

Hamilton-Jacobi 方程式の解の特異点について

中 根 静 男*

On singularities for solutions of Hamilton-Jacobi equation

Shizuo NAKANE

Abstract:

The initial value problem for Hamilton-Jacobi equation in several space dimensions is considered. The solution of this problem is explicitly constructed by the method of characteristics. In general, this solution becomes multi-valued in finite time. By virtue of singularity theory, the structure of this solution as a multi-valued function is exactly clarified.

§ 1. 序

次の Hamilton-Jacobi 方程式の初期値問題を考える.

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + f\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0, \\ \text{in } \mathbf{R}_t^+ \times \mathbf{R}_x^n = \{(t, x) \in \mathbf{R}^{n+1}; t > 0\} \\ (2) \quad u(0, x) = \phi(x) \text{ on } \mathbf{R}_x^n.$$

ここで $f = f(p) \in C^\infty(\mathbf{R}_p^n)$, $\frac{\partial u}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$, $\phi(x) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, かつ f, ϕ, u は実数値とする.

我々は (1), (2) の解の性質を調べる. (1) の解を構成していくと, やがて 1 価でなくなり多価になってしまう. そこで 1 価な解を得ようとする. 解の滑らかさをあきらめねばならなくなる. このような現象は (1) の非線形性に起因する. 線形ならば, 初期値が滑らかであれば解も滑らかになるはずである.

以下では主に解の多価関数としての構造を明らかにすることを目標にする. その際, 特異点の理論は極めて有用であることは保存則の場合と全く

同じである.

Tsuji [5, 6] は $n=1, 2$ のときに (1)–(2) の 1 価連続な解を具体的に構成している. この小論も彼の結果を一般の次元にまで拡張しようとするひとつの試みである. 彼は特異点に関する Whitney の結果を使っているが, それを高次元化した Morin [4] の結果を用いれば, 彼の結果を高次元化することが可能になるのである. 一方, Guckenheimer [2] は (1) の解を“ラグランジュ多様体”として特徴づけることにより解の幾何学的な性質を調べている.

この小論の構成は以下の通りである. § 2 では Hamilton-Jacobi 方程式の意味を物理学の立場から概観する. § 3 では (1)–(2) の解を特性曲線の方法を用いて具体的に構成する. そして § 4 で特異点の理論を用いて (1)–(2) の解の多価関数としての構造を明らかにする.

§ 2. 背景

まず Hamilton-Jacobi 方程式の意味について概説する. 以下, x は 3 次元空間の位置を表わすとしよう.

ポテンシャル $U=U(x)$ が与えられたとき, 質量 m の質点の運動は Newton 力学においてはよ

* 教養講師
昭和 61 年 9 月 24 日受理

く知られた運動方程式:

$$(3) \quad m\ddot{x}(t) + \frac{\partial U}{\partial x}(x(t)) = 0$$

で与えられる. ここで $\dot{x}(t) = \frac{d}{dt}x(t)$, $\ddot{x}(t) = \frac{d^2}{dt^2}x(t)$ である.

一方, 力学系の運動法則の最も一般的な定式化は Hamilton の最小作用の原理で与えられる. この原理に従えば, 時刻 $t=t_1$ 及び t_2 に系が 2 点 $x^{(1)}$, $x^{(2)}$ の位置にいたとすると, これらの位置の間では系は積分

$$(4) \quad S = \int_{t_1}^{t_2} L(x(t), \dot{x}(t), t) dt$$

が最小になるような軌道 $x=x(t)$ に沿って運動する. 関数 L を Lagrangean といい, 積分 S を作用という.

この原理から運動方程式 (3) が導かれることを見ていこう. まず次を示す.

定理 1. $(t_1, x^{(1)})$, $(t_2, x^{(2)})$ を結ぶ曲線のなす空間上の汎関数 $\Phi(x) = \int_{t_1}^{t_2} L(x(t), \dot{x}(t), t) dt$ に対し, 曲線 $x(t)$ が極値であるための必要十分条件は x にそって, Euler-Lagrange 方程式

$$(5) \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

が成り立つことである.

証明. 曲線 $h(t)$ を $h(t_1)=h(t_2)=0$ となるものとする. このとき $\Delta\Phi = \Phi(x+h) - \Phi(x)$ を考える.

$$\begin{aligned} \Delta\Phi &= \int_{t_1}^{t_2} \{L(x+h, \dot{x}+\dot{h}, t) - L(x, \dot{x}, t)\} dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \frac{\partial L}{\partial x} \cdot h + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \cdot \dot{h} \right\} dt + O(h^2). \end{aligned}$$

今, 部分積分により

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{h} dt &= \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} h \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \cdot h dt \\ &= - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} h dt. \end{aligned}$$

故に

$$\Delta\Phi = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) h dt + O(h^2).$$

$x(t)$ が極値であるためには, この右辺第 1 項がすべての h に対し 0 にならねばならない. よって

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0 \text{ が従う. } \quad (\text{終})$$

質点の場合は L として運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの差をとればよいので,

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - U(x) \text{ となる. 従って } \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \dot{x},$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x} \text{ 故, (5) は (3) に一致する.}$$

作用関数 $S(x, t)$ を, 点 (t_0, x_0) と (t, x) を結ぶ極値曲線 $x(t)$ に沿う積分として定義する:

$$S(x, t) = \int_{t_0}^t L(x(t), \dot{x}(t), t) dt.$$

この S の性質を調べよう. 明らかに

$$\frac{d}{dt} S(x(t), t) = L. \text{ 一方,}$$

$$\Delta S = S(x + \Delta x, t) - S(x, t)$$

$$\begin{aligned} &= \int_{t_0}^t \{L(x + \Delta x, \dot{x} + \Delta \dot{x}, t) - L(x, \dot{x}, t)\} dt \\ &= \int_{t_0}^t \left(\frac{\partial L}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \Delta \dot{x} \right) dt + O((\Delta x)^2) \\ &= \int_{t_0}^t \left(\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) \cdot \Delta x dt + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \cdot \Delta x \right]_{t_0}^t \\ &\quad + O((\Delta x)^2) \\ &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \cdot \Delta x + O((\Delta x)^2). \end{aligned}$$

従って,

$$\frac{\partial S}{\partial x} = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \dot{x} = p \text{ (運動量).}$$

$$\text{一方, } L = \frac{d}{dt} S = \frac{\partial S}{\partial x} \cdot \dot{x} + \frac{\partial S}{\partial t} \text{ 故}$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = L - p \dot{x} = -H = -H(p, t) = -H\left(\frac{\partial S}{\partial x}, t\right).$$

ここで $H = p \dot{x} - L$ は Hamiltonian と呼ばれ系の全エネルギーを表わす. 結局 S は

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(\frac{\partial S}{\partial x}, t\right) = 0$$

をみたす. これを Hamilton-Jacobi 方程式という. (1) はその特別な場合 (H が t に依らぬ) である.

この節の議論は Arnold [1] と Landau-Lifshitz [3] からの抜粋である. 興味を持たれた読者はこれらを参照されたい. また, 筆者は物理学には素人なので, 思わぬ所で間違いをしているかもしれないことを注意しておこう.

§ 3. 特性曲線の方法

(1) — (2) に対する特性曲線の方程式:

$$(6) \quad \begin{cases} \dot{x}_i = \frac{\partial f}{\partial p_i}(p), & x_i(0) = y_i, \\ \dot{p}_i = 0, & p_i(0) = \frac{\partial \phi}{\partial y_i}(y), \\ \dot{v} = -f(p) + p \cdot f'(p), & v(0) = \phi(y), \end{cases}$$

を解くと,

$$(7) \quad \begin{cases} p_i(t) = p_i(t, y) \equiv p_i(0, y) = \frac{\partial \phi}{\partial y_i}(y), \\ x_i(t) = x_i(t, y) = y_i + t \frac{\partial f}{\partial p_i}(\phi'(y)), \\ v(t) = v(t, y) = \phi(y) \\ \quad + t \{-f(\phi'(y)) + \phi'(y) \cdot f'(\phi'(y))\}. \end{cases}$$

この特性曲線に付随した C^∞ 写像 $H_t: \mathbf{R}_y^n \rightarrow \mathbf{R}_x^n$, $H: \mathbf{R}_{(t,y)}^{n+1} \rightarrow \mathbf{R}_{(t,x)}^{n+1}$ を次で定義する.

$$H_t: x = y + t f'(\phi'(y)),$$

$$H: \begin{cases} t = t, \\ x = y + t f'(\phi'(y)). \end{cases}$$

すると (1)–(2) の解は,

$$(8) \quad u(t, x) = v(H^{-1}(t, x))$$

で与えられる.

§ 4. 写像 H の特異点の構造

本節がこの小論の主要部である. 前節の議論により, (1)–(2) の解の表示 (8) が得られたが, ここで問題なのは, 写像 H の逆写像 H^{-1} である. 一般に H^{-1} は 1 価ではなく多価になる. 前に解が多価になると述べたが, その原因はすべてこの H^{-1} の多価性に因るのである. H^{-1} が多価になるのは, もとの写像 H が特異点 (即ち, H のヤコビアンが 0 になる点) を持っているためである. そこで, H^{-1} の多価性を調べるためには, H の特異点について調べる必要が出てくる. これが本節の目的である.

以下, 写像 H のヤコビ行列を $J(H)$, その行列式であるヤコビアンを $\det J(H)$ と書くことにする. 直接計算により,

$$J(H_t) = I_n + t \operatorname{Hess}(f) \cdot \operatorname{Hess}(\phi),$$

$$J(H) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ * & J(H_t) \end{bmatrix}.$$

従って, $\operatorname{Hess}(f) \cdot \operatorname{Hess}(\phi)$ の固有値を $\lambda_i(y)$ ($1 \leq i \leq n$) とおくと,

$$\det J(H) = \det J(H_t) = \prod_{i=1}^n (1 + t \lambda_i(y))$$

と表わされる.

ここで次を仮定する.

(A.1) $\lambda_i(y)$ はすべて実数で相異なる.

そこで, $\lambda_1(y) < \lambda_2(y) < \cdots < \lambda_n(y)$ とする.

(A.2) $\min \lambda_1(y) = \lambda_1(y^0) = -M < 0$

今 $t^0 = 1/M$ とおくと $t < t^0$ で $\det J(H) > 0$ かつ $\det J(H)(t^0, y^0) = 0$.

(A.3) $\lambda_1(y)$ の特異点是非退化, 即ち, $\operatorname{grad} \lambda_1(y) = 0$ ならば $\operatorname{Hess} \lambda_1(y)$ は可逆.

(A.1) はもっと弱められるが, 簡単のためにこのように仮定したことを注意しておく.

以上の仮定の下で, まず問題を簡単にする.

補題 1. x 空間の回転により, 行列 $\operatorname{Hess}(f) \cdot \operatorname{Hess}(\phi)$ の固有値は不変.

従って, $J(H_{t^0})(y^0)$ の階数は $n-1$ であることが (A.1) より従う. そこで, 回転により $J(H_{t^0})(y^0)$ の第 n 列を 0 にできる.

補題 2. x 平面の回転により

$$J(H_{t^0})(y^0) = \begin{bmatrix} & & 0 \\ & * & \vdots \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

と仮定してよい.

補題 3. $J(H_{t^0})(y^0)$ の $(n-1)$ 次首座行列式の中に 0 でないものが少なくとも 1 つはある.

証明. $g_y\left(\frac{1}{t}\right) = t^{-n} \det J(H_t)$
 $= \det(t^{-1} I_n + \operatorname{Hess}(f) \cdot \operatorname{Hess}(\phi))$ とおくと,

$$g_y(s) = \prod_{i=1}^n (s + \lambda_i(y)). \text{ すると}$$

$$\frac{d}{ds} g_y|_{s=-\lambda_1(y^0)} = \prod_{i=2}^n (\lambda_i(y^0) - \lambda_1(y^0)) > 0.$$

一方,

$$\frac{d}{ds} g_y|_{s=-\lambda_1(y^0)} = (t^0)^{1-n} \{J(H_{t^0})(y^0) \text{ の } (n-1) \text{ 次首座行列式の和}\}$$

であることが計算により従うので, 補題が示された. (終)

補題 2 と 3 から次が従う.

補題 4. (t^0, y^0) で $\frac{\partial x'}{\partial y'} \neq 0$

このとき, 次の変換 $h: \mathbf{R}_{(t,y)}^{n+1} \rightarrow \mathbf{R}_{(t,r)}^{n+1}$ は

(t^0, y^0) の近くで diffeo になる:

$$h: \begin{cases} t=t, \\ Y_i=y_i+t \frac{\partial f}{\partial p_i}(\phi'(y)), \\ Y_n=y_n. \end{cases}$$

h の逆写像 h^{-1} を次で表わす.

$$h^{-1}: \begin{cases} t=t, \\ y=b(t, Y) \quad (\text{但し, } b_n(t, Y) \equiv Y_n). \end{cases}$$

ここで $b_i (1 \leq i \leq n-1)$ は次をみたす:

$$Y_i \equiv b_i(t, Y) + t \frac{\partial f}{\partial p_i}(\phi'(b(t, Y))).$$

さて, $\tilde{H} = H \circ h^{-1}$ は次のように表わされる:

$$\tilde{H}: \begin{cases} t=t, \\ x_i=Y_i \quad (1 \leq i \leq n-1), \\ x_n=Y_n+t \frac{\partial f}{\partial p_n}(\phi'(b(t, Y))). \end{cases}$$

$$\det J(\tilde{H}) = \det J(H \circ h^{-1}) = \det J(H) / \det J(h) \\ = \prod_{i=1}^n (1 + t \lambda_i(b(t, Y))) / \frac{\partial x'}{\partial y'}$$

に注意すると, 次の主結果を得る.

定理 2. $(t^0, Y^0) = h(t^0, y^0)$ の近くで \tilde{H} の特異点は fold か cusp に限る.

定義. C^∞ 写像 $H: \mathbf{R}_y^n \rightarrow \mathbf{R}_x^n$ の特異点が fold (resp. cusp) であるとは, \mathbf{R}_y^n 及び \mathbf{R}_x^n における diffeo によって H が次の形に移されることをいう.

$$\text{fold: } \begin{cases} x_1=y_1 \\ \dots \\ x_{n-1}=y_{n-1} \\ x_n=y_n^2 \end{cases}$$

$$(\text{resp. cusp: } \begin{cases} x_1=y_1 \\ \dots \\ x_{n-1}=y_{n-1} \\ x_n=y_n^3 - y_1 y_n. \end{cases})$$

定理 2 の証明. (t, Y) は Morin の言う adapted system of coordinates であることに注意しよう. $\Sigma^1 = \left\{ \frac{\partial x_n}{\partial Y_n} = 0 \right\}$, $\Sigma^{1,1} = \left\{ \frac{\partial x_n}{\partial Y_n} = \frac{\partial^2 x_n}{\partial Y_n^2} = 0 \right\}$ とおくと, (A.1) とそれに続く注意より,

$$\Sigma^1 = \{(t, Y) : 1 + t \lambda_1(b(t, Y)) = 0\}$$

$$\Sigma^{1,1} = \{(t, Y) : 1 + t \lambda_1(b(t, Y)) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial Y_n} \lambda_1(b(t, Y)) = 0\}$$

となる. $\Sigma^{1,1}$ 上

$$\frac{\partial^3 x_n}{\partial Y_n^3} = (\det J(h))^{-1} \prod_{i=1}^n (1 + t \lambda_i(b(t, Y))) \\ \times t \frac{\partial^2}{\partial Y_n^2} \lambda_1(b(t, Y)).$$

ここで

$$\frac{\partial^2}{\partial Y_n^2} \lambda_1(b(t, Y)) = \left\langle \frac{\partial b}{\partial Y_n}, \text{Hess } \lambda_1 \cdot \frac{\partial b}{\partial Y_n} \right\rangle \\ + \sum_{j=1}^n \frac{\partial \lambda_1}{\partial y_j} \cdot \frac{\partial^2 b_j}{\partial Y_n^2}$$

今, (A.2) と (A.3) より, $\text{Hess } \lambda_1$ は正定値であり, また, (t^0, y^0) で $\frac{\partial \lambda_1}{\partial y_j} = 0$ ($1 \leq j \leq n$) なの
で, (t^0, Y^0) の近傍で $\frac{\partial^2}{\partial Y_n^2} \lambda_1(b(t, Y)) > 0$ が従
う. 故に $\frac{\partial^3 x_n}{\partial Y_n^3} > 0$. また,

$$\frac{\partial^2 x_n}{\partial t \partial Y_n} = (\det J(h))^{-1} \prod_{i=2}^n (1 + t \lambda_i(b)) \lambda_1(b) \neq 0$$

故に, $\Sigma^{1,1}$ 上 $\frac{\partial^3 x_n}{\partial Y_n^3}$, $\frac{\partial^2 x_n}{\partial t \partial Y_n} \neq 0$ なので, Morin [4] の特徴づけにより, \tilde{H} の特異点が fold でなければ cusp であることが従い, 定理が証明された. (終)

陰関数定理により, 次がわかる.

補題 5. $\Sigma^{1,1}$ は Y' で parametrize される \mathbf{R}^{1+n} の余次元 2 の C^∞ -部分多様体である.

補題 6. $\tilde{H}(\Sigma^{1,1})$ は x' で parametrize される \mathbf{R}^{1+n} の余次元 2 の C^∞ -部分多様体である.

以上の議論から (1)–(2) の解の多価関数としての構造が明らかになった.

文 献

- [1] V.I. Arnold, 「古典力学の数学的方法」(訳, 安藤・蟹江・丹羽), 岩波書店 1980
- [2] J. Guckenheimer, Catastrophes and partial differential equations, Ann. Inst. Fourier. Grenoble, 23 (1973), 31–59.
- [3] L. Landau and E. Lifshitz, 「力学」(訳, 広重・水戸) 東京図書 1974.
- [4] B. Morin, Formes Canoniques de singularites d'une application differentiable, C. R. Acad. Sci. Paris, 260 (1965), 5662–5665.
- [5] M. Tsuji, Solution globale e propagation des singularités pour l'équation de Hamilton-Ja-

- cobi, C. R. Acad. Sci. Paris 289 (1979), 397-400.
- [6] M. Tsuji, Formation of singularities for Hamilton-Jacobi equation I, Proc. Japan Acad., 59 (1983), 55-58, ibid, II, J. Math Kyoto Univ., 26 (1986), 299-308.