

# 高安定水晶発振器の周波数安定度の測定

松田 勲      相原 勝美\*      佐々木信治\*\*

## Measurement of the frequency stability of the highly stable quartz crystal oscillator

Isao MATSUDA, Katsumi AIHARA\*, Shinji SASAKI\*\*

The estimating system for the frequency stability was manufactured. The measurement, the data acquisition and the estimation of the stability, etc. are all controlled by a microcomputer PC 8001 mkII. Allan-variance and power spectral density was calculated as the measure of the frequency stability in the time-domain and the frequency-domain respectively. It was found that the tested quartz crystal oscillator had the stability of  $1 \times 10^{-11}$  at 1 sec averaging time and its power spectral density was designated by the sum of the terms of  $6 \times 10^{-25} f^{-2}$  (random walk noise) and  $1.5 \times 10^{-22} f^0$  (white noise).

### ① 序 論

本研究ではルビジウム原子発振器や水晶発振器など高安定周波数源の周波数安定度の評価システムを確立し、その評価を行うことを目的とした。周波数安定度の評価は時間領域と周波数領域の2つの面から行った<sup>1),2)</sup>。前者はアラン分散によるもので、ある時間間隔でサンプリングした周波数のデータからその変動量の分散を求めるものである。後者は発振器のもつ周波数変動のパワースペクトル密度の推定値を用いるもので、ここではサンプリングされた周波数のデータから Blackman and Tukey による方法<sup>3)</sup>で計算した。測定はマイコンを用いて自動化することとし、周波数カウンタ、X-Y プロットを組み込んだシステムを構成し、解析結果をグラフ化できるようにし

た。

### ② システムの構成

時間領域・周波数領域での周波数安定度の解析を行うための測定および解析システムの構成を図1に示す。被測定水晶発振器の出力は周波数混合器のバランスドミキサーによって基準水晶発振器の出力とのビートをとられ、フィルタによって差成分の信号が取り出される。これはビート法<sup>4)</sup>とよばれ、高安定水晶発振器の周波数安定度の測定精度を上げるのに有効な方法である。例えば 5.02549 MHz を直接カウントした場合、周波数カウンタ HP 5345 A ではゲートタイム 1 s で9桁表示可能なので 1/100 Hz までの測定が可能であるが、これに対し、本システムのようにビートを取り、25 kHz の信号を測定することで 1/1000 Hz まで測定可能となり、2桁の精度向上が実現される。図1の構成のように GP-IB インターフェースで HP 5345 A と PC-8001 mkII とを結ぶ

\* 現在 東洋通信機株式会社

\*\* 現在 富士通エフ・アイ・ピー株式会社  
昭和 60 年 10 月 9 日受理

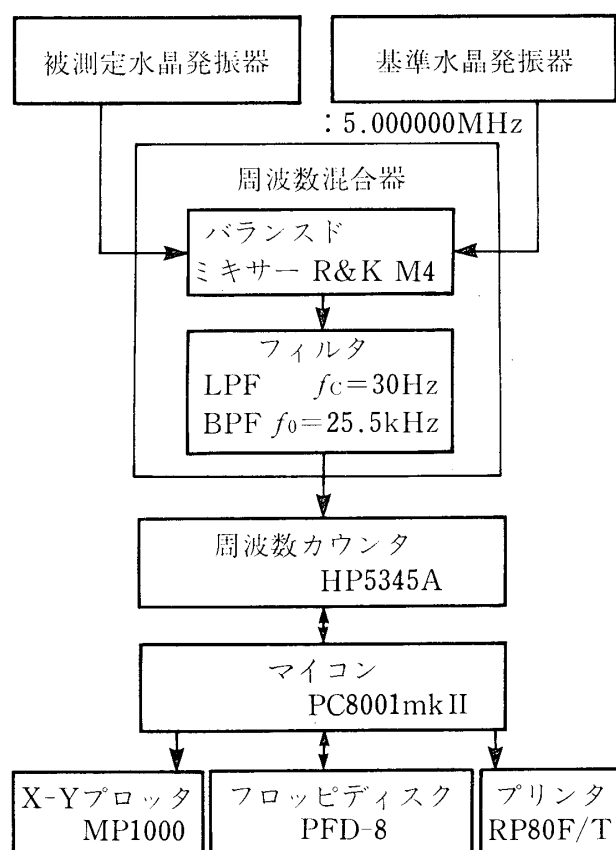


図1 周波数安定度の測定および解析システム図

ことによりカウンタに対してリモートセット・リセットおよびゲートタイムの指定が可能となる<sup>5)</sup>。

### ③ 周波数安定度解析の概要

周波数測定データを用いて周波数安定度を解析するための手順の概要を図2に示す。まずマイコンと周波数カウンタを結ぶために必要なマシン語サブルーチンの初期設定を行う。次にサンプリングデータ数、カウンタのゲートタイムおよびデータを保存するためのファイル名を指定しデータの取り込みを行う。このようにしてカウンタによりサンプリングされたデータはフロッピーディスクに保存されて、後にアラン分散、パワスペクトル密度を計算するときのデータとなる。また計算されたパワスペクトル密度はX-Yプロッタを用いてグラフ作成が行える。これらの測定および解析・グラフ作成処理は全て対話型で実行される。

### ④ 時間領域の解析

#### 4.1 アラン分散

時間領域における周波数安定度の尺度として用いられるアラン分散 $\sigma_y(\tau)$ は式(1)によって計算することができる<sup>1)</sup>。

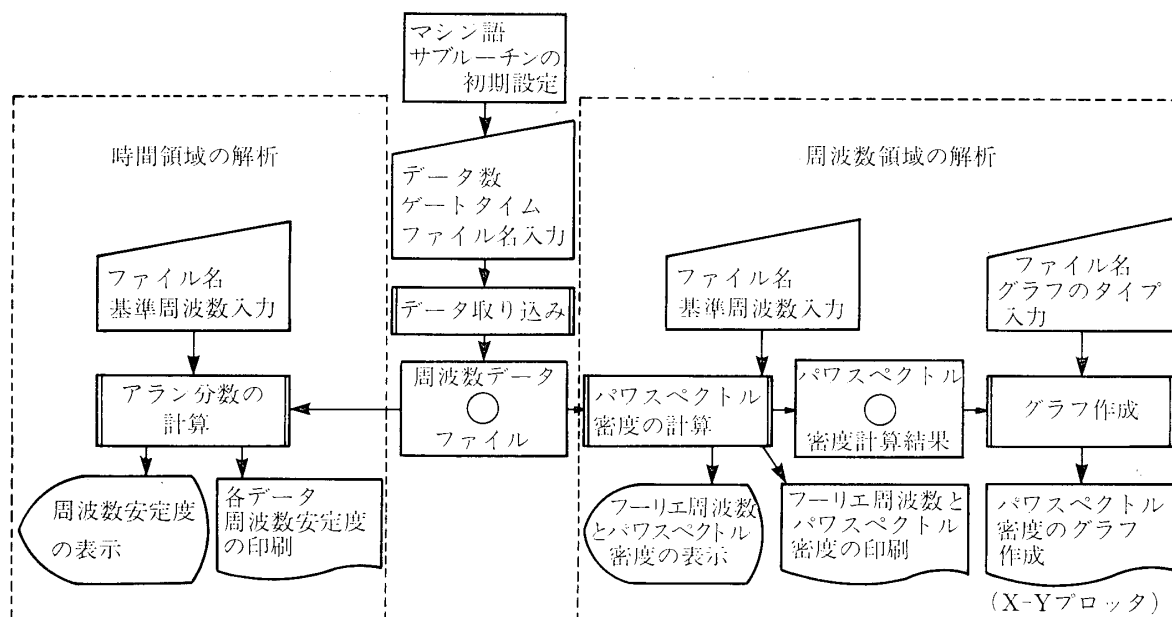


図2 周波数安定度解析の概要

$$\sigma_y(\tau) = \frac{1}{f_0} \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{(\bar{f}_k - \bar{f}_{k+1})^2}{2}} \quad (1)$$

ここで  $f_0$  は公称周波数,  $N$  はデータ数,  $\bar{f}$  は測定周波数データである. アラン分散は周波数安定度の定義としては第2義的なものとなっているが, 第1義的な定義として用いられるパワスペクトル密度にくらべて計算が容易であること, 単純なスペクトルの場合には定義間の変換により容易にパワスペクトル密度を知ることができることなどにより広く用いられている.

#### 4.2 結果

5 MHz 高安定水晶発振器を基準として 5.02549 MHz の水晶発振器についてゲートタイム 100  $\mu$ s ~ 100 s でサンプリングしたデータから計算された周波数安定度の結果を図2に示す. ゲートタイム 100  $\mu$ s  $\leq \tau \leq$  1 s の領域では  $\tau^{-1}$  の傾きを持ち, アラン分散  $\sigma_y(\tau)$  は,  $\sigma_y(\tau) \doteq 1 \times 10^{-11} \tau^{-1}$  で表わすことができる. またゲートタイム 1 s  $\leq \tau \leq$  100 s の領域では, 傾きはほとんどみられず  $\sigma_y(\tau) \doteq 1 \times 10^{-11}$  で表わすことができる.

図2における×印は 5 MHz の水晶発振器と, 5.0255 MHz 水晶発振器の測定結果を示すものであるが, 先の場合に比較して周波数安定度はやや悪くなっている. 測定系は同じであるので 5.02549 MHz と 5.0255 MHz とを比較した場合,

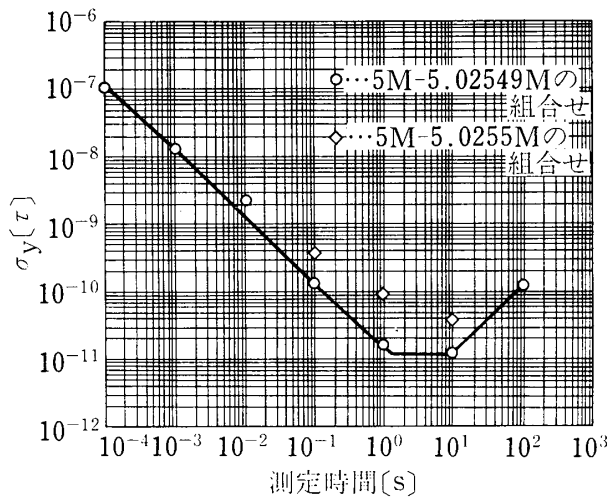


図3 時間領域の解析

前者の方が周波数安定度の高い水晶発振器であることがわかる.

### 5 周波数領域の解析

#### 5.1 パワスペクトル密度の推定

パワスペクトル密度は発振器の出力周波数の持っている周波数変動のスペクトル分布を求めるもので, 周波数安定度の第1定義として用いられる<sup>1)</sup>. ここでは Blackman and Tukey の方法にしたがって次の手順で計算を行った<sup>3)</sup>. なお白色化については後に述べる.

1. データ  $X_t$  をサンプリングする (時間間隔  $\Delta\tau$ )

2. 白色化する (必要な場合)

$$\text{例えば } \tilde{X}_t = X_t - 0.9 X_{t-1} \quad (2)$$

の処理を行うと

$$|Y(f)|^2 = 1.81 - 1.8 \cos 2\pi f \Delta\tau \quad (3)$$

のフィルタを通したことに相当する.

3. 自己相関関数  $C_r$  を求める

$$C_r = \frac{1}{n-r} \sum_{t=1}^{n-r} \tilde{X}_t \cdot \tilde{X}_{t+r} \quad (r=0, 1, 2, \dots, m) \quad (4)$$

$m$ : 最大ラグ  $n$ : データ数

4. ドリフト除去のため  $C'_r$  を求める (データにドリフトがある場合)

$$C'_r = \frac{1}{n-1} \sum_{t=1}^{n-r} \tilde{X}_t \tilde{X}_{t+r} - \left( \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \tilde{X}_t \right)^2 - \frac{3}{16} K_r (\bar{\tilde{X}}_t^+ - \bar{\tilde{X}}_t^-)^2 \quad (5)$$

$$\left( K_r = 1 - \frac{1}{n^2} - 2 \frac{r}{n} - 2 \frac{r^2}{n} \right)$$

$\bar{\tilde{X}}_t^+$ : データ左側 1/3 の平均

$\bar{\tilde{X}}_t^-$ : データ右側 1/3 の平均

5. 離散的データによる影響を含むパワスペクトル密度  $V_r$  の計算

$$V_r = \Delta\tau \left( C'_0 + 2 \sum_{q=1}^{m-1} C'_q \cos \frac{qr\pi}{m} + C'_m \cos r\pi \right) \quad (6)$$

6. リファイニングにより離散的なデータによる影響を取り除いたパワスペクトル密度  $U_r$  を計

算する

$$U_0 = \frac{1}{2}(V_0 + V_1) \quad (7)$$

$$U_r = \frac{1}{4}V_{r-1} + \frac{1}{2}V_r + \frac{1}{4}V_{r+1} \quad (1 \leq r \leq m-1) \quad (8)$$

$$U_m = \frac{1}{2}(V_{m-1} + V_m) \quad (9)$$

7. 白色化をもどしてパワスペクトル密度の推定値  $S_r$  を求める (白色化した場合)

例えば (2) 式の処理をした場合には

$$f_0 = \frac{1}{3} - \frac{1}{2m\Delta\tau} \text{ に対して}$$

$$S_0 = \frac{n}{n-m} \frac{1}{1.81 - 1.8 \cos \frac{2\pi}{6m}} U_0 \quad (10)$$

$$f_r = \frac{r}{2m\Delta\tau} \quad (1 \leq r \leq m-1) \text{ に対して}$$

$$S_r = \frac{1}{1.81 - 1.8 \cos \frac{2r\pi}{2m}} \cdot U_r \quad (11)$$

$$f_m = \frac{1}{2\Delta\tau} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2m\Delta\tau} \text{ に対して}$$

$$S_m = \frac{1}{1.81 - 1.8 \cos \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{6m} \right) 2\pi} U_m \quad (12)$$

### 5.1.1 白色化

パワスペクトル密度の計算において, ある特定の周波数に大きなスペクトルがある場合にはその近傍のスペクトル密度の推定値は影響を受けてしまう. そこで計算に入る前にフィルタをかけてできるだけ全体を平坦な特性となるようにしてその影響を少なくすることが望ましい<sup>3)</sup>. このような処理を白色化といいスペクトル計算後白色化を元にもどす. (2) 式のような低域阻止フィルタの場合, 計算上のフィルタ特性と白色化処理との間には次のような関係がある.

$$|Y(f)|^2 = b_0 - 2b_1 \cos 2\pi f\Delta\tau \quad (13)$$

$$\hat{X}_t = a_0 X_t - a_1 X_{t-1} \quad (14)$$

$$\left. \begin{aligned} b_0 &= a_0^2 + a_1^2 \\ b_1 &= a_0 \cdot a_1 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

## 5.2 結果

高安定 5 MHz 水晶発振器を基準として 5.02549 MHz 水晶発振器について, サンプルングタイム 1 sec のデータからパワスペクトル密度の推定値を計算した結果を図 4 に示す. これより  $7 \times 10^{-2}$  Hz 以下の領域ではパワスペクトル密度は  $6 \times 10^{-25} f^{-2}$  で表わされ, ランダムウォークノイズであることを示している. また  $7 \times 10^{-2}$  Hz 以上の領域では  $1.5 \times 10^{-22} f^0$  で表わされるホワイトノイズであることが推定できる.

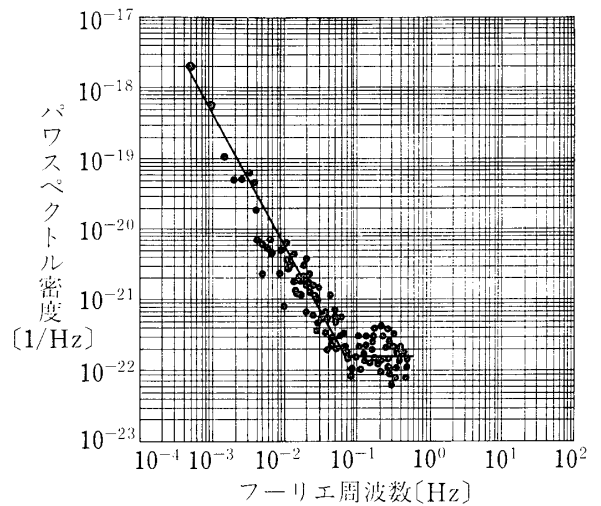


図 4 パワスペクトル密度の推定

## 6 考察

本研究では時間領域および周波数領域において周波数安定度の解析を行ったが, ここでは本システムの測定系の精度について検討する. カウンタによる測定桁数からビート周波数をパラメータとして  $\pm 1$  カウント誤差による測定精度を図示すると図 5 のようになる. これより本システムの場合ゲートタイムが 1 sec で測定精度が  $2 \times 10^{-11}$  となり, 測定されたアラン分散の値とはほぼ同じである. このことは測定された周波数安定度の値は測定限界そのものを示している可能性もあり, 測定された水晶発振器は更に高い安定度を有している

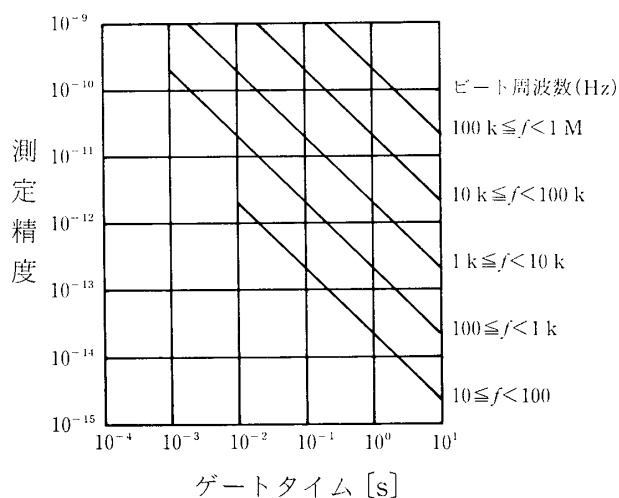


図5 周波数カウンタの  $\pm 1$  カウント誤差による測定精度

可能性がある。最近の水晶発振器は安定度が非常にすぐれているので、これらの測定を行うためには余裕をとってゲートタイム 1 s で  $1 \times 10^{-13}$  の桁の測定精度が必要であり、またサンプリング時間の範囲として 1 msec までとするとすれば、そのためには図5よりビート周波数を 100 Hz から 1 kHz の間に選べばよい。測定精度を上げる方法として周波数通倍とビート法を組み合わせる方法もあるが、これについては現在測定システムを製作中である。

## 7 結 論

高安定水晶発振器の周波数安定度の評価システムを製作し、時間領域及び周波数領域での周波数安定度の評価を行った。本システムによりアラン分散、及びパワースペクトル密度が求められ、発振器のもつ雑音の成分が推定できるようになった。またビート周波数を 1 kHz 以下にすればさらに精度の高い測定が可能となる。

測定及び解析のためのプログラムに関してはすべて対話形式で行えるようにしたので操作が非常に容易となった。

## 参 考 文 献

- 1) J. A. Barnes, A. R. Chi and L. S. Cutler, et al.: IEEE Trans. on Instr. and Meas., IM-20, No. 2, p. 105 (1971-5).
- 2) P. Kartaschoff: "Frequency and Time", Academic Press, London, pp. 13-36 (1978).
- 3) R. B. Blackman and J. W. Tukey: "The Measurement of Power Spectra", Dover, New York (1958).
- 4) 周波数精密測定回路専門委員会: 「周波数安定度とその測定」, 電気学会技術報告 (II 部) 第 41 号, 電気学会 (昭 51-2).
- 5) Electronic Counter 5345 A Manual, Hewlett Packard