければならない。以下一様流中での2次元角柱を考えることにする。

まず、振動子の無次元幅 h^* は溝田・岡島 [9] の流れのパターンから $h^*=1.8$ とする。ストローハル数 S は 0.12 とする。マグナス効果に関する定数 f の値は、正方形角柱に関して参照する資料が見あたらない。ここでは、仮に円柱での値 $f=1.16$ を基本として考える。以上が決まれば、(1)式の関係から振動子の減衰に関する定数 ζ 、および角柱の加速度と振動子の回転モーメントに関する定数 m^* の値が定まる。

次に必要なのは空気力に関する係数で、 C_{L0} および係数 $A_1 \sim A_5$ である。 C_{L0} に関しては実験者によってバラツキがあるが、ここでは $C_{L0}=0.7$ とした。多項式近似の係数もかなりバラツキがある。ここでは Wawzonek [10] の静的空気力係数 C_{FR} より算出し、 $A_1=4.0$, $A_3=260$, $A_5=-10^4$, $A_7=10^5$ とした。以上の数値についてはまだまだ検討の余地があるものと思われるが、これらの数値を(7a)(7b)(8)(9)(10)(11)式に代入して非定常空気力の定常解を求めた。

加振振幅 $Y_0=0.1$ の場合の非定常空気力の実験値の例を Fig. 2 (a) (b) (c) (d) に示す [7] [11] [12]. Fig. 2(a) の速度同相成分 C_{LI} の変化はかなり複雑で、実験者によってかなりバラツキがある。 C_{LI} が正の領域では振動の発現する可能性がある訳で、渦励振の共振流速 V_V 付近から正の領域が現れ顕著なピークを持ち、渦励振の発現を意味している。準定常理論による空気力は図に示したとおり、換算流速 $U \cong 12$ 付近以上では実験値と一致するが、これより小さい流速では全く合わない。 C_{LI} 換算流速の小さいところでは、 C_{LI} が正になるという実験値とそうでないものがあるが、Parkinson and Bouclin [13] の指摘する(1/3) V_V 付近での励振の可能性も示唆されていて興味深い。非定常空気力の振幅 $|C_L|$ は Fig. 2(c) にあるように、渦励振の共振流速付近でピークを持ち、比較的バラツキは少ない。Fig. 2(d) の位相差 ϕ は渦励振の共振流速 V_V 付近で急変し、換算流速 U が 10 付近以上ではほぼ 90° になる。

Fig. 3 (a) (b) (c) (d) は上記実験と同じ条件の場合の本モデルによる非定常空気力である。なお、図には定数 f の値をいくつか変えた結果も示

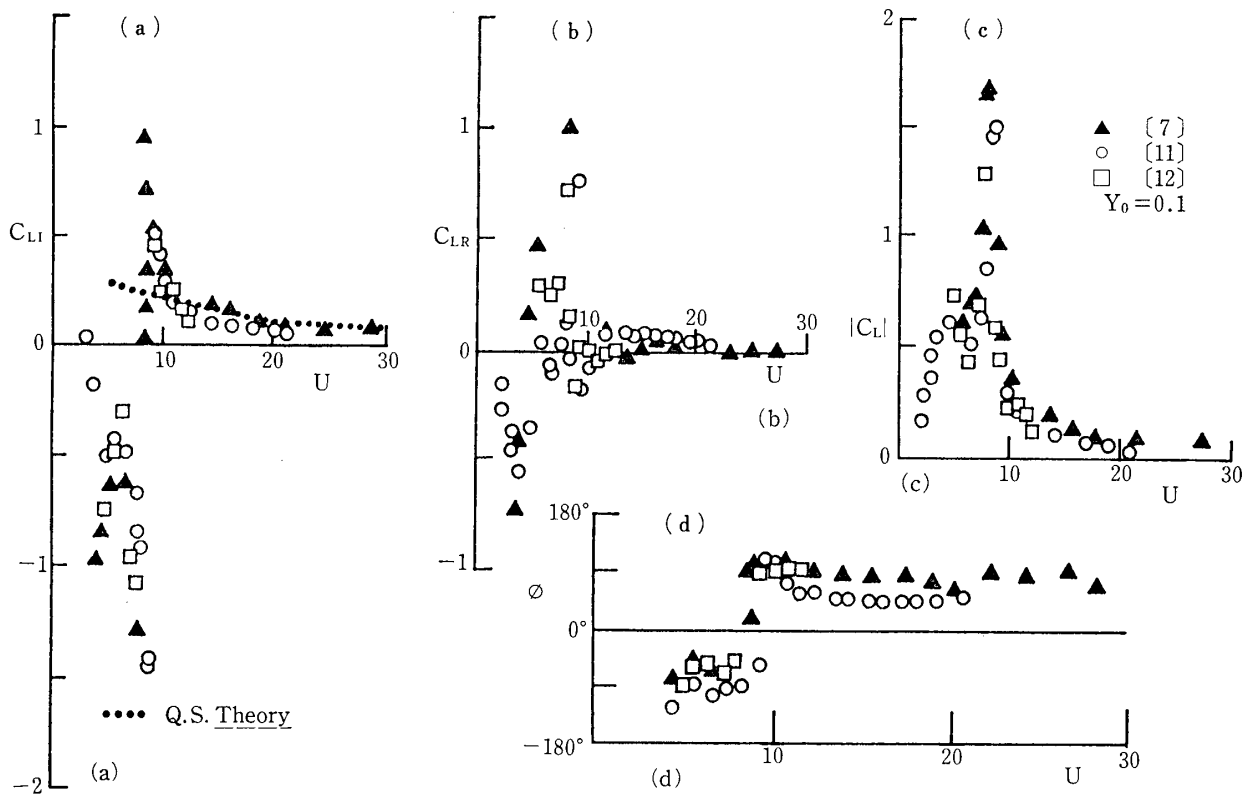


Fig. 2 2次元正方形角柱の非定常空気力の実験値 ($Y_0=0.1$, 一様流) [7] [11] [12]

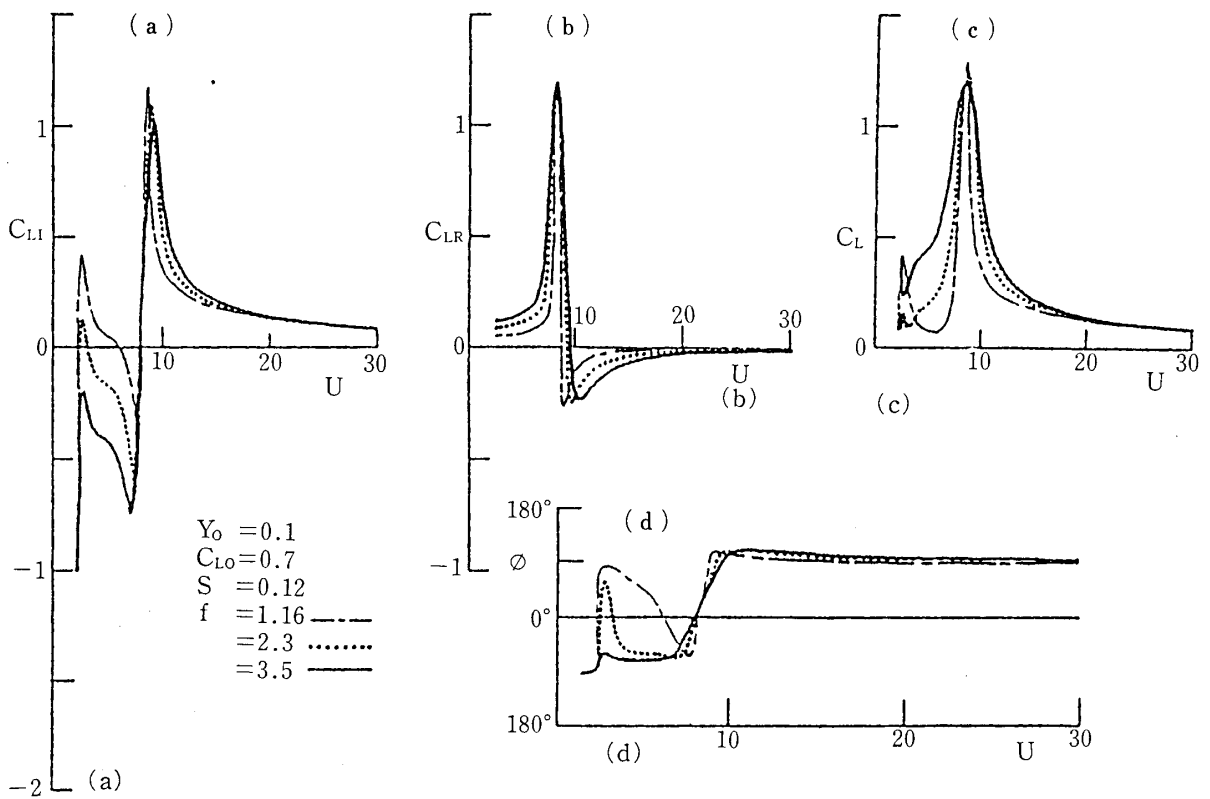


Fig. 3 本モデルによる2次元正方形角柱の非定常空気力の計算例

してある。Fig. 3(a)の速度同相成分 C_{LI} について言うと、無次元流速が大きいところでは定数 f による差は殆どないが、渦励振の共振流速付近では、定数 f の値が小さいとピークが鋭くなり、逆に f の値が大きくなるとブロードなピークとなり、かつピーク値が低下する傾向がある。また、定数 f の値が小さいと無次元流速の低いところで正の領域が現れる。これに応じて低流速で位相差が正側による。なお、静止角柱の揚力係数振幅 C_{Lo} の値もいくつか変化させて計算を行ったところ、この値も定数 f と同様に高い流速のところでは殆ど影響がないが、渦励振の共振流速付近では C_{Lo} の値に比例して C_{LI} が増加する。Fig. 2 の非定常空気力の実験値のバラツキの範囲で考えると $C_{Lo}=0.3\sim 0.7$ の範囲であればいずれが良いとも言えない。

4. 2次元正方形角柱の風直角方向応答

本モデルによる2次元正方形角柱の応答予測結果を実験値と比較する。(3a)(3b)式は非線形方程式であり、その解を解析的に求めることは難しい。また、近似的な定常周期解を求めようとすると、これがまた極めて複雑な式となり、現実には求めることが難しい。そこで、Runge-Kutta法によりこの微分方程式を解いて数値解を得ることに

した。

比較のために用いた実験結果はWawzonek [10]の一様流中での2次元正方形角柱の応答実験である。この実験での静止角柱の揚力係数振幅 C_{Lo} は明記されていない。非定常空気力の結果 (Fig. 3)からは $C_{Lo}=0.3\sim 0.7$ で良いようであるが、実験値 [7] などから判断して $C_{Lo}=0.7$ とする。また非定常空気力の結果から、振動の起きる渦励振の共振流速付近以上では、定数 f の値は 1.16 で良さそうであるから、この値を用いる。静的空気力の多項式近似の係数は 3.2 同様 Wawzonek [10]の空気力係数 C_{FY} の値を用いて算出した。計算には7次の項まで用いた。正方形角柱の質量比 n および構造減衰 η は Wawzonek [10]の実験時の値に合わせた。なお計算の時間ステップは $4\tau = 2\pi/100$ であり、振幅変動が標準偏差の $1/10^5$ 以下になったところで定常状態と判断し、この時点での振動の状態を初期値として、流速ステップ $4\nu = 0.05$ で次の流速値での計算に移るという方法をとった。計算は流速増加および流速減少の両方について行った。計算結果を Fig. 4 (a) (b) (c) に実験結果と併せて示した。

Fig. 4(a)は構造減衰が小さく、渦励振の共振流速 V_r とギャロピングの限界流速 V_C がほぼ一致する場合である。渦励振の共振流速付近から発生

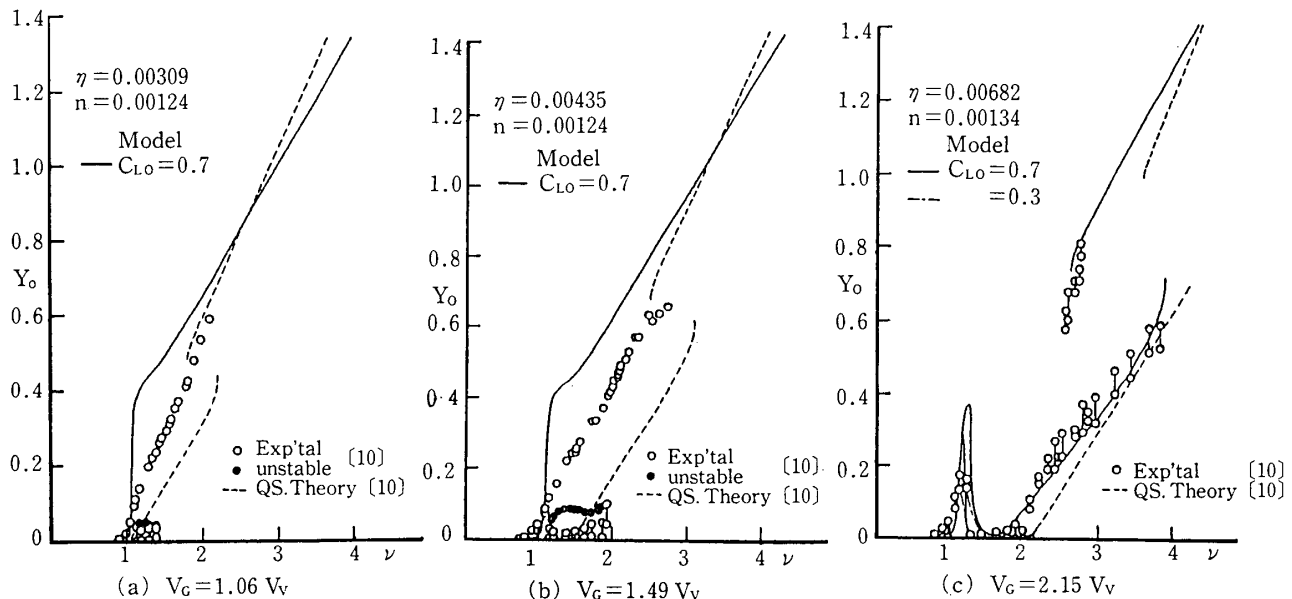


Fig. 4 2次元正方形角柱の風直角方向応答

する振動はそのままギャロピングに移行し、ギャロピングの upper branch の振動が発生する。Fig. 4(b)は構造減衰が大きく $V_c=1.49 V_v$ の場合であるが、この場合でも渦励振の共振流速付近から立ち上がった振動は、そのままギャロピングの upper branch の振動に移行し、 V_v と V_c の間の領域で渦励振とギャロピングの各々単独の理論からは予測できない大きな振動が生じる。Fig. 4(c)は構造減衰が十分に大きい場合で、 $V_c=2.15 V_v$ の場合である。この場合は渦励振とギャロピングが明瞭に区別でき、上記のようなギャロピングと渦励振の相互干渉はもはや出てこない。本モデルによる計算結果は渦励振の共振流速付近での応答がやや大きい、ほぼ実験値の性状を表している。

5. ま と め

以上の研究により次のようなことが分かった。いくつか実験的に詰めなければならないパラメータは残っているが、非線形振動子によって渦放出現象をシミュレートし、かつ準定常的な空気力を考えることによって、正方形角柱に作用する非定常空気力をほぼ模擬することができる。この考え方に基づいて計算した角柱の応答は、渦放出とギャロピング題動の相互作用による複雑な応答性状をもほぼ模擬できる。振動子の回転角が大きくなったとき、振動子の回転中心を移動して再付着の考慮をしたりすれば、より精度を上げることができるものと思われる。

参 考 文 献

- [1] Parkinson, G. V. and Wawzonek, M. A., Journal of Wind Engineering and Industrial Aerodynamics, Vol. 8, Nos. 1+2, July 1981, pp. 135-143.
- [2] 田村幸雄, 第5回構造物の耐風性に関するシンポジウム論文集, Dec. 1978, pp. 199-206.
- [3] 田村幸雄, 天野晶彦, 日本建築学会論文報告集, 第335号, 昭和59年3月.
- [4] Parkinson, G. V. and Brooks, N. P. H., Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, June 1961, pp. 252-258.
- [5] Novak, M., Proceedings of the ASCE, Vol. 95, EM 1, February 1969, pp. 115-142.
- [6] Otsuki, Y., Washizu, K., Tomizawa, H. and Ohya, A., Proceedings of The 2nd Symposium on Wind Effects on Structures, Japan, Dec. 1972, pp. 175-182.
- [7] 伊藤学, 宮田利雄, 森光康夫, 構造物の耐風性に関する第2回シンポジウム論文集, Dec. 1972, pp. 159-166.
- [8] 山田均, 宮田利雄, 土木学会論文集, 第344号, I-1, 1972, pp. 159-166.
- [9] 溝田武人, 岡島厚, 土木学会論文報告集, 第312号, August 1981, pp. 49-57.
- [10] Wawzonek, M. A., Aeroelastic behavior of square section prisms in uniform flow, Thesis of M. A. Sc., The University of British Columbia, June 1979.
- [11] 伊藤学, 宮田利雄, 藤澤伸光, 土木学会第30回年次学術講演会概要集, I-208, Oct. 1975.
- [12] Otsuki, Y., Washizu, K., Tomizawa, H. and Ohya, A., Journal of Sound and Vibration, 34(2), 1974, pp. 233-248.
- [13] Parkinson, G. V. and Bouclin, D., International Research Seminar on Safety of Structures under Dynamic Loading, Trondheim, Norway, June-July 1977.
- [1] Parkinson, G. V. and Wawzonek, M. A., Jour-